

На правах рукописи

Истомина Алена Андреевна

**УПРАВЛЕНИЕ АССОРТИМЕНТОМ И ЗАПАСАМИ В УСЛОВИЯХ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

(на примере предприятий розничной торговли)

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка
информации (региональные народнохозяйственные комплексы)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
профессор Бадеников В.Я.

Научный консультант:
доктор технических наук,
профессор Гозбенко В.Е.

Иркутск, 2017

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АССОРТИМЕНТОМ И ЗАПАСАМИ В РОЗНИЧНОЙ ТОРГОВЛЕ	11
1.1. Роль ассортимента и запасов в розничной торговле	11
1.2. Практика управления ассортиментом и товарными запасами в розничной торговле.....	14
1.3. Развитие формальных методов управления ассортиментом в розничной торговле.....	19
1.4. Развитие формальных методов управления товарными запасами	28
1.5. Постановка задачи исследования	40
ВЫВОДЫ.....	43
ГЛАВА 2. ОПТИМИЗАЦИЯ АССОРТИМЕНТА ТОВАРОВ В РОЗНИЧНОЙ ТОРГОВЛЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.....	44
2.1. Постановка задачи определения оптимального ассортимента товаров в торговых организациях	44
2.2. Оценка спроса на товар и установление закона распределения вероятностей.....	53
2.3. Пример решения задачи нахождения оптимального ассортимента товаров в задачах со случайным спросом	65
2.4. Метод кусочно-линейной аппроксимации задачи нелинейного программирования	70
2.5. Пример решения задачи нахождения оптимального ассортимента товаров с помощью приближенной задачи линейного программирования	78
ВЫВОДЫ.....	85
ГЛАВА 3. УПРАВЛЕНИЕ ТОВАРНЫМИ ЗАПАСАМИ В РОЗНИЧНОЙ ТОРГОВЛЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ	86

3.1. Управление запасами товаров на основе теории массового обслуживания	86
3.2. Стратегия непрерывного пополнения запасов.....	88
3.3. Стратегия пополнения запасов партиями.....	101
3.4. Управление запасами множеством товаров	113
ВЫВОДЫ.....	115
ГЛАВА 4. ПОДДЕРЖКА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ АССОРТИМЕНТОМ И ТОВАРНЫМИ ЗАПАСАМИ	116
4.1. Система поддержки принятия решений	116
4.2. Математическое и алгоритмическое обеспечение поддержки принятия решений в задаче управления ассортиментом и запасами	120
4.2.1. Снижение размерности задачи управления ассортиментом и товарными запасами	120
4.2.2. Прогнозирование спроса и параметров распределений случайных величин в задачах управления ассортиментом и товарными запасами	123
4.2.3. Распределение времени поставок пополнения запасов	138
4.3. Информационно-логическая модель задачи управления ассортиментом и товарными запасами	139
ВЫВОДЫ.....	143
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	144
ЛИТЕРАТУРА	147
ПРИЛОЖЕНИЯ	

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в связи с развитием рыночных отношений и возникновением различных форм собственности, розничная торговля, как и вся торговая отрасль в целом, становится самостоятельной сферой деятельности людей, когда каждое торговое предприятие работает на основе полной самокупаемости. Это существенно повышает заинтересованность торговых предприятий в эффективности своей деятельности. В конкурентной борьбе торговые предприятия стремятся обеспечить близость своих товаров к потребителю, высокий уровень обслуживания и качество предъявляемых товаров. Но эффект от проделанной работы часто перечеркивается неправильно сформированным ассортиментом товаров и неверно выстроенной стратегией управления товарными запасами, что приводит к увеличению времени обращения товаров, увеличению затрат на хранение запасов, сокращению прибыли торговых предприятий.

Проблема усугубляется еще и тем, что во многом экономические результаты деятельности торговых предприятий имеют стохастический, случайный характер, негативным образом влияющий на их текущую и перспективную деятельность. Это особенно проявляется в условиях нестабильной экономики, санкций, введенных в отношении РФ, ответных действий России по ограничению поставок продукции со стороны ряда стран, когда торговые предприятия сталкиваются с необходимостью частого изменения ассортимента и стратегии управления товарными запасами и принятия решений. Все эти обстоятельства требуют новых подходов к управлению розничной торговлей и процессом товарооборота в целом.

В складывающихся условиях функционирования одним из важнейших направлений повышения эффективности розничной торговли становится задача значительного совершенствования управления ассортиментом и товарными запасами – их оптимизация на основе математических моделей, связы-

вающих показатели эффективности торговых предприятий с имеющимися ресурсами.

В то же время, обращает на себя внимание недостаточная разработанность теории и методологии управления ассортиментом и запасами товаров в условиях вероятностного характера спроса на товары. Нет надежных методик определения наилучшего ассортимента товаров, их объемов, размеров партий поставки товаров, особенно в условиях неопределенности, без которых торговое предприятие не может стабильно функционировать в условиях рынка.

Выбор предприятия розничной торговли с многономенклатурным ассортиментом товаров в качестве объекта исследования для формирования системы управления ассортиментом и запасами интересен, прежде всего, с той точки зрения, что для него в гораздо большей степени актуальны научные основы эффективного управления ассортиментом и товарными запасами. Даже небольшие продуктовые и промтоварные магазины с торговым залом от 30 до 40 квадратных метров, насчитывают до 500 наименований товара, а ассортимент сравнительно малой российской аптеки сегодня составляет не менее 2000-3000 номенклатурных позиций (не только лекарственные средства и товары медицинского назначения, но и различные биологические активные добавки, средства гигиены, товары по уходу за детьми, бытовая химия и косметика, медицинская и бытовая техника, ортопедическая продукция и многое другое).

Целесообразность проведения такого рода исследования для предприятий розничной торговли с многономенклатурным ассортиментом обусловлена требованиями сокращения времени оборота товаров, уменьшения расходов на создание и хранение запасов в условиях удовлетворения спроса покупателей и получения высокой прибыли. Кроме того, в условиях, когда розничная торговля влияет практически на все отрасли народного хозяйства, разработка методов и алгоритмов управления процессом формирования ассортимента и объемов товарных запасов и их планирование становится важ-

нейшей частью проблемы повышения эффективности экономики страны в целом.

Основные аспекты процесса формирования ассортимента продукции, товаров и услуг, а также управления запасами сформулированы и глубоко изучены в работах И. Ансоффа, Дж. Букана, Г. Вагнера, Э. Кенигсберга, А. Кофмана, Н. Прабху, М. Портера, Т. Саати, Т. Уайтина, Дж. Хедли, Ф. Хэнс-сменна, Дж. Шрайбфедера.

Расширить теоретический инструментарий, используемый в настоящее время при управлении ассортиментом и товарными запасами позволили теории, вклад в разработку которых внесли Л.В. Канторович, В.А. Лотоцкий, А.С. Мандель, В.А. Сакович, А.А. Первозванский, Г.В. Рубальский, Ю.И. Рыжиков, Н.Д. Фасоляк, Г.И. Феклисова, О.В. Чкалова.

Однако до сих пор управление ассортиментом товаров в розничной торговле рассматривалось отечественными и зарубежными исследователями отдельно от задачи управления товарными запасами. Отвечая на вопросы, когда запасы подлежат пополнению и каковы объемы пополнения запаса, теория управления запасами не касалась вопроса о том, какие наименования товаров целесообразно иметь торговому предприятию. Хотя, очевидно, что система управления товарными запасами тесно связана с ассортиментной политикой торговой организации, оказывающей как прямое, так и опосредованное влияние на общие финансовые результаты торгового предприятия.

Все выше перечисленное составляет актуальность исследований в области управления ассортиментом и товарными запасами, а также необходимость выработки механизмов по их оптимизации.

В этой связи, целью работы является повышение эффективности функционирования предприятий розничной торговли за счет совершенствования методов и моделей определения оптимального ассортимента и наилучшей стратегии управления товарными запасами, которые учитывают вероятностный характер спроса и легко реализуются на ЭВМ.

Актуальность исследования определила постановку и решение следующих задач:

- определить роль и место ассортимента и товарных запасов в деятельности предприятий розничной торговли;
- дать оценку существующих методов составления ассортимента и управления запасами и перспектив их применения для предприятий розничной торговли с многономенклатурным ассортиментом;
- разработать систему взаимосвязанных моделей нахождения оптимального ассортимента товаров и оптимизации управления товарными запасами для различных условий функционирования торговых предприятий, способные эффективно функционировать в условиях неопределенности и большой динамики рынка;
- апробировать предложенные модели и методы управления ассортиментом и товарными запасами на предприятиях розничной торговли.

Работа состоит из введения, четырех глав и краткого изложения основных результатов, содержит 158 страниц машинописного текста, в том числе 16 рисунков и 15 таблиц, список литературы из 133 наименований.

Первая глава посвящена системному анализу задачи нахождения оптимального ассортимента и управления запасами в розничной торговле. Показана роль товарных запасов в розничной торговле, проведен сравнительный анализ задачи управления запасами в розничной торговле в условиях плановой и рыночной экономики. Отмечено, что и в том, и другом случаях преобладают эвристические методы управления товарными запасами, которые в целом вносят негативный элемент в процесс управления товарными запасами.

В то же время, очевидно, что в области формирования ассортимента и управления товарными запасами имеется альтернатива. Во множестве вариантов товарного ассортимента и стратегий управления запасами всегда существует вариант, при котором тот или иной показатель функционирования

торгового предприятия достигает максимума или минимума. Поскольку основным ориентиром для торговых предприятий является прибыль, то появляется возможность сформировать такой ассортимент товаров и стратегию управления запасами, при которых прибыль торгового предприятия максимальна.

Очевидно, что для эффективного функционирования торгового предприятия становится необходимым научный подход к управлению товарными запасами, обеспечивающий торговому предприятию прибыль и рентабельность. Такие задачи могут быть решены лишь с помощью математических методов и моделей, в основу которых положены методы оптимизации и теории принятия решений.

Вместе с тем, обзор работ показал, что разработанные методы и модели формирования ассортимента и стратегии управления запасами построены, главным образом, из предположения о детерминированном спросе, т.е. когда спрос заранее известен, а в тех случаях, когда учитывается вероятностная природа спроса, модели сложны и зачастую непригодны для решения практических задач.

В завершении главы определена цель и поставлены задачи исследования.

Вторая глава посвящена разработке методов, моделей и алгоритмов нахождения оптимального ассортимента товаров в условиях случайного спроса, при котором обеспечивается максимальная прибыль торгового предприятия. Предложена математическая модель задачи нахождения ассортимента товарных запасов, в которой реализована вероятностная оценка эффективности ассортимента, где модель задачи основывается на располагаемой информации о законах и параметрах распределения спроса на товары, а решение задачи оптимизации состоит в максимизации математического ожидания целевой функции на определенном интервале времени. В качестве целевой функции эффективности структуры товарных запасов используется

прибыль торгового предприятия, являющаяся наиболее естественным и четким измерителем эффективности торгового предприятия как экономической системы. Особенностью поставленной оптимизационной задачи является то, что она содержит нелинейную сепарабельную целевую функцию и линейные ограничения, что относит ее к классу задач нелинейного программирования. Предложен эффективный алгоритм кусочно-линейной аппроксимации нелинейной сепарабельной целевой функции, позволяющий свести нелинейную задачу к задаче линейного программирования, легко реализуемой на ЭВМ.

В третьей главе на основе теории массового обслуживания приведено математическое описание двух моделей управления запасами. Модель с непрерывным пополнением запасов может найти эффективное применение для нахождения оптимальной стратегии пополнения запасов в торговых организациях, когда невыгодно заказывать товар крупными партиями, а выгоднее штучное пополнение, но с широким ассортиментом. Модель пополнения запасов партиями пригодна для широкого круга задач управления запасами, в которых приходится иметь дело с групповыми поставками.

Для системы с непрерывным пополнением товарных запасов найдены точные аналитические выражения для расчета вероятностей дефицита товаров и среднего числа товаров в системе массового обслуживания, а для системы с пополнением запасов партиями найдены приближенные выражения для расчета вероятностей дефицита товаров и среднего числа товаров в системе обслуживания.

Полученные аналитические и приближенные выражения для вычисления параметров системы массового обслуживания товарными запасами позволили сформировать критерии оптимальности, поставить задачи управления товарными запасами и найти оптимальные стратегии управления.

В четвертой главе приведены модели и алгоритмы поддержки принятия решений, необходимые для практической реализации разработанных в работе методов и моделей. Показано, что одним из определяющих условий при

разработке системы управления ассортиментом и товарными запасами является автоматизация процессов поддержки принятия решений, позволяющая минимизировать трудоемкость обработки данных и отрицательное влияние человеческого фактора. Предложена информационно-логическая модель поддержки принятия решений, которая графически отображает логическую структуру решения задачи управления ассортиментом и товарными запасами.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты проведенного исследования.

ГЛАВА 1

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АССОРТИМЕНТОМ И ЗАПАСАМИ В РОЗНИЧНОЙ ТОРГОВЛЕ

1.1. Роль ассортимента и запасов в розничной торговле

Ассортимент товаров – это вся совокупность товаров, реализуемых торговым предприятием, включающая перечень видов и соотношение различных видов товаров в торговом предприятии, различающихся по отдельным признакам [110].

Широкий ассортимент позволяет удовлетворить потребности различных покупательских сегментов по одному виду товаров и в предлагаемом диапазоне цен, а также стимулировать совершение покупок в одном месте. Однако одновременно он требует вложения ресурсов и знаний в различные категории товаров.

Ассортимент – это не номенклатура товаров. Номенклатура буквально означает перечень наименований. Продавец может предлагать покупателям товары одного или многих производителей, привлекая номенклатуры товаров каждого производителя в полном объеме или частично. Номенклатура может иметь укрупненный характер. Так, в универсальном магазине могут продаваться товары бытовой и электронной техники, мужская, женская и детская одежда и т.п. По существу – это ассортиментные группы, а номенклатура представляет собой перечень ассортиментных групп.

Традиционно под управлением ассортиментом (товарно-ассортиментной политикой) понимается деятельность по нахождению номенклатуры товаров и товарных групп, пользующихся наибольшим спросом на рынке и обеспечивающих экономическую эффективность деятельности торговых предприятий в целом [110].

Основными целями формирования ассортимента в торговых организа-

циях являются:

- 1) удовлетворение спроса потребителей;
- 2) оптимизация экономических показателей деятельности предприятия.

Управление товарным ассортиментом является важнейшей функцией в деятельности каждого торгового предприятия. Неоптимальная структура ассортимента приводит к сокращению прибыли, потере своих ключевых позиций на рынке и, следовательно, – к понижению экономической стабильности предприятия.

Планирование ассортимента товаров является «точкой старта» для разработки других планов: финансовый, план по управлению персоналом, по логистике и т.д. Поэтому эффективность функционирования предприятия во многом зависит от используемых подходов планирования товарного ассортимента.

Товарные запасы в розничной торговле представляют собой товары разных наименований, находящихся «в каналах сферы обращения, предназначенную для продажи и служащую для удовлетворения спроса потребителей» [69, 94]. Любой товар относится к товарным запасам вплоть до момента продажи.

В розничной торговле товарные запасы «играют роль многоаспектного фактора, влияющего на конечные результаты деятельности любого предприятия или фирмы, обеспечивая устойчивость их функционирования в условиях конкурентной среды. Товарные запасы являются важным элементом ресурсного потенциала торгового предприятия, составляя значительную часть его активов. Для обеспечения непрерывности процесса обращения товаров необходимо, чтобы часть товарных ресурсов постоянно находилась в состоянии товарного запаса» [69, 94].

Формирование товарных запасов связано со значительными финансовыми затратами торгового предприятия, а их общее количество говорит о

экономических возможностях предприятия. Поэтому структура и уровень товарных запасов показатель состояния «здоровья» любого предприятия, фирмы.

В рыночных условиях торговые предприятия вынуждены идти на создание товарных запасов. Главным фактором этого является извлечение прибыли от продаж товара именно тогда, когда на него имеется спрос. Кроме того, запас направлен на обеспечение непрерывности обращения товаров между очередным пополнением запасов.

Следующим важным фактором является возможность увеличения объема продаж и прибыли за счет некоторого запаса товаров, который можно предложить потребителю. Даже при нерегулярном производстве товарный запас позволит обеспечить регулярное потребление товара.

При наличии большого количества товаров у предприятия появляется возможность получения дополнительной прибыли за счет снижения оптовой цены. Именно запас товаров обеспечивает это преимущество.

Необходимость создания запасов связано также с условиями транспортировки товаров. Многие товары не выгодно транспортировать малыми партиями, поэтому зачастую доставку товарных запасов осуществляют в больших количествах. Кроме того, товарный запас гарантирует стабильность функционирования предприятия при возникновении перебоев в поставках.

Таким образом, даже при появлении случайных или непредвиденных факторов, связанных с изменением покупательского спроса, нарушением сроков поставки товара, отсутствии финансов для пополнения товаров – запас служит гарантией непрерывности товарного обращения.

В то же время избыток товарного запаса может стать источником чистых потерь. Излишние запасы приводят к замораживанию оборотных средств, росту товарных потерь, увеличению издержек, связанных с хранением, страховкой или списанием товаров по достижению предельного срока годности, снижению эффективности использования материальных ресурсов.

Таким образом, правильное планирование и управление товарными запасами становится жизненно необходимым для успешного функционирования торговых предприятий.

Многообразие реальных ситуаций обуславливает необходимость решения множества разнообразных задач управления запасами. В теории управления запасами, это множество группируется по таким признакам, как система снабжения, спрос, издержки, ограничения, стратегия определения запаса, моменты подачи и размера заказа, количество подаваемых заказов (одноразовые или многократные) и т.д.

Очевидно, что для эффективного функционирования торгового предприятия становится необходимым научный подход к управлению товарными запасами, позволяющий находить оптимальные структуру и уровень товарных запасов в постоянно меняющихся условиях, связанных с «турбулентностью» рынка, и обеспечивать торговому предприятию прибыль и рентабельность.

1.2. Практика управления ассортиментом и товарными запасами в розничной торговле

Чтобы проанализировать сложившийся механизм управления ассортиментом и товарными запасами в розничной торговле следует сравнить движение товаров в логистическом канале «склад – магазин» в условиях плановой и рыночной экономики.

Для торгового хозяйства СССР была характерна складская форма движения товаров, когда товары с предприятий в магазины (розничную сеть) поступали только через оптовое звено – оптовые базы, которые диктовали свои условия розничной торговле, не создавая экономической ответственности и заинтересованности в развитии розничного товарооборота.

При наличии на оптовых базах двух видов товарооборотов: внешнего и внутрисистемного сотрудники склада были заинтересованы, в первую очередь, в перевыполнении плана внешнего товарооборота. Стараясь как можно быстрее реализовать имеющуюся продукцию отдавали ее в магазины часто в количествах, превышающих указанные в заявках, что приводило к затовариванию товара в одних магазинах и дефициту в других.

В розничной торговле заказы на товары устанавливал заведующий магазином, при этом номенклатуру и количество товаров он определял зачастую интуитивно, исходя из опыта своей работы.

Товары доставлялись в магазины двумя путями: централизованно или децентрализованно. При наличии достаточного количества автомашин на оптовой базе доставка товаров производилась централизованно. Она позволяла складу быстро, регулярно, и ритмично снабжать магазины необходимыми товарами. При централизованной доставке товаров улучшалось обслуживание населения, так как заведующий магазином не выезжал за товаром. Это особенно важно было для магазинов сельской местности, где выезд за товаром фактически приводил к закрытию магазина в этот день. Сосредоточение транспорта на оптовых базах и более высокая степень централизации доставки товаров считалась наиболее целесообразной формой снабжения предприятий розничной торговли. Но не на всех складах количество автомашин было достаточным, чтобы в полном объеме обеспечить доставку товаров в магазины. Поэтому практиковалась и децентрализованная доставка с использованием транспорта магазинов и других учреждений.

Опыт внедрения методов управления ассортиментом и товарными запасами на основе математических методов и моделей был чрезвычайно мал. В условиях плановой (директивной) экономики методы управления ассортиментом и товарными запасами в розничной торговле не имели шансов на практическое применение по целому ряду причин. Работа торговых предприятий и организаций была ориентирована в первую очередь на то, чтобы уро-

вень товаров не отклонялся от установленного норматива, особенно в сторону его превышения. В ускорении оборачиваемости товаров не было заинтересованности в силу низких затрат на хранение и содержание складских помещений, а также низкой ставки по кредитам на закупку товаров. Товары, поставляемые из государственных ресурсов, распределялись директивно, а товары из местных ресурсов реализовывались с фиксированным уровнем цен.

Основным критерием эффективности работы торгового предприятия было качество обслуживания вне связи с экономической эффективностью деятельности самого предприятия. В условиях плановой экономики торговые предприятия не могли влиять на ассортимент, на соотношение между оптовыми и розничными ценами (между ценами закупки и ценами реализации), на время и размер партии поставки. Цены устанавливались директивно, регламентация взаимоотношений между торговым предприятием и промышленностью не обеспечивала многовариантности.

Переход от централизованного управления экономикой к рыночным условиям хозяйствования разрушил государственную систему управления предприятиями и один из ее элементов: систему управления ассортиментом и запасами, основу которого составляло нормирование запасов.

В условиях отсутствия централизованного распределения товаров, у предприятий розничной торговли появилась возможность самостоятельного планирования ассортимента и товарных запасов, необходимых для осуществления торговых операций, получении соответствующего финансового результата, повышения надежности функционирования предприятий. Изменилась инфраструктура и оптовой торговли, нет теперь оптовиков-монополистов, на базе бывших оптовых баз образовались многочисленные акционерные общества и коммерческие структуры, что привело к многовариантности в задачах формирования ассортимента и пополнения товарными запасами. У предприятий розничной торговли, в отличие от системы нормиро-

ванного обеспечения товарами, появилась возможность самостоятельно выбирать поставщиков, устанавливать цену на товар, отдавать предпочтение тем или иным формам и методам управления.

Рассматривая действующую в рыночных условиях систему управления ассортиментом и товарными запасами, следует заметить, что деятельность торговых предприятий становится достаточно эластичной и многовариантной и сводится к следующему:

- возможность выбора источников и форм товарного обеспечения, необходимых для формирования запаса, то есть товары могут приобретаться децентрализованно по прямым договорам в оптовых торговых организациях, зарубежных фирмах, через товарные биржи, торговые дома;

- самостоятельность в разработке и осуществлении определенной политики в области формирования ассортимента, ориентированной на спрос при одновременной минимизации собственных затрат;

- возможность самостоятельно устанавливать цены на реализуемые товары;

- осуществление самостоятельной политики в области ресурсосбережения и сокращения издержек;

- стремление к достижению максимально возможной оборачиваемости товаров и средств, вложенных в них с целью увеличения прибыли;

- оперативность реагирования системы управления запасами на требования рынка в целом и на индивидуальные потребности отдельных покупателей и их платежеспособность.

В современных условиях принятие экономически обоснованных решений требует глубокого знания конъюнктуры торговли, то есть сложившихся в определенное время условий деятельности предприятий и организаций, вызванных колебаниями спроса и предложения.

В то же время, как свидетельствует хозяйственная практика, торговые предприятия редко используют современные методы управления ассорти-

ментом и запасами: одни предприятия уделяют внимание только поставкам, другие поискам выгодных поставщиков товаров, а большая часть розничных предприятий лишь поддерживают определенное количество товарных запасов по отношению к товарообороту. Большинство операций, связанных с формированием ассортимента и управлением запасами, как правило, выполняются вручную. ЭВМ для обработки данных в магазинах розничной торговли, особенно в так называемых «у дома», используются редко. Сотрудники магазинов, как правило, не знакомы со сложными математическими вычислениями. Эти обстоятельства накладывают дополнительные ограничения при разработке систем управления запасами в розничной торговле.

Во всех этих случаях преобладают эвристические методы управления ассортиментом и товарными запасами, основанные на опыте и интуиции руководителей торговых предприятий. Если руководитель или экономист хорошо знают условия функционирования предприятия, спланированные ими ассортимент и размеры товарных запасов, как правило, не нарушают стабильность предприятия. Однако массовое применение эвристического метода управления ассортиментом и запасами, основанного только на предыдущем опыте, приводит к дестабилизации работы предприятия и потери прибыли. Субъективная оценка ассортимента и уровня товарных запасов, покупательского спроса, товарооборота в целом, негативно влияет на весь процесс управления торговыми предприятиями.

В то же время, очевидно, что в области формирования ассортимента и управления товарными запасами имеется альтернатива. Во множестве вариантов ассортимента, как и в альтернативах управления запасами всегда существует вариант, при котором тот или иной показатель функционирования торгового предприятия достигает максимума или минимума. Поскольку основным ориентиром для торговых предприятий является прибыль, то появляется возможность сформировать такой ассортимент и уровень запасов товаров, при которых прибыль торгового предприятия максимальна.

Такие задачи могут быть решены лишь с помощью математических методов и моделей, в основе которых положены методы оптимизации и теории принятия решений.

1.3. Развитие формальных методов управления ассортиментом в розничной торговле

Вопросам управления ассортиментом товаров в розничной торговле посвящены работы многих отечественных и зарубежных исследователей.

Методы управления ассортиментом подразделяются на два уровня, на котором осуществляется процесс управления – стратегический и тактический. Стратегический уровень связан с выбором стратегии управления ассортиментом в зависимости от рыночной ситуации. Тактический уровень связан с выбором вполне определенных ассортиментных наименований на основе спроса и экономических показателей по каждому наименованию [7].

В качестве следующего признака классификации используются факторы, влияющие на ассортимент. К ним относятся: факторы, обусловленные рынком; факторы, зависящие от возможностей и ресурсов предприятия. В зависимости от выбранного и выбирается метод управления ассортиментом. Так, маркетологи отвечают за анализ рынка, а за управление ресурсами предприятия и анализ его результативности – планово-финансовая служба. На основании предложенных признаках классификации методы управления ассортиментом товаров, услуг, продукции можно разделить на два больших класса: маркетинговые методы и модели и планово-финансовые оптимизационные модели [7].

Сегодня известно много маркетинговых методов работы по способам формирования номенклатуры товаров (совокупность приемов, применяемых в области управления ассортиментом). Эти методы позволяют анализировать

уровень прибыли, вклад товара в результат работы предприятия, стабильность продаж, время существования продукта и рынка, объем рынка и скорость объема продаж, рыночная привлекательность и эффективность ассортимента, время нахождения товара на рынке [125].

На рис. 1.1 показана классификация маркетинговых методов управления ассортиментом.

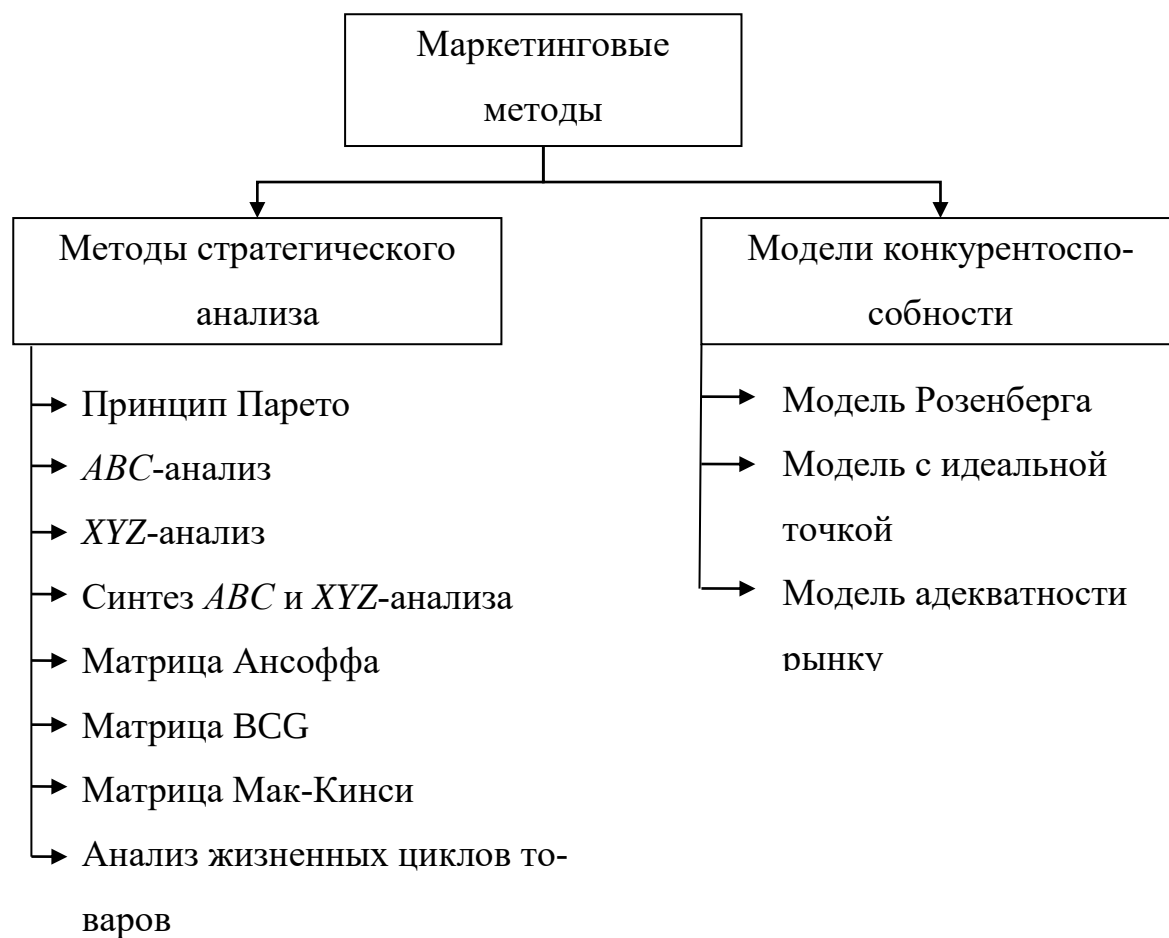


Рис. 1.1. Маркетинговые методы управления ассортиментом

Одним из распространенных приемов по формированию ассортимента является принцип Парето, предложенный в 1906 году [10]. Особенности применения принципа Парето для целей управления ассортиментом разнообразны. В общем виде применительно к торговле это правило гласит: «два-

дцать процентов наименований товаров приносит восемьдесят процентов прибыли и, наоборот, восемьдесят процентов ассортимента товаров приносит лишь двадцать процентов прибыли». На основе такого разделения, могут быть выделены товары, приносящие 80 % прибыли и группа товаров, приносящие остальные 20 % прибыли.

Следующим инструментом работы с ассортиментом является появившийся в конце 40-х годов прошлого столетия *ABC*-анализ, который основывается на принципе Парето [10, 96].

В соответствии с этим подходом вся номенклатура товаров подразделяется три группы товаров – *A*, *B* и *C*, которые отличаются по степени важности и вкладу в общую прибыль или оборот магазина: товары группы *A* – самые значимые товары, которые приносят 50 % прибыли или оборота; товары группы *B* – средние по значимости, приносящие еще 30 % прибыли или оборота; наконец товары группы *C* – прочие товары, приносящие оставшиеся 20 % прибыли или оборота.

Очевидно, что для обеспечения эффективности магазина необходимо в первую очередь контролировать наличие в ассортименте товара группы *A*. По отношению к товарам группы *B* контроль может быть текущим, а по отношению к товарам группы *C* – лишь периодическим.

Следующим инструментом является *XYZ*-анализ, позволяющий анализировать и прогнозировать эффективность продаж всех наименований товаров, колебания спроса на товары и объем потребления ресурсов магазина. Этот прием обычно применяется для ранжирования и группирования ассортиментных позиций по степени прогнозируемости объема спроса или оборачиваемости товара [10, 22].

XYZ-анализ во многом повторяет *ABC*-анализ и основывается на том же принципе Парето: товары подразделяются на три группы – *X*, *Y*, *Z*, исходя из значимости того или иного наименования. Чем выше спрос на товар и чем больший вклад в прибыль обеспечивает тот или иной товар, тем важнее им

управлять. Часто при управлении ассортиментом совмещают *ABC*- и *XYZ*-анализ. позволяет более точно рассмотреть ассортимент и понять, как можно управлять теми или иными группами и категориями товаров. В результате такого совмещения получается уже 9 групп товара, а товар контролируется по двум критериям. С помощью *ABC*-анализа оценивают влияние ассортимента товаров на конечный результат деятельности предприятия (прибыль), а *XYZ*-анализ отвечает за стабильность (прогнозируемость) спроса на товары [10, 22]. Наибольшего внимания и контроля в этом случае заслуживают группы товаров *AX*, *AU* и *AZ*. К группам товаров *BX*, *BU* и *BZ* применяются текущие методы планирования и учета. Для товаров групп *CX*, *CY*, *CZ* достаточно применять укрупненные методы планирования и управления. Такой взгляд на номенклатуру товаров дает более полное представление, а управленческие решения принимают более обоснованный характер.

Еще одной группой стратегических методов анализа ассортимента являются методы, позволяющие формировать альтернативы ассортиментной номенклатуры на основании целевых установок предприятия. Это такие методы как матрица «продукт-рынок» И. Ансоффа [4], ее модификации [56, 126], матрица стратегий М. Портера [86].

Преимущество матриц, с помощью которых задается ассортимент, заключается в том, что они наглядно демонстрируют процесс формирования вариантов ассортиментной номенклатуры. В то же время процесс создания матриц является субъективным процессом, подвержен субъективным влияниям, кроме того матрицы существенно ограничены из-за ограниченного числа переменных.

Назначение следующей группы методов позволяет формировать товарный ассортимент, в первую очередь, исходя из целей предприятия, а не только по отношению к внешней среде. К этой группе относятся матрицы BCG [30, 114], A.D. Little [132], Hofer/Schendel [32, 129], GE/McKinsey [120], Shell/DPM [128].

Матрица BCG впервые была предложена Бостонской консалтинговой группой в конце 60-х годов прошлого столетия. Основными признаками данной матрицы являются динамика роста спроса на товары, доля товара данной фирмы на рынке в общей доле товаров (отношение товаров фирмы к товарам конкурентов), объем вложений в производство товаров, объем прибыли от продажи товаров и т.п. В построенной матрице BCG выделяются четыре основные группы товаров, в зависимости от попадания каждого конкретного товара в тот или иной квадрант матрицы: «дойные коровы», «звезды», «собаки» и «дикие кошки». Для каждой из полученных групп товаров формулируется собственная стратегия [30, 114].

Матрица GE была предложена корпорацией General Electric совместно с консалтинговой фирмой McKinsey & Co в начале 70-х годов XX века. Матрица GE формировалась на основе двух критериев: привлекательность товара и эффективность ассортимента [120]. Главной особенностью построенной матрицы являлось то, что в ней впервые для сравнения учитывались не только конкретные факторы, такие как прибыль или объем продаж, но и такие показатели как волатильность рынка, уровень технологии, качество персонала предприятия и т. д.

Следующей моделью в группе стратегических методов явилась концепция на основе жизненного цикла товара (ЖЦТ). Эта концепция была предложена маркетинговым Теодором Левитом в 1965 г. В соответствии с ней любой товар проходит определенные стадии развития, начиная с его производства, внедрения на рынок, устойчивого роста, морального устаревания и спада [29, 31]. Исходя из того, на какой стадии развития или жизненного цикла находится товар и формируется стратегия управления и сбыта товара.

В работе [110] показано, что формирование ассортимента можно осуществлять на основе анализа коэффициента ранговой корреляции структуры ассортимента. В процессе рангового анализа каждому виду изделия (товара, услуги) присваивают ранг в соответствии с его удельным весом в общем объ-

еме, а также ранги рентабельности. Небольшое отклонение рангов указывает о рациональном ассортименте в хозяйственном отношении. Уровень рациональности ассортимента оценивается коэффициентом корреляции рангов выпуска и ранга рентабельности.

Ряд методов формирования ассортимента построены на основе изучении конкурентоспособности товара [30]. Здесь следует отметить такие модели, как модель Розенберга, модель с идеальной точкой, модель адекватности рынку.

Модель Розенберга построена на потребительской оценке товара с учетом его полезности для конечного потребителя и его запросов.

В отличие от модели Розенберга в модели с идеальной точкой учитывается еще одна компонента или характеристика продукта, называемая идеальной с точки зрения покупателя продукта.

В модели адекватности товара рынку для каждого наименования товаров формируются показатели, характеризующие обеспеченность рынка данным товаром, потребность в выпуске, потраченные на производство товара ресурсы. Далее на основе разработанного коэффициента адекватности рынку рассчитываются три показателя: пожелания потребителей, пожелания фирмы и ее производственные ресурсы. Чем больше отличие коэффициента адекватности от нормативного значения, тем большее несоответствие данной ассортиментной позиции рынку.

Обобщая обзор маркетинговых методов управления ассортиментом можно отметить основные проблемы этой группы методов.

Во-первых, общим недостатком всех перечисленных выше моделей формирования товарного ассортимента является то, что они во многом строятся на субъективных данных и позволяют сформировать ассортимент чаще всего интуитивно, а не на основе использования научных методов.

Во-вторых, данные модели не учитывают взаимосвязь ресурсов предприятия и сформированного ассортимента товаров.

В этой связи особое место среди методов и моделей формирования ассортимента товаров занимают математические методы, которые характеризуются практической направленностью.

Различают детерминированные и вероятностные (стохастические) модели.

Особое место в ряду детерминированных оптимизационных моделей занимают модели задачи линейного программирования (ЛП). Модели задачи линейного программирования применяют для решения широкого круга задач торговой практики, таких как планирование товарооборота; организация рациональных закупок продуктов питания (задача о смесях); замена торгового оборудования; определение ассортимента товаров для торговой базы в силу ограниченной площади хранения; установление рационального режима работы и т.д. [13, 14, 39, 62, 76, 82, 105, 118].

Вопросы, связанные с разработкой оптимального плана продаж методами линейного программирования отражены в работах Г. Вагнера [13], Дж. Моудера и С. Элмаграби [39], А.А. Первозванского [82].

Несмотря на многообразие моделей ассортиментной задачи, все их в общем виде можно свести к следующей.

При заданных объемах ресурсов (труда, издержек обращения, площади торговых залов, поставок товарных запасов и известных нормативах затрат требуется найти такие x_{wj} – объемы товарооборота товара w товарной группы j , при которых прибыль предприятия Z достигает максимума или

$$Z = \sum_{j=1}^n \sum_{w_j=1}^{K_j} (\lambda_{wj} p_{wj} - c_{wj}) x_{wj} \rightarrow \max, \quad (1.1)$$

где λ_{wj} , p_{wj} , c_{wj} – торговая скидка, цена и издержкостоемость товара w товарной группы j соответственно; n – число групп товаров; K_j – число наименований товара в группе j .

Задача (1.1) решается при ограничениях, связывающих объемы ресурсов

и нормативы затрат, следующего вида

$$\sum_{j=1}^n \sum_{w_j=1}^{K_j} a_{lw_j} x_{w_j} \leq b_l, \quad l = \overline{1, L}. \quad (1.2)$$

где a_{lw_j} – норматив затрат издержек торгового предприятия на единицу товара w j -й группы товаров по l -й статье расходов; b_l – величина расходов по l -й статье издержек обращения.

Существуют и другие постановки задачи нахождения оптимального ассортимента [76]:

при заданной плановой величине прибыли и выполнении условий (1.2) определить ассортимент и объемы товарооборота, максимизирующие его объем Q :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{w_j=1}^{K_j} (\lambda_{wj} p_{wj} - c_{wj}) x_{wj} \geq Z, \quad (1.3)$$

$$Q = \sum_{j=1}^n \sum_{w_j=1}^{K_j} p_{wj} x_{wj} \rightarrow \max, \quad (1.4)$$

Модели в постановке задачи (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4) находят широкое практическое применение в случаях, когда спрос является регулярным, например, на продукцию в промышленном производстве. Если же структура спроса не задана или спрос является случайной величиной, как в розничной торговле, то при сложившихся обстоятельствах максимум объемов товарооборота, например, в постановке (1.3), (1.4) может быть получен за счет «выгодных» предприятию, но не пользующихся спросом товаров. Такая ситуация имела место в условиях плановой экономики, когда предприятия перевыполняли план товарооборота, но были затоварены не пользующейся спросом продукцией. Кроме того, практика показывает, что ассортимент товаров, сформированный из предположения о детерминированности спроса, как правило, имеет невысокую эффективность в части нулевой вероятности выполнения плана из-за случайных отклонений фактического спроса на товары от

запланированных значений.

Вероятностные модели ассортиментной задачи рассматривались в работах Г. Вагнера [13], А. Кофмана [62], Дж. Хедли [112], Хэмди А. Таха [105], А.А. Первозванского [82].

На практике такие задачи возникают, например, при снабжении запасными частями подводной лодки. Такую задачу называют «задачей о походном ранце» [13, 112]. Иногда подобные задачи фигурируют под названием «задачи рождественской елки» (сколько елок заказать к рождественским праздникам) [112] или «продавца газет» (сколько газет закупить для киоска на определенный день) [62].

Сформулируем задачу «о походном ранце» [112]. Нужно определить количество и типы запасного оборудования для атомной подводной лодки, которые следует взять на борт на время патрулирования. Предполагается, что для времени патрулирования известно распределение объема требований (спроса) на запасное оборудование. Объем отсеков для хранения запасного оборудования на подводной лодке строго ограничен. Задача сводится к минимизации средних издержек, связанных с дефицитом запасных частей.

По сравнению с детерминированными моделями использовать вероятностные (стохастические) модели значительно сложнее. Во-первых, возникают трудности концептуального характера, связанные с интерпретацией самого понятия «вероятность» и с определением критерия оптимальности. Во-вторых, появляются дополнительные трудности, обусловленные особенностями математического аппарата, используемого для решения стохастических задач. Кроме того, в стохастических моделях целевые функции, как правило, являются нелинейными, и, следовательно, задача оптимизации носит более сложный характер.

1.4. Развитие формальных методов управления товарными запасами

Зарождение математической теории управления запасами относится к началу прошлого столетия. Первые системы управления запасами были разработаны применительно к запасным частям промышленных предприятий [127, 132]. При разработке систем предполагалось, что спрос на продукцию известен с достаточной степенью точности.

Первая математическая модель, оптимизирующая затраты была представлена в работе Ф. Харриса [127]. Если интенсивность реализации продукции равна S ед/год, объем партии продукции, поставляемой одномоментно для пополнения запаса – Q , затраты на выпуск продукции – A , себестоимость одной единицы продукции – v долл., а стратегия управления состоит в том, чтобы на каждый вложенный в запасы доллар в год получать отдачи r долл., то экономичный размер заказа равен

$$Q = \sqrt{\frac{2AS}{rv}}. \quad (1.5)$$

Харрис показал, что ошибки в оценке любого из входящих в формулу (1.5) параметров не будут серьезно влиять на эффективность практического использования формулы. Если фактически заказанный объем продукции находится в пределах $\pm Q/\sqrt{2}$, то общие годовые затраты будут менее чем на 6 % превышать минимальное значение. Это связано с тем, что в окрестности точки оптимума кривая общих затрат довольно пологая [39].

Первая книга, содержащая систематизированное изложение простейших моделей управления запасами появилась в 1931 году [132].

Интерес к данной теме не угасает до сих пор. Теория управления запасами зародилась как отрасль математики и переросла в практически значимую проблему на уровне как математики и экономики в целом, так и рамках каждой конкретной бизнес-единицы.

Все исследования в области теории управления запасами можно разде-

лить на два основных направления.

Первое направление – эконометрическое [109], основная идея которого сводится к производственным и нормативным компонентам запасов, которые подсчитываются в предположении детерминированности спроса и процесса снабжения. Это направление исследований имеет, в большей мере, практический характер. Для выявления основных тенденций используются методы экономического анализа: индексный, цепных подстановок, графический и другие [69, 109]. Например, принято считать, что эффективный товарооборот будет обеспечен товарными запасами в достаточной степени, если запланировать увеличение товарных запасов в размере равном корню квадратному из темпов роста покупательского спроса (товарооборота) [109]. В общем виде эти тенденции можно выразить соотношением:

$$T_z = \sqrt{T_o}, \quad (1.6)$$

где T_z – темп роста запасов; T_o – темп роста товарооборота.

Так, если предполагается увеличение спроса на какой-либо товар или группу товаров, то прогнозируемый запас этих товаров должен возрасти на величину, равную корню квадратному из темпа роста товарооборота данного товара или группы товаров.

С помощью метода, основанного на соотношении темпов роста товарооборота и товарных запасов рассчитывается товарооборачиваемость и другие показатели деятельности торговых предприятий.

Или еще один подход к прогнозированию товарных запасов в рамках данного направления [69]. Согласно [69] доля прироста товарооборота определяется по формуле:

$$\Delta T_u = \left(1 - \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta T}\right) \cdot 100, \quad (1.7)$$

где ΔT_u – доля прироста товарооборота за счет интенсивного фактора; $\Delta \mathcal{E}$ – процент прироста суммы товарных запасов; ΔT – процент прироста товаро-

оборота.

Откуда процент прироста суммы товарных запасов выражается следующей формулой:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{\Delta T \cdot (100 - \Delta T_u)}{100}. \quad (1.8)$$

Так, если предполагается в будущем году обеспечить определенный процент прироста товарооборота за счет ускорения оборачиваемости средств, вложенных в товарные запасы, то зная темп прироста товарооборота можно рассчитать темп прироста суммы товарных запасов на будущий период.

Во втором, теоретико-управленческом направлении, ставшем преобладающим, не делается различия между детерминированными и стохастическими составляющими запасов. Основное место в теоретико-управленческом подходе стали занимать экономико-математические модели, приемы математической статистики и методы кибернетики.

Определяющим фактором в задачах управления запасами является спрос на запасы. В тех случаях, когда спрос на запас (товар) в единицу времени достоверно известен, применяются детерминированные модели управления запасами.

Наиболее известным выражением для определения товарных запасов в условиях известного спроса является формула Уилсона [11, 39, 87, 95]:

$$Q = \sqrt{\frac{2C_1 S}{C_2}}, \quad (1.9)$$

где S – спрос на товар на горизонте управления; C_1 – затраты на выполнение заказа; C_2 – затраты на хранение единицы товара на горизонте управления.

Действительно, если C_1 – затраты на выполнение заказа, а Q – размер партии заказанного товара, то издержки выполнения заказа в расчете на единицу товара составляют C_1/Q . Общие же издержки выполнения заказа на

горизонте управления составляют $C_1 S / Q$ (где S / Q – число заказов на горизонте управления). Очевидно, что при увеличении размера партии Q издержки выполнения заказа уменьшаются.

Если C_2 – затраты на хранение единицы товара на горизонте управления, то при постоянной интенсивности спроса на товары общие затраты на хранение запасов товаров на горизонте управления составят $C_2 Q / 2$. Из последней формулы видно, что с увеличением размера партии Q общие издержки хранения линейно возрастают.

Оптимальным числом заказов Q является число Q^* , минимизирующее выражение

$$\frac{C_1 S}{Q} + \frac{C_2 Q}{2}. \quad (1.10)$$

Чтобы найти оптимальное значение Q^* возьмем первую производную выражения по Q и приравняем ее нулю, откуда получим равенство

$$-\frac{C_1 S}{Q^2} + \frac{C_2}{2} = 0, \quad (1.11)$$

откуда

$$Q^* = \sqrt{\frac{2C_1 S}{C_2}} \quad (1.12)$$

В точке экстремума – минимум, так как вторая производная положительна.

Формула Уилсона пригодна лишь для идеального случая, когда спрос на товары S заранее известен, уровень запасов уменьшается с постоянной интенсивностью, и как только он достигает нуля, немедленно поступает новая партия товаров размером Q . Такого в практике управления товарными запасами обычно не встречается. В торговых организациях приходится регулярно сталкиваться с проблемами задержки времени между заказом партии и моментом его подачи. Кроме того, фактический спрос на товары часто не сов-

падает с прогнозируемым, возникает дефицит товара, либо имеет место затоваривание торговых организаций. Кроме того, формула Уилсона не учитывает потери, связанные с дефицитом запасов. Тем не менее формула Уилсона легла в основу определения товарных запасов в целом ряде работ отечественных и зарубежных исследователей [103, 119]. Так, в работе [103] приводится модель управления запасами с многономенклатурным заказом на основе модификации формулы Уилсона. Модель обладает допущениями, свойственными однопродуктовой модели, что накладывает много ограничений практического характера, без которых достоверность расчетов по данной формуле вызывает сомнения.

Однако очевидно, что в задачах управления товарным запасом нельзя точно предсказать спрос на товары. Следовательно, детерминированные модели управления запасами в таком случае теряют определенность. Некоторые специалисты [11, 90] пытались адаптировать детерминированную модель управления запасами для учета вероятностной природы спроса, используя приближенные методы, основанные на существовании постоянного буферного резерва на протяжении планового периода. Размер резерва устанавливается таким образом, чтобы вероятность истощения запаса в течение периода пополнения запаса (интервала времени между моментом размещения заказа и его поставкой) не превышала наперед заданной величины.

Стало очевидным, что для эффективного управления запасами и определения оптимальных стратегий управления запасами необходимо учитывать вероятностную природу спроса. Одной из первых вероятностных моделей управления запасами стала модель Дж. Хедли и Т. Уайтина [112].

Эта модель позволяет определить оптимальные значения точки заказа R и размера заказа q с учетом случайного характера спроса за время выполнения заказа исходя из минимизации суммы трех видов издержек: затрат на оформление заказа C_1 , затрат на хранение запаса на складе C_2 и потерь от

дефицита продукции C_3 . Общие издержки системы управления запасами в единицу времени $C_{общ}$, рассчитываемые по этой модели, имеют вид:

$$C_{общ}(R, q) = C_1 + C_2 + C_3 \rightarrow \min, \quad (1.13)$$

$$C_1(q) = K \cdot \mu / q, \quad (1.14)$$

$$C_2(R, q) = h \cdot (q/2 + R - M\{x\}), \quad (1.15)$$

$$C_3(R, q) = S \cdot \rho \cdot \mu / q, \quad (1.16)$$

где K – затраты по оформлению заказа, ден.ед./партию; μ – математическое ожидание интенсивности спроса в единицу времени, нат.ед.; q – размер заказа, нат.ед.; h – затраты по хранению единицы продукции на складе в единицу времени, ден.ед.; R – точка заказа, нат.ед.; x – значение интенсивности спроса за время выполнения заказа, нат.ед.; $M\{x\}$ – математическое ожидание интенсивности спроса за время выполнения заказа, нат.ед.; S – средний размер дефицита продукции в цикле, нат.ед., который определяется как

$$S = \int_R^{x_{\max}} (x - R) \cdot f(x) dx, \quad (1.17)$$

где $f(x)$ – плотность вероятности интенсивности спроса за время выполнения заказа, доли ед.; $x_{\max}$ – максимальное теоретическое значение интенсивности спроса в единицу времени, нат.ед.

Одной из задач практической реализации этой модели является вычисление среднего размера дефицита продукции в цикле S для различных вариантов распределения интенсивности спроса за время выполнения заказа. Проблема заключается в том, что точное значение S может быть получено только для простых теоретических законов распределения, имеющих точную аналитическую запись функции распределения. Например, для таких как равномерный или экспоненциальный законы. В случае же более сложных теоретических распределений интенсивности спроса (нормального, логнормального и т.п.), которые имеют не меньшее распространение на практике,

значение дефицита продукции в цикле S аналитическим методом может быть рассчитано лишь приближенно [33].

Если же интенсивность спроса на продукцию не соответствует известным теоретическим законам и характеризуется эмпирическим распределением, то применение формулы (1.17) без дополнительных преобразований вообще невозможно.

Вероятностные модели управления запасами получили распространение в работах Дж. Букана и Э. Кенингсберга [11], Г. Вагнера [13], А. Кофмана [62], Н. Прабху [87], Т. Саати [95], Хэмди А. Таха [105], Ф. Хэнсменна [115], Дж. Шрайбфедера [123], В.А. Лотоцкого и А.С. Мандель [69], В.А. Саковича [97], А.А. Первозванского [82], Г.В. Рубальского [90-92], Ю.И. Рыжикова [93, 94], Н.Д. Фасоляк [109], Г.И. Феклисова [111].

Эти вероятностные модели достаточно разнообразны, они различаются как составом учитываемых издержек (с учетом или без учета дефицита, инфляции, скидок, потерь от порчи товара, естественной убыли, налогов на запасы и т.п.), так и условиями применения (например, с потерями неудовлетворенных требований или без их потерь, с периодическим или непрерывным контролем уровня запасов) и составом определяемых переменных, таких как размер заказа, точка заказа, интервал между поставками. В то же время анализ работ показывает, что, как правило, модели учитывают случайный характер лишь одной из наиболее важных характеристик системы управления запасами – интенсивности спроса на продукцию, распространяются лишь на один продукт или товар, являются статическими. Однако существенное ограничение к практическому применению однопродуктовых моделей к практическому применению для случая многономенклатурных запасов известно и заключается в их непригодности для решения задач синтеза стратегий управления в условиях случайного спроса и поставок [104]. Первозванский А.А. [82] доказывает оптимальность двухуровневых стратегий (для случая двух товаров). Однако он же и предупреждает, что даже в любом частном случае

практическое применение данного класса стратегий крайне затруднено методическими и вычислительными трудностями.

В современных научных трудах [12, 16, 37, 51, 52, 65, 77, 116, 117] также отсутствует доступное широкому пользователю решение этой задачи. В отдельных источниках [12, 37, 77] несмотря на то, что при определении параметров управления запасами производится учет случайного характера спроса (в том числе и по сложным законам распределения), однако ставится задача его удовлетворения с определенной степенью вероятности за счет страхового запаса.

Заслуживает внимания и исследование, проведенное в [116, 117], в котором для различных стратегий управления запасами разработаны аналитические формулы расчета оптимальных значений точки и размера заказа, учитывающие нестохастическую неопределенность в данных и основанные на интервальном задании значений спроса. Однако, такой подход не позволяет учесть вероятность принятия случайной величиной (интенсивностью спроса или поставок) различных значений из заданного интервала, а следовательно, его применение оправданно лишь в условиях отсутствия этой информации, например, на стадии проектирования объекта. Для реально же существующих систем, относительно которых возможен сбор статистической информации, в случае невозможности подбора теоретического закона, достаточно точно характеризующего распределение случайных параметров модели управления запасами, на наш взгляд, вместо интервального способа задания возможных значений этих параметров целесообразно использовать их эмпирические распределения [33].

Рядом авторов [16, 38, 51, 52, 65] задача, управления запасами решается при случайном спросе (в том числе и для нормального закона распределения спроса) методом имитационного моделирования. Многие трудности в области управления запасами устраняются при использовании имитационного моделирования, значительно упрощается получение решения, однако ав-

торами не приводятся математические выражения и закономерности для расчета оптимальных значений параметров системы управления запасами, решения носят частный характер, что препятствует широкому практическому применению в реальных условиях хозяйствования.

В работах [11, 57, 130, 131] ситуации управления запасами рассматриваются как задачи массового обслуживания – не только в том смысле, что покупатели могут простаивать в очереди за товарами, но и в том смысле, что товары, ожидающие клиентов, также образуют очереди. Если клиенты отсутствуют, то запасы товаров увеличиваются. Если нет очереди товаров (нет запасов), то покупатели не обслуживаются.

Ситуации массового обслуживания (или аналогичные им) встречаются также при рассмотрении вопросов обеспечения запасными частями, например, самолетов или грузовых автомобилей. Имеется некоторое число действующих механизмов (например, двигателей), некоторое число запасных двигателей и мастерская для ремонта неисправных двигателей. Поток запасного оборудования можно рассматривать как ситуацию массового обслуживания, когда двигатели ожидают ремонта, запасные механизмы ожидают использования, а автомобили ожидают исправные запасные двигатели.

Таким образом, большое число задач управления запасами можно проанализировать с помощью теории массового обслуживания или связанных с ней процессов. Наряду с другими вопросами можно рассматривать создание запасов промежуточных продуктов, необходимых для работы производственной линии, а также управление запасами громоздких или дорогостоящих предметов в магазине розничной торговли.

Если классифицировать исследования в области управления запасами по типам и видам моделей и методов для их решения можно увидеть следующие тенденции:

- использование методов математического программирования в управлении запасами [2, 5, 8, 13, 14, 24, 39, 41, 42, 44, 62, 76, 82, 105];

- развитие стохастических моделей и статистических методов управления запасами [6, 13, 33, 39, 42, 43, 45, 54, 62, 76, 82, 105, 107];
- распространение адаптивного подхода и методов управления по неполным данным [11, 72-75, 104];
- использование методов теории игр в управлении запасами [16];
- исследование многономенклатурных систем управления запасами с коррелированным спросом [69, 110];
- исследование замкнутых по спросу систем управления запасами [11];
- развитие методов имитационного моделирования для анализа и оптимизации систем управления запасами [16, 34, 38, 51, 52, 65];
- обеспечение запасами с помощью задачи массового обслуживания [11, 28, 43, 45, 49, 57, 130, 131].

Кроме математических моделей разрабатывались и стратегии управления запасами. Известность получили стратегии с фиксированным размером заказа, с фиксированным интервалом между заказами, с двумя контрольными размерами запасов и с фиксированным периодом между заказами, с двумя контрольными размерами запасов без фиксированного периода между заказами и «точно в срок» [11, 69, 87].

При стратегии с фиксированным размером заказа размер каждой партии постоянен, а каждая новая поставка осуществляется с разной периодичностью. Заявка на поставку новой партии производится при достижении критического уровня запаса, который называется «точкой заказа». Регулируемыми переменными при такой стратегии являются «точка заказа» и объем партии заказа.

Стратегия с фиксированным размером заказа эффективна для важных и ответственных запасов и предусматривает усиленный контроль за наличием запасов, при котором может быть обеспечен более быстрый ответ на возможность исчерпания запаса. В качестве недостатка этой стратегии часто называется требование обязательного учета запасов на складе, с тем, чтобы вовремя

сделать заказ и не упустить критический уровень запасов.

Для стратегий с фиксированной периодичностью заказа товар заказывается через равный интервал времени, а объем запаса корректируется за счет изменения размера партии. Размер партии товара считается равным разности между установленным максимальным уровнем запаса, до которого производится пополнение, и реальным его объемом в момент заказа. Регулируемыми переменными в данной системе являются плановый(максимальный) уровень запаса и период времени между заказами, который называется периодом планирования.

Преимуществом такой стратегии является отсутствие требования постоянного учета запаса, а недостатком – необходимость производить заказ маленькими партиями, а при слишком интенсивном спросе возможен дефицит запаса до наступления следующего момента заказа.

В стратегии с двумя контрольными размерами запасов и с фиксированным периодом между заказами размер запасов контролируется как сверху, так и снизу. Регулируемыми переменными в данной стратегии являются максимальный уровень запасов и нижний уровень заказа. При снижении запаса до точки заказа до окончания фиксированного периода между заказами, возможна новая заявка на пополнение. А в остальном данная стратегия повторяет стратегию с фиксированным периодом заказа.

Стратегия с двумя контрольными размерами запасов без фиксированного периода заказа – заказ поступает в момент, когда объем запаса достигает точку заказа. Фиксирование интервала времени между заказами и размера партии в этой системе не производится.

При стратегии «точно в срок» (Just in Time, JIT) заказ товаров осуществляется на длительный период заранее с фиксированным размером запаса в каждой партии и четким графиком поставки. Запасы создаются только на конкретные дни реализации.

Следует отметить, что все перечисленные стратегии управления запаса-

сами используются лишь для простых моделей и мало пригодны для управления сложными системами с многономенклатурным ассортиментом. Во-первых, они разработаны для условий, которые труднодостижимы в розничной торговле: постоянный темп потребления запасов, фиксированный интервал времени, необходимый на выполнение заказа на восполнение запасов, фиксированная задержка времени выполнения заказа на восполнение запасов. Во-вторых, рассмотренные стратегии управления запасами направлены лишь на управление запасами, но совершенно не учитывают ассортимент.

Завершая обзор теоретико-управленческого подхода к управлению запасами, следует отметить что это направление, в большей мере, имеет теоретический характер. Непосредственная практическая применимость большинства полученных теоретических результатов остается под вопросом. Это, безусловно, не умаляет значения важных теоретических результатов (от формулы Уилсона до многоуровневых стратегий управления запасами) и нового понимания сути законов управления запасами, которые были сформированы на базе моделей и методов, разработанных в рамках теоретико-управленческого подхода. Однако в массовых приложениях применительно к управлению запасами, особенно в многономенклатурных системах, используются крайне редко.

В этих условиях все большую актуальность приобретают модели объектов управления, с одной стороны отражающих влияние случайных факторов на принимаемые управленческие решения и учитывающие многономенклатурность ассортимента товаров, а с другой стороны, легко реализуемые на практике.

1.5. Постановка задачи исследования

Обзор работ в области управления ассортиментом и товарными запасами показал, что управление ассортиментом товаров в розничной торговле рассматривалось многими отечественными и зарубежными авторами отдельно, не связывая его с задачей управления товарными запасами, и наоборот.

Отвечая на вопросы, когда запасы подлежат пополнению и каковы объемы пополнения запаса, теория управления запасами не касается вопроса о том, какие наименования товаров целесообразно иметь торговому предприятию. Хотя, очевидно, что система управления товарными запасами тесно связана с ассортиментной политикой торговой организации, оказывающей как прямое, так и опосредованное влияние на общие финансовые результаты торгового предприятия.

Системный анализ задачи и обзор формальных методов показал, что главное отличие задачи управления ассортиментом от задачи управления запасами состоит в том, что при управлении ассортиментом функционирование системы рассматривается только на одном, чаще всего конечном интервале времени, в течение которого производится лишь одно пополнение запасов. Тогда как управление запасами представляет собой многошаговый процесс управления при переменной интенсивности спроса на товары.

Рассматривая эти два процесса во взаимосвязи друг с другом можно значительно повысить эффективность торговых предприятий, если задачу управления конкретизировать следующим образом – на первом этапе найти оптимальный ассортимент товаров и уровень их объемов, доставляющих оптимум тому или иному критерию оптимальности, на втором этапе с учетом найденного на предыдущем этапе ассортимента товаров и их объемов, определить оптимальную стратегию управления запасами на горизонте управления.

Во многих случаях управление ассортиментом и товарными запасами

строится из предположений о детерминированности спроса на товар. В других используются авторские или корпоративные модели, построенные, чаще всего, на основе имитационного моделирования и которые являются «оптимальными» с точки зрения их авторов, но мало пригодные к внедрению на других предприятиях торговли из-за необходимости существенной доработки указанных моделей к другим условиям хозяйствования.

С нашей точки зрения модель задачи должна учитывать вероятностный характер спроса на товары и товарные запасы. Однако вероятностные модели значительно сложнее, трудно реализуются на ЭВМ, задача оптимизации носит более сложный характер.

В этой связи, целью работы является повышение эффективности функционирования предприятий розничной торговли за счет совершенствования методов и моделей определения оптимального ассортимента и наилучшей стратегии управления товарными запасами, которые учитывают вероятностный характер спроса и легко реализуются на ЭВМ.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе необходимо решить следующие задачи:

1. Провести системный анализ задачи управления ассортиментом товаров и товарными запасами в розничной торговле, выявить теоретические и методологические основы управления ассортиментом и товарными запасами при вероятностном характере спроса на товары, исследовать возможности их использования в современных условиях.

2. Разработать математическую модель задачи определения оптимального ассортимента товаров в условиях вероятностного характера спроса на товары и разработать эффективные алгоритмы ее реализации.

3. Разработать математические модели управления товарными запасами в условиях вероятностного характера спроса на товары для различных стратегий пополнения запасов и разработать эффективные алгоритмы их реализации.

4. Разработать методы расчета параметров распределений спроса и поставок товаров на основе ретроспективных данных о сбыте и времени выполнения заказов, а также прогнозирования спроса на горизонте управления, в том числе для товаров по новым номенклатурным позициям.

5. Разработать математическое, алгоритмическое и информационное обеспечение системы поддержки принятия решений, способной предоставлять лицу, принимающему решение, автоматизированный выбор наилучшей из альтернатив, как на основе решения оптимизационных задач, так и на основе предпочтений лица, принимающего решения.

ВЫВОДЫ:

1. Проведен системный анализ задачи управления ассортиментом и товарными запасами в розничной торговле, существующих формализованных методов планирования и управления ассортиментом и товарными запасами. Выявлено отсутствие инструментария решения поставленной задачи в условиях неопределенности спроса на товары или, когда спрос описывается сложными теоретическими и эмпирическими распределениями вероятности доступного широкому пользователю.

2. Поставлена двухэтапная задача управления ассортиментом и товарными запасами, которая может быть конкретизирована следующим образом – на первом этапе определяются ассортимент и объемы товаров, обеспечивающие максимум прибыли торгового предприятия на горизонте управления, на втором этапе с учетом найденного на предыдущем этапе ассортимента товаров и их объемов находится оптимальная стратегия пополнения запасов на горизонте управления.

ГЛАВА 2

ОПТИМИЗАЦИЯ АССОРТИМЕНТА ТОВАРОВ В РОЗНИЧНОЙ ТОРГОВЛЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

2.1. Постановка задачи определения оптимального ассортимента товаров в торговых организациях

Важнейшее значение в борьбе за потребителя в розничной торговле приобретают качество продаваемого товара и уровень обслуживания, диапазон предлагаемых услуг. Но наиболее актуальным и важным в условиях жесткой конкурентной борьбы становится правильно спланированный ассортимент товаров. Поэтому важнейшее значение в современных условиях приобретают методы формирования наиболее оптимального по номенклатуре ассортимента товаров.

Обзор работ, проведенный в первой главе, показал, что в большинстве торговых организаций при формировании ассортимента товаров используется наиболее простой принцип планирования «от достигнутого уровня», когда структура и объемы розничного товарооборота устанавливается на основе плана предшествующего периода с некоторой корректировкой по всем или отдельным группам товаров. При этом корректировка осуществляется управленческим персоналом зачастую «вручную» без строгих формализованных обоснований. В тех случаях, когда планирование ассортимента торговой организации осуществляется на основе математической модели, связующей основные показатели деятельности торговой организации с товарооборотом, потребительским спросом и ресурсами, которыми располагает торговое предприятие, в основном используются эконометрические модели или модели с детерминированным спросом на товар.

В настоящей работе математическую модель задачи нахождения опти-

мального ассортимента товаров в торговых организациях будем строить исходя из того, что спрос на товары представляет собой случайную величину, и в которой реализована вероятностная оценка эффективности ассортимента товаров.

Перейдем непосредственно к составлению математической модели задачи.

Рациональным ассортиментом торгового предприятия можно считать такой ассортимент, при котором номенклатура имеющихся товаров максимально удовлетворяет реальные потребности потребителей в различных сегментах рынка, то есть выполняет запросы всех потребителей, отвечает требованиям работающих регламентов, обеспечивает экономическую эффективность торгового предприятия.

Очевидно, что для нормального функционирования торгового предприятия необходимо, чтобы его доход от продажи товаров не только покрывал все текущие издержки по хранению и реализации товаров, но и приносил прибыль. Иначе торговая организация не обеспечит свое эффективное развитие, а значит и свое предназначение по своевременному обеспечению населения товарами. Следовательно, из множества вариантов структуры товарных запасов необходимо определить такие объем и ассортимент товаров, которые при эффективном использовании имеющихся ресурсов обеспечили бы удовлетворительный спрос населения и приносили торговой организации максимальную прибыль.

Ассортимент торгового предприятия имеет следующие особенности, называемые свойствами ассортимента:

- подразделение на группы, подгруппы и далее по заданным признакам;
- добавление новых и исключение старых товаров из обращения на рынке;
- выбор товаров в зависимости от различных факторов;
- замена товара одного на другой;

- необходимость поддержания определенного набора товаров.

Обозначим через x_j искомый объем j -го товара или товарной группы (в натуральном выражении), а через r_j спрос на j -й товар или товарную группу (количество j -го товара, которое желают приобрести покупатели).

Пусть спрос r_j является случайной величиной с известным законом распределения.

Использование аппарата теории вероятностей для описания спроса – удобный способ интегрального представления (в виде формулы) как частичных сведений об исследуемом процессе, так и частичных пробелов в наших знаниях о нем. Устанавливая вид и задавая параметры распределения вероятностей для описания спроса (такие, как среднее значение для пуассоновского распределения или среднее значение и среднеквадратическое отклонение для нормального распределения и т.п.), мы тем самым утверждаем, что нам известны относительные вероятности спроса. Таким образом, задавая тот или иной закон вероятностного распределения, мы даем компактное представление той степени неопределенности относительно будущего спроса на товар или группу товаров.

Примем допущение, что переменные x_j и r_j ($j = \overline{1, n}$) непрерывны. Также примем допущение, что спрос на различные товары или группы товаров взаимно независим. Даже в тех случаях, когда это допущение строго не соблюдается, оно является вполне адекватным приближением к реальности и может служить основой для разработки математической модели нахождения оптимального ассортимента товаров [13].

Поскольку формирование товарных запасов проводится с использованием теории вероятности, можно говорить лишь о вероятностной оценке прибыли, т.е. ожидаемой прибыли. Найдем выражение для ожидаемой прибыли.

Очевидно, что торговая организация не дополучит дохода, если в ней

не окажется достаточного количества товаров, желаемых покупателями. Торговая организация понесет потери и в случае, если количество товаров превысит спрос на горизонте планирования. Эти потери складываются из затрат на их приобретение, хранение, распродаже по сниженным ценам и списание в случае достижения срока годности.

Тогда можно считать, что ожидаемая прибыль от продажи товара равна ожидаемому доходу минус издержки торгового предприятия, минус ожидаемая потеря.

В этом случае доход торговой организации от продажи j -го товара составит

$$\begin{aligned} p_j r_j, & \text{ если } r_j \leq x_j, \\ p_j x_j, & \text{ если } r_j \geq x_j, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где p_j – розничная цена j -го товара.

При включении в ассортимент j -го товара торговое предприятие теряет прибыль в объеме

$$\begin{aligned} 0, & \text{ если } r_j \leq x_j, \\ \pi_j (r_j - x_j), & \text{ если } r_j \geq x_j, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где π_j – потеря прибыли из-за отсутствия одной единицы j -го товара.

Товары, оставшиеся на конец планового периода и для которых не истек срок хранения, продаются со скидкой на сумму

$$\begin{aligned} \lambda_j p_j (x_j - r_j), & \text{ если } r_j \leq x_j, \\ 0, & \text{ если } r_j \geq x_j, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где λ_j – торговая скидка на j -й товар.

Тогда ожидаемая прибыль от продажи j -го товара будет равна ожидаемому доходу от продажи j -го товара минус издержки обращения j -го товара, минус ожидаемая потеря, плюс ожидаемый доход от продажи j -го товара по сниженным ценам.

Обозначим через $f(r_j)$ плотность распределения случайной перемен-

ной спроса r_j . Тогда ожидаемая прибыль Z_j от продажи j -го товара определяется как

$$Z_j = p_j \int_{-\infty}^{x_j} r_j f(r_j) dr_j + p_j x_j \int_{x_j}^{\infty} f(r_j) dr_j - c_j x_j - \pi_j \int_{x_j}^{\infty} (r_j - x_j) f(r_j) dr_j + \lambda_j p_j \int_{-\infty}^{x_j} (x_j - r_j) f(r_j) dr_j, \quad (2.4)$$

где c_j – издержкостоемость j -го товара, включая затраты на его закупку.

Ожидаемая прибыль торговой организации от реализации всех товаров составит:

$$Z = \sum_{j=1}^n \left(p_j \int_{-\infty}^{x_j} r_j f(r_j) dr_j \right) + \sum_{j=1}^n \left(p_j x_j \int_{x_j}^{\infty} f(r_j) dr_j \right) - \sum_j c_j x_j - \sum_{j=1}^n \left(\pi_j \int_{x_j}^{\infty} (r_j - x_j) f(r_j) dr_j \right) + \sum_{j=1}^n \left(\lambda_j p_j \int_{-\infty}^{x_j} (x_j - r_j) f(r_j) dr_j \right). \quad (2.5)$$

Тогда задача нахождения оптимального ассортимента товаров для случая, когда спрос на них представляет собой случайную величину заключается в нахождении таких

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.6)$$

при которых критерий оптимальности (2.5) достигает максимума.

Очевидно, что на переменные x_j накладываются целый ряд ограничений, связанных, прежде всего, с издержкостоемостью товаров.

Издержки, связанные с хозяйственной деятельности торговой организации, играют определяющую роль при выборе ассортимента товаров и их запасов. Существуют следующие основные типы издержек, связанные с реализацией товаров:

- приобретение товаров;
- содержание товаров до реализации;
- издержки дефицита товаров.

Издержки на приобретение товаров можно разделить на две части. Первая из них является суммой, которую следует уплатить поставщику товара. Она представляет собой стоимость поставляемого товара.

Вторая часть издержек относится к затратам на оформление и осуществление поставок. Она включает расходы на информационную систему заказчика и делопроизводство, зарплату соответствующим работникам и т.д. Если стоимость транспортировки товаров оплачена поставщиком, то она включается в его стоимость. Кроме того, существуют издержки приема товаров, связанные с необходимостью его распаковки, расфасовки, контроля наличия и качества.

К издержкам содержания товаров в торговых организациях до их реализации относятся страховка, налоги, порча, списание, арендная плата за использование площади под служебные помещения и торговые залы, стоимость использованной электроэнергии, отопление, кондиционирование, оплата охраны и т.д.

Издержки дефицита товаров в момент поступления запроса от потребителя оценить весьма затруднительно. Можно достаточно точно оценить потерю доходов от непроданного товара в связи с его отсутствием, но оценить потери из-за вероятного «ухода» покупателя к другому продавцу, т.е. потери от продажи в будущем других товаров в связи с потерей интереса и предпочтений потребителей проблематично.

Очевидно, что всегда существует вариант такой структуры товарного запаса, т.е. ассортимента товаров и их объемов при котором суммарные издержки минимальны. Поиск такого ассортимента является основной задачей управления деятельностью торгового предприятия.

Пусть s_j – закупочная цена j -го товара, а S – общий объем финансовых средств на приобретение товаров торговым предприятием. Тогда суммарная цена всех товаров не должна превышать всей суммы финансовых средств S , т.е.:

$$\sum_{j=1}^n S_j x_j \leq S. \quad (2.7)$$

На переменные x_j накладываются ряд ограничений, связанных с издержкоемкостью товаров.

Пусть a_{kj} норматив затрат издержек обращения на единицу j -го товара по k -й статье расходов, а b_k – величина расходов по k -й статье издержек обращения. Тогда допустимые ограничения на издержки обращения можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \leq b_k, \quad k = \overline{1, K}. \quad (2.8)$$

Для приведения выражений (2.8) к канонической форме вводятся уравновешивающие переменные z_k , характеризующие величины неиспользованной части ресурса k , и условия (2.8) примут вид

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + z_k = b_k, \quad k = \overline{1, K}. \quad (2.9)$$

В тех случаях, когда торговое предприятие нуждается в дополнительных ресурсах, связанных, например, с наймом новых сотрудников, приобретением дополнительного оборудования, увеличением коммунальных платежей, аренды и т.п., в модель задачи вводятся дополнительные условия по наличию и использованию денежных средств на эти цели. Тогда условия (2.8) примут вид

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j - z_k = b_k, \quad k = \overline{1, K}. \quad (2.10)$$

В выражениях (2.10) уравновешивающие переменные z_k характеризуют дополнительную величину ресурса b_k сверх имеющегося фонда, необходимую для обеспечения нормального режима работы торгового предприятия. Для этого выражения (2.10) необходимо дополнить условием по наличию и

использованию денежных средств на эти цели

$$\sum_{k=1}^K d_k z_k \leq D, \quad (2.11)$$

где D – денежные средства, предназначенные на увеличение объемов ресурсов; d_k – денежные вложения на единицу приращения ресурсов b_k .

Условие (2.11) может быть представлено в несколько ином виде, если собственных средств D_0 недостаточно:

$$\sum_{k=1}^K d_k z_k - \bar{D} = D_0. \quad (2.12)$$

Здесь искомая переменная $\bar{D}$ будет характеризовать потребность в заемных денежных средствах.

Добавим еще обозначения: v_j – норматив затрат объема хранения на складе или размещения в торговом зале (в m^2) на единицу j -го товара, а V – общий объем под хранение и размещение товаров в торговых залах и складах торговой организации. Тогда суммарный объем всех товаров не должен превышать объема V , т.е.:

$$\sum_{j=1}^n v_j x_j \leq V. \quad (2.13)$$

В ряде случаев, в исходных условиях может быть задано фиксированное значение для того или иного товара

$$x_j = \bar{X}_j, \quad j = \overline{1, L}, \quad (2.14)$$

где L – число наименований товаров, для которых установлен фиксированный товарооборот.

Имеют место случаи, когда при формировании ассортимента товаров необходимо учесть соотношения между товарооборотом тех или иных товаров¹.

¹ Например, следует соблюдать определенное соотношение между инсулиновыми и сульфаниламидными препаратами в аптечных организациях. Больные сахарным диабетом мо-

Так, например, если между товарооборотом k -го и $k+1$ -го товара имеется соотношение $\alpha : \beta$, то математически это может быть записано в виде выражения

$$x_k / x_{k+1} \geq \alpha / \beta, \quad (2.15)$$

или, что то же, в разрешимом виде

$$\beta x_k - \alpha x_{k+1} \geq 0. \quad (2.16)$$

В других случаях могут быть заданы нижние или верхние пороговые значения объемов товара.

Окончательно, задача нахождения оптимального ассортимента товаров в торговой организации заключается в нахождении таких

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.17)$$

при которых критерий оптимальности (2.5) достигает максимума и выполняются ограничения (2.6) – (2.17).

Задача нахождения оптимальной структуры товарных запасов (2.5) – (2.17) сформулирована как задача нелинейного программирования с нелинейной целевой функцией и линейными ограничениями. Применение модели опирается на возможность рассмотрения ассортимента в расчлененной форме с учетом затрат всех видов ресурсов и издержек в натуральном выражении в связи с включением в ассортимент каждой единицы того или иного товара. Каждый вариант ассортимента характеризуется набором этих затрат и издержек, которые должны быть выбраны так, чтобы были выполнены необходимые ограничения – ассортимент товаров отвечал требованиям, и чтобы целевая функция достигала максимума.

Несмотря на то, что спрос на товары априори является случайной величиной к моменту принятия решения, апостериори, структура товара и связанная с ней эффективность вполне детерминированы, т.е. ассортимент това-

гут лечиться только инсулинами, только сульфаниламидными, либо проходить комбинированное лечение.

ра и его объемы не могут быть случайными. Поэтому постановка задачи оптимизации (2.5) – (2.17) позволяет найти не случайный, а вполне определенный ассортимент товаров, основанный только на располагаемой априорной информации.

2.2. Оценка спроса на товар и установление закона распределения вероятностей

Для задачи нахождения оптимального ассортимента товаров должны быть установлены распределения вероятностей спроса на товары. Наибольшее распространение получили статистические методы оценки распределений на основе ретроспективных данных.

Для установления закона распределения спроса на товары проведем статистическую обработку выборки данных на примере продаж ряда лекарственных средств (ЛС) в муниципальном унитарном предприятии Ангарского городского округа «Аптека № 28».

В табл. 2.1 представлены данные продаж наиболее распространенных ЛС за период январь 2014 – декабрь 2015 года. В табл. 2.1 месяцы пронумерованы с 1 по 24 (1 обозначает январь 2014 г., а 24 – декабрь 2015 г.).

На рис. 2.1 показаны временные ряды продаж, например, первых трех лекарственных средств из списка в табл. 2.1.

Из рисунка видно, что спрос на ЛС нестационарен, временные ряды содержат тренды, сезонную составляющую и случайные факторы.

Число типов распределений случайной величины неограничено. Однако на практике далеко не все распределения встречаются одинаково часто.

Таблица 2.1

Данные о продаже лекарственных средств (январь 2014 – декабрь 2015)

Ме- сяц	Ар- би- дол	Эс- сен- циа- ле	Те- раф- лю	Ме- зим	Но- шпа	Ас- корб. кисл.	Па- ра- цета- мол	Цит- ра- мон	Су- пра- стин	Акт. уголь	Ли- некс	Су- ма- мед
1	27	31	55	161	63	186	145	261	122	208	46	13
2	45	29	72	126	48	296	172	204	119	142	69	12
3	39	14	72	112	57	168	285	319	145	237	65	13
4	14	18	37	118	46	125	143	236	131	287	36	17
5	14	18	37	158	52	138	206	265	104	275	36	5
6	7	17	29	130	41	108	156	277	126	263	30	4
7	7	35	15	145	45	74	198	246	134	325	16	9
8	18	14	18	130	37	101	196	177	104	440	28	3
9	18	33	64	120	49	209	323	222	91	332	50	12
10	16	27	49	140	47	180	235	248	100	303	35	19
11	20	27	41	120	54	207	208	187	104	229	40	10
12	14	23	59	139	37	240	254	199	129	496	41	17
13	26	17	47	105	41	200	247	186	104	268	38	13
14	52	14	88	91	35	246	414	194	107	165	41	13
15	18	19	40	98	37	218	292	227	99	197	34	17
16	9	8	9	100	33	165	153	178	106	272	24	8
17	5	9	10	81	48	109	177	211	111	244	24	8
18	5	8	12	95	49	93	167	217	159	246	31	11
19	2	15	14	116	48	70	145	195	113	218	48	4
20	7	6	27	105	34	91	170	194	127	258	59	11
21	16	6	50	67	23	223	298	179	96	152	41	10
22	13	4	37	87	19	186	217	146	112	206	57	4
23	14	10	47	82	17	217	218	157	106	152	84	10
24	1	17	40	114	41	168	212	214	115	267	42	11

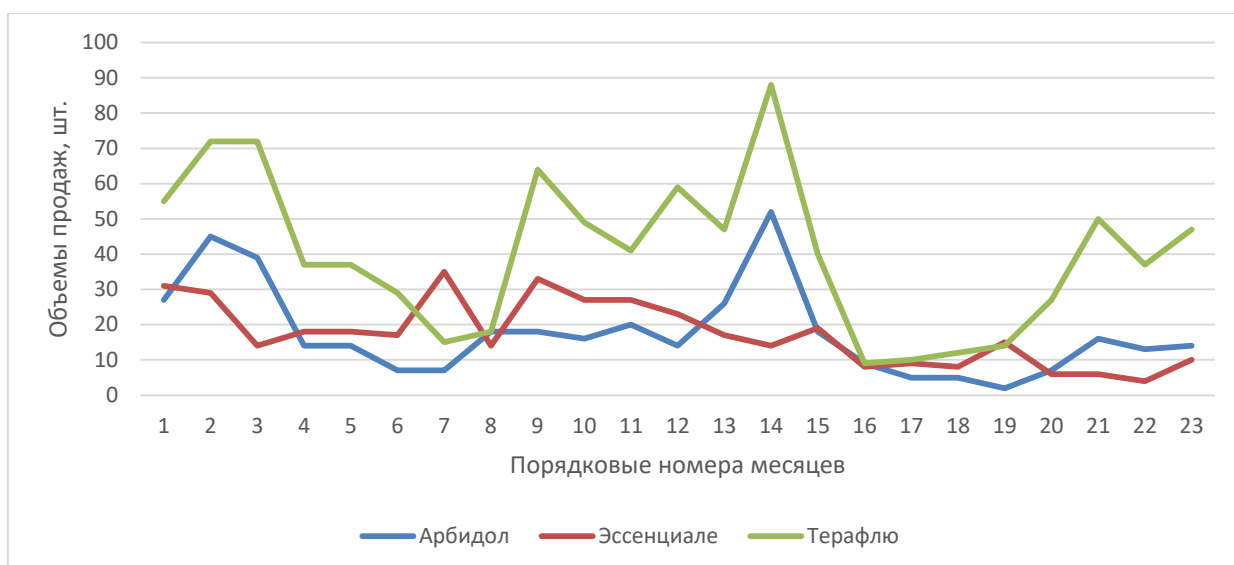


Рис. 2.1. Временные ряды продаж лекарственных средств

Основные статистические характеристики спроса на «арбидол», «эссенциале» и «терафлю» приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Основные статистические характеристики спроса на ЛС

Характеристика	Арбидол	Эссенциале	Терафлю
Среднее	17,65	17,47	40,39
Стандартная ошибка	2,66	1,92	4,56
Медиана	14	17	40
Мода	14	14	37
Стандартное отклонение	12,80	9,22	21,88
Дисперсия выборки	163,96	85,16	478,97
Экссесс	1,71	-0,87	-0,51
Асимметричность	1,41	0,42	0,30
Интервал	50	31	79
Минимум	2	4	9
Максимум	52	35	88

Как правило, постулируется один из хорошо известных видов распределения вероятностей, и дальше проверяется гипотеза о соответствии выборочного распределения данному распределению [1, 19, 59].

Примем гипотезу, что спрос на указанные лекарства подчинен:

- а) закону Пуассона;
- б) нормальному закону распределения.

Закон Пуассона оказался справедлив для многих случаев: для распределения числа новорожденных, появляющихся в родильном доме за сутки, числа заявок на товары розничной торговли, а также для многих других случаев, когда вероятность появления события не зависит от происходящих ранее событий [11, 15, 95].

Отличительная особенность нормального закона от других законов, заключается в том, что нормальный закон является предельным, к которому стремятся остальные законы распределения. Доказано, что сумма достаточно большого числа независимых случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения, приближенно подчиняется нормальному закону и это выполняется тем точнее, чем большее количество случайных величин суммируется. Практически все, имеющие место в практике, случайные величины, такие, например, как ошибка измерений, точность стрельбы, содержание примесей в веществах и т.д., могут быть представлены суммой огромного числа случайных факторов, вызванных различными причинами, не зависящими друг от друга. Какие бы законы распределения не описывали бы эти случайные величины, все эти распределения в сумме подчинены закону, близкому к нормальному [1, 11, 13, 15, 62, 88, 95].

На рис. 2.2 показаны гистограммы выборочных распределения и теоретические плотности распределения вероятностей для нормального закона и закона Пуассона.

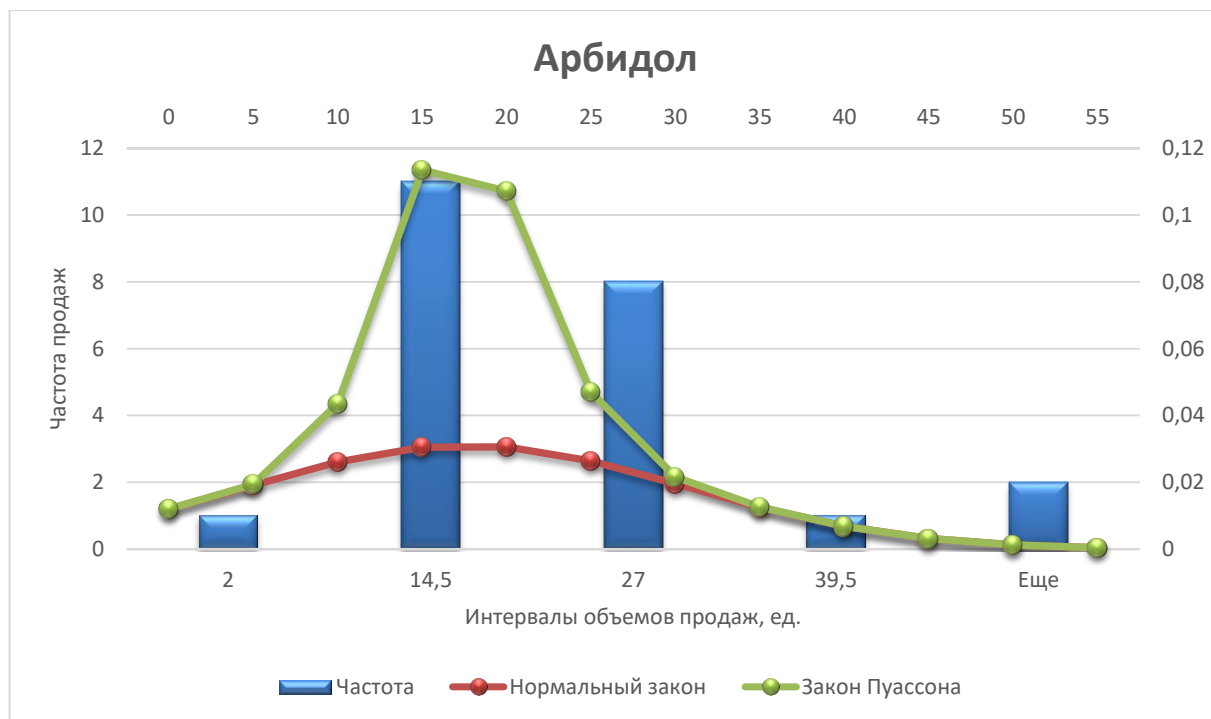
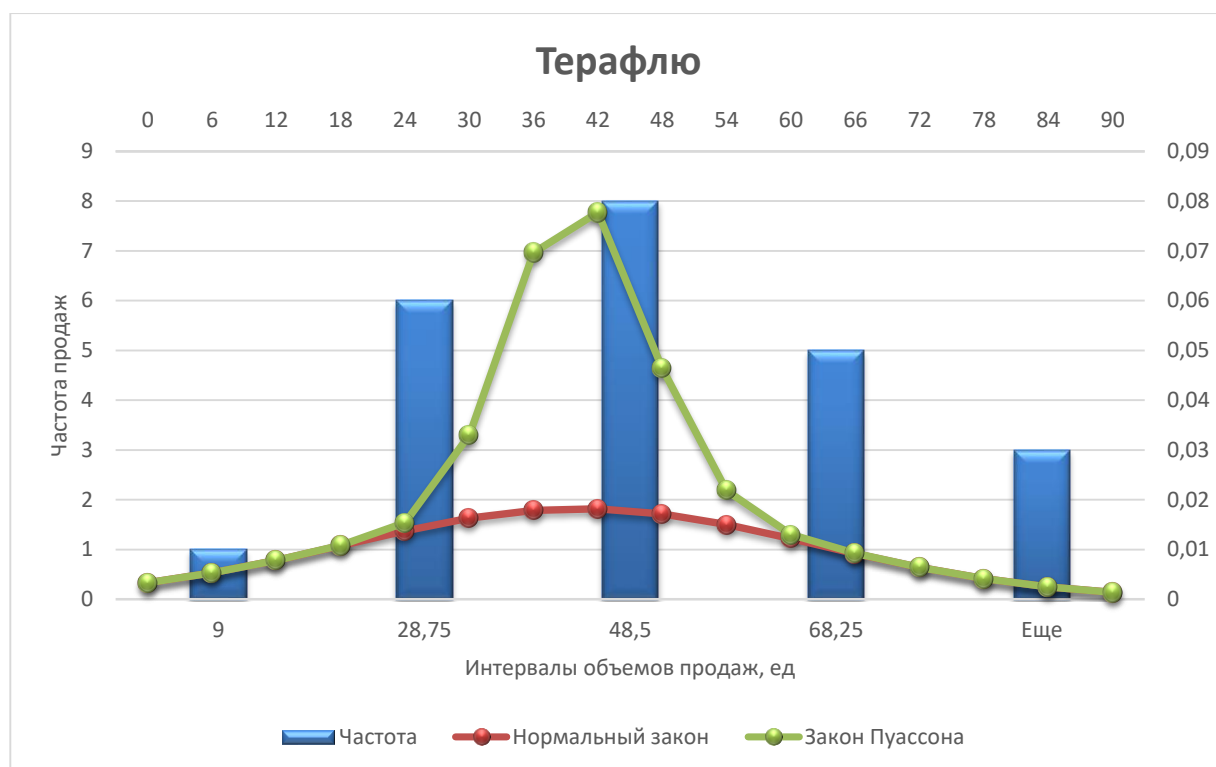


Рис.2.2. Гистограммы распределения спроса на ЛС и теоретические кривые нормального распределения и распределения Пуассона



Продолжение рис.2.2. Гистограммы распределения спроса на ЛС и теоретические кривые нормального распределения и распределения Пуассона

Визуальное сравнение гистограмм выборок (рис. 2.2) с наложенными кривыми плотности вероятности нормального распределения и распределения Пуассона показало, что спрос на лекарства в течение двух календарных лет невозможно точно описать с помощью нормального закона распределения или распределения Пуассона.

Проверка соответствия, например, спроса на «арбидол» в течение двух лет по критерию Колмогорова D , в том числе и другим известным распределениям (табл. 2.3) также показала, что описать спрос на товары одним законом распределения не представляется возможным.

В табл. 2.4 продемонстрировано существенное отличие статистических характеристик спроса на лекарства, например, в зимние и летние месяцы года.

Таблица 2.3

Сопоставление спроса на «арбидол» с теоретическими распределениями по критерию D для числа степеней свободы, равным 24

Расчетное значение D	Табличное значение D при α			Гипотеза
	0,1	0,05	0,01	
Гипотеза H_0 : Нормальный закон распределения				
0,2202	0,264	0,294	0,356	Не подтверждается
Гипотеза H_0 : Экспоненциальное распределение				
0,2064	0,264	0,294	0,356	Не подтверждается
Гипотеза H_0 : Распределение Эрланга				
0,1748	0,264	0,294	0,356	Не подтверждается
Гипотеза H_0 : Распределение Релея				
0,234	0,264	0,294	0,356	Не подтверждается
Гипотеза H_0 : Распределение Вейбулла				
0,2177	0,264	0,294	0,356	Не подтверждается

Таблица 2.4

Основные статистические характеристики спроса на «арбидол», «эссенциале» и «терафлю» в летние и зимние периоды времени

Характеристики	Наименование лекарственного средства					
	Арбидол		Эссенциале		Терафлю	
	зимой	летом	зимой	Летом	Зимой	Летом
Среднее	29,66	7,66	20,66	15,83	61,33	19,16
Стандартная ошибка	6,44	2,21	3,43	4,20	6,53	2,91
Медиана	26,5	7	20	14,5	57	16,5
Мода	14	7	-	-	47	-
Стандартное отклонение	15,78	5,42	8,40	10,30	16,00	7,13

Характеристики	Наименование лекарственного средства					
	Арбидол		Эссенциале		Терафлю	
	зимой	летом	зимой	Летом	Зимой	Летом
Дисперсия выборки	249,06	29,46	70,66	106,16	256,26	50,96
Эксцесс	-1,45	2,81	-1,85	2,94	0,19	-1,73
Асимметричность	0,53	1,69	0,06	1,53	1,02	0,70
Интервал	38	16	21	29	41	17
Минимум	14	2	10	6	47	12
Максимум	52	18	31	35	88	29

Можно предположить, что расчленение вероятностных распределений на всем интервале времени на подинтервалы, равные, например, горизонту управления товарными запасами, позволит достаточно точно аппроксимировать данные продаж тем или иным законом распределения.

Так, анализ распределения спроса на лекарственные средства отдельно для зимних и летних месяцев года показывает, что спрос можно аппроксимировать достаточно точно, и с помощью нормального распределения и распределения Пуассона.

На рис. 2.3 показаны функции распределения спроса на «арбидол» в летние месяцы года, а также кривые нормального распределения и распределения Пуассона.

Визуальное сравнение экспериментального распределения с нормальным законом и законом Пуассона показывает, что спрос на лекарства в летние месяцы достаточно точно аппроксимируется указанными распределениями.

Сравнение графиков очень удобно своей наглядностью, однако не является достаточно строгим из-за отсутствия надежной количественной оценки.

Проверить соответствие выборочного распределения нормальному закону кроме визуального метода можно по коэффициентам асимметрии и экс-

цесса и по критериям Колмогорова, омега-квадрат и хи-квадрат [88].

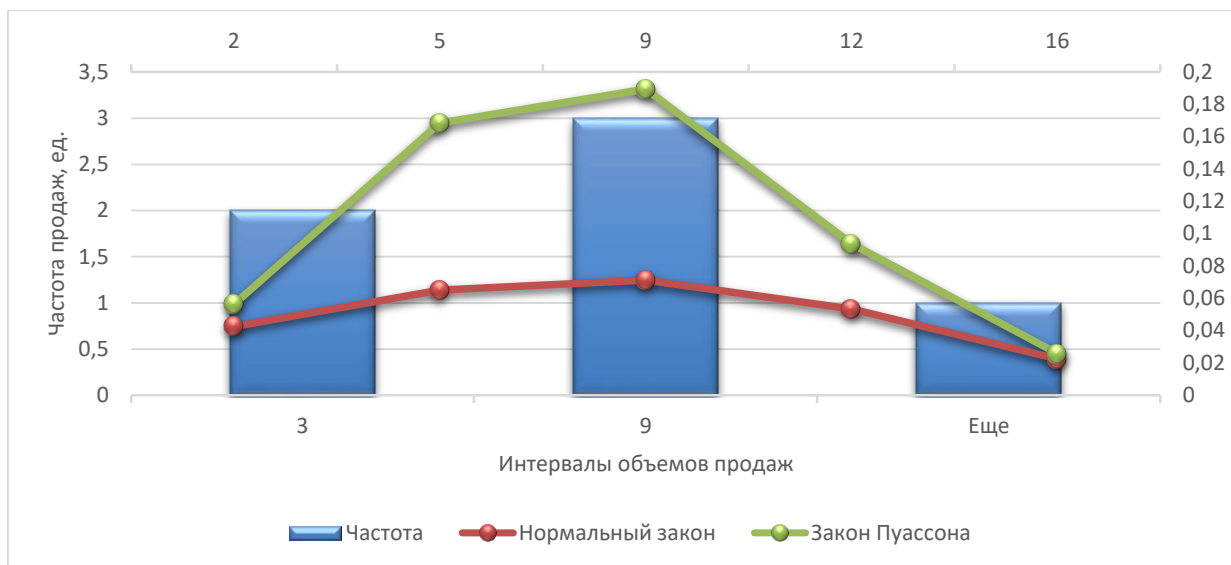


Рис.2.3. Функции распределения спроса на «арбидол» в летние месяцы года и кривые нормального распределения и распределения Пуассона

Для нормального закона распределения асимметрия и эксцесс равны нулю [88]. Но поскольку асимметрия и эксцесс, как и все выборочные параметры, являются случайными величинами и поэтому даже для нормального распределения могут отличаться от нуля.

Если выборочные асимметрия и эксцесс удовлетворяют неравенствам

$$|A| \leq 3\sqrt{D(A)}, \quad |E| \leq 5\sqrt{D(E)} \quad (2.18)$$

где $D(A)$ и $D(E)$ – дисперсии асимметрии и эксцесса, то наблюдаемое распределение можно считать нормальным.

Дисперсии асимметрии и эксцесса рассчитываются как

$$D(A) = \frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}, \quad D(E) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}, \quad (2.19)$$

где n – объем исследуемой выборки.

Проверим на нормальность спрос на «арбидол», «эссенциале» и «тера-

флю» в летние и зимние периоды времени по вычисленным показателям асимметрии и эксцесса (табл. 2.4).

Поскольку для всех ЛС объем выборки равен шести, дисперсии асимметрии и эксцесса одинаковы $D(A) = 0,476$, $D(E) = 0,356$. Тогда $3\sqrt{D(A)} = 2,0709$, а $5\sqrt{D(E)} = 2,9841$.

Выборочные асимметрия и эксцесс для арбидола, эссенциале и терафлю в летние и зимние периоды времени удовлетворяют неравенствам (2.18), следовательно, можно принять гипотезу о том, что спрос на лекарственные средства в летние и зимние месяцы года подчиняется нормальному закону распределения.

Одним из самых строгих и надежных критериев согласия, является критерий Пирсона или хи-квадрат Пирсона [88]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (2.20)$$

где k – число интервалов группирования данных наблюдений; v_i – число «попаданий» наблюдений в i -й интервал; np_i – наиболее вероятное число попаданий в i -й интервал.

Проверим на нормальность с помощью критерия χ^2 , например, спрос на арбидол в летние месяцы года.

Сведем данные о спросе и частоте продаж «арбидола» в летние месяцы в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Данные наблюдений

Ежемесячный спрос, r_i	0-6	7-12	13-18
Частота продаж, v_i	2	3	1

Сформулируем основную гипотезу H_0 : спрос на «арбидол» в летний период подчиняется нормальному закону распределения, т.е. $r \in N(m, \sigma)$.

Альтернативная гипотеза H_1 : $r \notin N(m, \sigma)$ – спрос не подчиняется нормальному закону распределения.

По таблице критических значений χ^2 – распределение для уровня значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $f = 3 - 2 = 1$ находим квантиль $\chi_{0,05;1}^2 = 3,8$.

Вычислим оценки математического ожидания $\bar{m}$ и среднеквадратического отклонения $\bar{\sigma}$ нормального закона распределения.

Среднее арифметическое равно:

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot \nu_i = \frac{1}{6} (3 \cdot 2 + 9,5 \cdot 3 + 15,5 \cdot 1) \approx 8,33.$$

Среднеквадратическое отклонение:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i - \bar{m})^2 \cdot \nu_i} = \\ &= \left(\frac{1}{5} ((3 - 8,33)^2 \cdot 2 + (9,5 - 8,33)^2 \cdot 3 + (15,5 - 8,33)^2 \cdot 1) \right)^{\frac{1}{2}} \approx 4,73. \end{aligned}$$

Тогда функция нормального распределения будет иметь вид:

$$F(r) = \Phi\left(\frac{r - 8,33}{4,73}\right).$$

Теоретические частоты вычислим по формуле:

$$np_i = n \cdot \left(\Phi\left(\frac{r_i - 8,33}{4,73}\right) - \Phi\left(\frac{r_{i-1} - 8,33}{4,73}\right) \right),$$

при этом наименьшее значение дроби $\frac{r_{i-1} - 8,33}{4,73}$ заменяем на « $-\infty$ », а наибольшее на « $+\infty$ ».

Так,

$$np_1 = 6 \left(\Phi \left(\frac{6-8,33}{4,73} \right) - \Phi(-\infty) \right) = 6(\Phi(-0,49) - 0) = 6(0,3121 - 0) = 1,87,$$

$$np_2 = 6 \left(\Phi \left(\frac{12-8,33}{4,73} \right) - \Phi \left(\frac{7-8,33}{4,73} \right) \right) = 6(\Phi(0,77) - \Phi(-0,49)) = \\ = 6(0,7794 - 0,3121) = 2,80.$$

$$np_3 = 6 \left(\Phi \left(\frac{18-8,33}{4,73} \right) - \Phi \left(\frac{13-8,33}{4,73} \right) \right) = 6(\Phi(+\infty) - \Phi(0,98)) = \\ = 6(1 - 0,8365) = 0,98.$$

Для расчета критерия χ^2 составим табл. 2.6.

Таблица 2.6

Расчетные данные

Ежемесячный спрос, r_i	Частота про- даж, ν_i	Теоретические частоты, np_i	$(\nu_i - np_i)^2$	$\frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$
0-6	2	1,87	0,017	0,009
7-12	3	2,80	0,040	0,014
13-18	1	0,98	0,0004	0,0004

Сумма значений из последнего столбца дает итоговое $\chi^2 = 0,023$. Так как $\chi^2 = 0,023$ меньше $\chi_{0,05;3}^2 = 3,8$, то оснований отклонения нулевой гипотезы H_0 нет. Следовательно, спрос на «арбидол» в летние месяцы года подчиняется нормальному закону распределения.

В дальнейшем для нахождения оптимального ассортимента товаров в постановке (2.5) – (2.17) для каждого периода планирования будем использовать нормальный закон распределения, во-первых, потому что спрос на товары зависит от огромного числа независимых случайных слагаемых с различными законами распределения, суммарное воздействие которых стремится к нормальному закону. Во-вторых, потому что оценки результатов наблюде-

ний, в большинстве своем, строятся исходя из нормальности наблюдаемых явлений.

2.3. Пример решения задачи нахождения оптимального ассортимента товаров в задачах со случайным спросом

Рассмотрим пример решения задачи нахождения оптимального ассортимента товаров на примере деятельности аптечной организации. Пусть аптека реализует три лекарственных средства. Закупочная цена первого ЛС обходится аптеке в 35 рублей, продаваться будет за 66 рублей. Второе лекарственное средство стоит 20 рублей, а продаваться будет за 37 рублей. Наконец третье лекарственное средство обойдется аптеке в 50 рублей, выставиться на продажу будет за 105 рублей. Максимальная сумма, которую может потратить аптека на их закупку, составляет 30000 рублей. Лекарственные средства, не реализованные в течение планового периода, будут продаваться на 20 % ниже закупочной цены. Если же в аптеке не окажется достаточного количества первого, второго и третьего лекарств, аптека понесет потери в размере 70 рублей по первому ЛС, 40 рублей по второму и 220 рублей по третьему лекарственному средству. Предварительное исследование показало, что спрос на лекарственные средства подчинен закону нормального распределения с математическим ожиданием 300, 600 и 150 единиц и стандартным отклонением 80, 120 и 30 единиц для первого, второго и третьего ЛС соответственно.

Требуется найти оптимальный ассортимент и объемы запасов ЛС, при которых аптека получит максимальную ожидаемую прибыль от их реализации. При решении задачи примем допущение, что все переменные непрерывны. Если x_j – количество j -го лекарства, закупленного аптекой, а r_j – спрос на j -е лекарственное средство, то аптека продаст j -е лекарственное средство

на сумму

$$\begin{aligned} p_j r_j, & \text{ если } r_j \leq x_j, \\ p_j x_j, & \text{ если } r_j \geq x_j, \end{aligned}$$

где p_j – розничная цена j -го лекарственного средства.

При продаже j -го лекарственного средства аптека теряет прибыль в объеме

$$\begin{aligned} 0, & \text{ если } r_j \leq x_j, \\ \pi_j(r_j - x_j), & \text{ если } r_j \geq x_j, \end{aligned}$$

где π_j – потеря из-за отсутствия одного j -го лекарственного средства.

Лекарственные средства, оставшиеся на конец планового периода и для которых не истек срок хранения, продаются со скидкой на сумму

$$\begin{aligned} 0,8c_j(x_j - r_j), & \text{ если } r_j \leq x_j, \\ 0, & \text{ если } r_j \geq x_j, \end{aligned}$$

где c_j – закупочная стоимость j -го лекарственного средства.

Тогда ожидаемая прибыль от продажи j -го лекарства будет равна ожидаемому доходу от продажи j -го лекарства минус закупочная стоимость j -го лекарства, минус ожидаемая потеря, плюс ожидаемый доход от продажи j -го лекарства по сниженным ценам.

Пусть $f(r_j; \mu_j, \sigma_j)$ плотность нормального распределения случайной переменной r_j с математическим ожиданием μ_j и стандартным отклонением σ_j . Тогда ожидаемая прибыль Z_j от продажи j -го лекарственного средства определяется как

$$\begin{aligned} Z_j = & p_j \int_{-\infty}^{x_j} r_j f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j + p_j x_j \int_{x_j}^{\infty} f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j - c_j x_j - \\ & - \pi_j \int_{x_j}^{\infty} (r_j - x_j) f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j + 0,8c_j \int_{-\infty}^{x_j} (x_j - r_j) f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j. \end{aligned}$$

Очевидно, что площадь под кривой нормального распределения на ин-

тервале от $-\infty$ до 0 пренебрежимо мала, поэтому в приведенном выше выражении нижним пределом интегрирования можно взять $-\infty$ вместо 0.

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{x_j} r_j f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j = \mu_j - \int_{x_j}^{\infty} r_j f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j.$$

и

$$\int_{-\infty}^{x_j} (x_j - r_j) f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j = x_j - \mu_j + \int_{x_j}^{\infty} (r_j - x_j) f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j,$$

преобразуем выражение для Z_i следующим образом:

$$Z_j = \mu_j (p_j - 0,8c_j) - 0,2c_j x_j - (p_j + \pi_j - 0,8c_j) \int_{x_j}^{\infty} (r_j - x_j) f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j.$$

Ожидаемая прибыль от продажи трех лекарственных средств получается суммированием Z_1 , Z_2 и Z_3 :

$$Z = 11400 - 7x_1 - 108 \int_{x_1}^{\infty} (r_1 - x_1) f(r_1; 300, 80) dr_1 + 12600 - 4x_2 - 61 \int_{x_2}^{\infty} (r_2 - x_2) f(r_2; 600, 120) dr_2 + 9750 - 10x_3 - 285 \int_{x_3}^{\infty} (r_3 - x_3) f(r_3; 150, 30) dr_3.$$

Необходимо найти такие неотрицательные значения переменных x_1 , x_2 и x_3 , при которых выполняется ограничение

$$35x_1 + 20x_2 + 50x_3 \leq 30000$$

и целевая функция Z принимает максимальное значение.

Найдем максимум Z , не обращая внимание на последнее ограничение, поскольку для того, чтобы получить максимальную прибыль, не обязательно истратить всю располагаемую сумму.

Ясно, что максимум будет достигаться в точке, где все x_j будут конечны. Следовательно, экстремальная точка должна удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial Z}{\partial x_j} = 0, \quad i=1,2,3.$$

Вычисляя эти производные, заметим, что

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx_j} \left[\int_{x_j}^{\infty} (r_j - x_j) f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j \right] = \\ &= \frac{d}{dx_j} \left[\int_{x_j}^{\infty} r_j f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j \right] - \frac{d}{dx_j} \left[x_j \int_{x_j}^{\infty} f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j \right] = \\ &= -x_j f(x_j; \mu_j, \sigma_j) - \int_{x_j}^{\infty} f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j + x_j f(x_j; \mu_j, \sigma_j) = \\ &= - \int_{x_j}^{\infty} f(r_j; \mu_j, \sigma_j) dr_j = -\Phi \left(\frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right), \end{aligned}$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\tau^2/2} d\tau.$$

Значения функции $\Phi(t)$ приводятся в таблицах закона нормального распределения. Таким образом, мы имеем:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 0 = -7 + 108 \Phi \left(\frac{x_1 - 300}{80} \right) \text{ или } \Phi \left(\frac{x_1 - 300}{80} \right) = 0,0648,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = 0 = -4 + 61 \Phi \left(\frac{x_2 - 600}{120} \right) \text{ или } \Phi \left(\frac{x_2 - 600}{120} \right) = 0,0656,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_3} = 0 = -10 + 285 \Phi \left(\frac{x_3 - 150}{30} \right) \text{ или } \Phi \left(\frac{x_3 - 150}{30} \right) = 0,0351.$$

С помощью таблиц находим решение этих уравнений:

$$\frac{x_1 - 300}{80} = 1,515, \text{ откуда } x_1 = 421,$$

$$\frac{x_2 - 600}{120} = 1,51, \text{ откуда } x_2 = 781,$$

$$\frac{x_3 - 150}{30} = 1,81, \text{ откуда } x_3 = 184.$$

При этих значениях сумма затрат равная $35 \cdot 421 + 20 \cdot 781 + 50 \cdot 184 = 40555$, превышает располагаемую сумму в 30000 рублей. Таким образом, ограничение задачи является существенным.

В случаях, когда ограничения в задаче представляют собой равенства, найти условный экстремум нелинейной функции многих переменных можно с помощью метода множителей Лагранжа.

Применим метод множителей Лагранжа. Функция Лагранжа в данном случае имеет вид

$$F(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{j=1}^3 Z_j - \lambda(30000 - 35x_1 - 20x_2 - 50x_3).$$

Приравнивая нулю ее частные производные получим

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 = -(7 + 35\lambda) + 108\Phi\left(\frac{x_1 - 300}{80}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 = -(4 + 20\lambda) + 61\Phi\left(\frac{x_2 - 600}{150}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 0 = -(10 + 50\lambda) + 285\Phi\left(\frac{x_3 - 150}{30}\right),$$

откуда следует

$$\Phi\left(\frac{x_1 - 300}{80}\right) = \frac{7 + 35\lambda}{108},$$

$$\Phi\left(\frac{x_2 - 600}{120}\right) = \frac{4 + 20\lambda}{61},$$

$$\Phi\left(\frac{x_3 - 150}{30}\right) = \frac{10 + 50\lambda}{285}.$$

Получить оптимальное решение можно получить, решив эти три уравнения совместно с уравнением $g(\mathbf{x}) = 35x_1 + 20x_2 + 50x_3 = 30000$.

Один из способов решения состоит в следующем. Выберем некоторое

$\lambda > 0$, определим из трех уравнений единственное решение x_j и вычислим значение $g(\mathbf{x})$. Если $g(\mathbf{x}) = 30000$, мы имеем решение. Если $g(\mathbf{x}) > 30000$, возьмем большее значение λ и повторим вычисления. Если $g(\mathbf{x}) < 30000$, повторим вычисления с меньшим положительным значением λ . Каждое такое вычисление называется итерацией. Подходящее значение λ можно получить с помощью интерполяции. Решая задачу мы непременно придем к единственному решению, так как для данного λ все x_j определяются единственным образом и их величины монотонно убывают с возрастанием λ . Результаты итерационного процесса, начатого с $\lambda = 0,50$, приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7

Результаты итерационного процесса

λ	x_1	x_2	x_3	$g(\mathbf{x})$
0,50	362,8	691,3	185,2	35784,8
1,00	321,5	632,7	174,8	32646,1
1,50	290,9	583,1	166,7	30178,5
1,52	291,6	576,3	165,4	29992,7

Оптимальное решение будет $x_1^* = 292$, $x_2^* = 576$ и $x_3^* = 165$. Эти решения получаются округлением до ближайших целых значений. Максимальная прибыль от продажи лекарственных средств составит 18820 рублей.

2.4. Метод кусочно-линейной аппроксимации задачи нелинейного программирования

Особенностью задачи (2.5) – (2.17) является то, что она содержит нели-

нейную целевую функцию (2.5) и линейные ограничения (2.6) – (2.17), что относит ее к классу задач нелинейного программирования.

К сожалению, задачи нелинейного программирования всегда решаются значительно труднее, чем задачи линейного программирования, – эффективные вычислительные приемы разработаны для решения лишь немногих типов задач. В то же время, существует большое разнообразие практических ситуаций, когда задачу нелинейного программирования можно свести к задаче линейного программирования.

К классу задач нелинейного программирования, изученному наиболее основательно, относятся задачи с линейными ограничениями и нелинейной целевой функцией. Причем эффективные вычислительные методы разработаны лишь в тех случаях, когда целевая функция имеет определенные свойства. Два из них представляют особый интерес [113].

В первом случае целевая функция может быть записана как сумма линейной и квадратичной форм, так что

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + d_{11} x_1^2 + d_{12} x_1 x_2 + \dots + d_{1n} x_1 x_n + \dots + d_{nn} x_n^2. \quad (2.21)$$

Такие нелинейные задачи называются задачами квадратичного программирования.

Во втором случае целевая функция может быть записана как сумма n функций, каждая из которых является функцией только одной переменной, т.е.

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n). \quad (2.22)$$

Если целевая функция может быть записана в форме (2.22), она называется сепарабельной.

Метод кусочно-линейной аппроксимации применим к задачам, в которых все нелинейные функции сепарабельны. Идея заключается в построении задачи на условный оптимум, которая является линейной аппроксимацией

исходной задачи.

Для простоты изложения рассмотрим произвольную непрерывную функцию $f(x)$ одной переменной, определенной на интервале $0 \leq x \leq \alpha$. Функция $f(x)$ может, например, иметь вид, показанный на рис. 2.4.

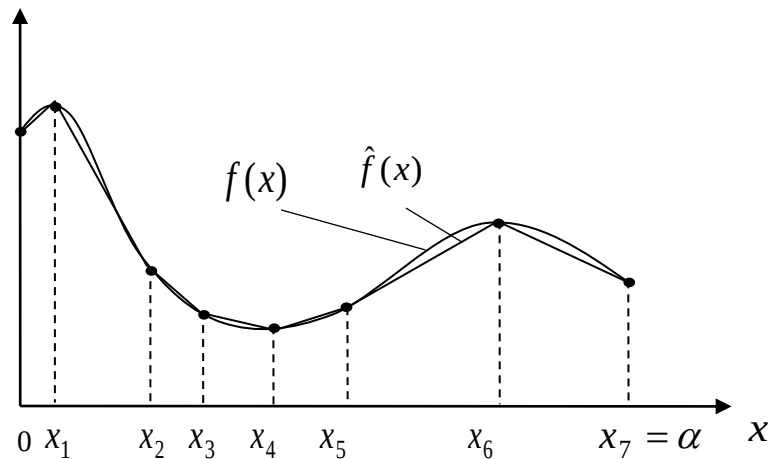


Рис.2.4. Кусочно-линейная аппроксимация функции $f(x)$

Выберем на интервале $0 \leq x \leq \alpha$ $r+1$ точек x_k так, что $x_0 = 0$, $x_1 < x_2 < \dots < x_r = \alpha$. Вычислим для каждой точки x_k величину $f(x_k)$. Соединим попарно точки $(x_k, f(x_k))$ и $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, $k=0, \dots, r-1$, отрезками прямых. Получим, таким образом, кусочно-линейную функцию, которая аппроксимирует функцию $f(x)$ на интервале $0 \leq x \leq \alpha$.

Эту кусочно-линейную функцию обозначим через $\hat{f}(x)$. Такая аппроксимация может быть выполнена с любой точностью за счет выбора точек x_k .

Далее найдем аналитическую запись кусочно-линейной функции $\hat{f}(x)$. Если x лежит в интервале $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, мы аппроксимируем $f(x)$ следующей функцией $\hat{f}(x)$:

$$\hat{f}(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k). \quad (2.23)$$

Отметим, что любое значение x в интервале $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ можно представить в виде $x = \lambda x_{k+1} + (1 - \lambda)x_k$ за счет выбора некоторого λ , $0 \leq \lambda \leq 1$. Отсюда $x - x_k = \lambda(x_{k+1} - x_k)$, и выражение (2.23) может быть переписано в виде $\hat{f}(x) = \lambda f(x_{k+1}) + (1 - \lambda)f(x_k)$. Если принять $\lambda = \lambda_{k+1}$, а $(1 - \lambda) = \lambda_k$, можно утверждать, что при фиксированном x , $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, существуют единственные значения λ_k и λ_{k+1} , такие, что

$$\begin{aligned} x &= \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}, \\ \hat{f}(x) &= \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}), \\ \lambda_k + \lambda_{k+1} &= 1, \quad \lambda_k, \lambda_{k+1} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

На самом деле для любого x , $0 \leq x \leq \alpha$, можно записать

$$x = \sum_{k=0}^r \lambda_k x_k, \quad (2.25)$$

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^r \lambda_k f(x_k), \quad (2.26)$$

$$\sum_{k=0}^r \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0, \quad k = \overline{0, r}, \quad (2.27)$$

условившись, что положительным может быть либо одно λ_k , либо максимум два соседних λ_k и λ_{k+1} . Для x , выраженного с помощью (2.25), функция $\hat{f}(x)$, имеющая вид (2.26), является аналитическим выражением ломаной, изображенной на рис.2.4. Поскольку любую непрерывную функцию можно приблизить ломаной, следовательно, любую непрерывную функцию можно описать выражениями (2.25) – (2.27).

Вернемся к задаче нелинейного программирования. Пусть требуется найти максимальное значение в задаче следующего вида:

$$f = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \rightarrow \max, \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n g_{ij}(x_i) \{\leq, =, \geq\} b_j, & j = \overline{1, m}, \\ x_i \geq 0, & i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Здесь предполагается, что целевая функция и все функции в ограничениях являются сепарабельными.

Чтобы найти решение задачи (2.28), (2.29) функции $f_i(x_i)$ и $g_{ij}(x_i)$ заменим кусочно-линейными функциями $\hat{f}_i(x_i)$ и $\hat{g}_{ij}(x_i)$. Заменим, таким образом, задачу (2.28), (2.29) следующей задачей:

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^n \hat{f}_i(x_i) \rightarrow \max, \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \hat{g}_{ij}(x_i) \{\leq, =, \geq\} b_j, & j = \overline{1, m}, \\ x_i \geq 0, & i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Задачу (2.30), (2.31) будем называть приближенной задачей для задачи (2.28), (2.29).

Допустим, что определено α_i – максимальное значение, которое может принимать переменная x_i . Разобьем $0 \leq x_i \leq \alpha_i$ на r_i подинтервалов с помощью $r_i + 1$ точек x_{ki} , так что $x_{0i} = 0$, $x_{r_i} = \alpha_i$. Тогда функции $\hat{f}_i(x_i)$ и $\hat{g}_{ij}(x_i)$ можно записать в виде

$$\hat{f}_i(x_i) = \sum_{k=0}^{r_i} \lambda_{ki} f_{ki}, \quad f_{ki} = f_i(x_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.32)$$

$$\hat{g}_{ij}(x_i) = \sum_{k=0}^{r_i} \lambda_{ki} g_{kij}, \quad g_{kij} = g_{ij}(x_k), \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.33)$$

где

$$x_i = \sum_{k=0}^{r_i} \lambda_{ki} x_{ki}, \quad (2.34)$$

$$\sum_{k=0}^{r_i} \lambda_{ki} = 1, \quad \lambda_{ki} \geq 0 \text{ при всех } k \text{ и } i, \quad (2.35)$$

помня, что для данного x_i положительными могут быть либо одно λ_{ki} , либо как максимум два соседних λ_{ki} и $\lambda_{k+1,i}$.

Подставляя теперь в (2.30) выражения функций $\hat{f}_i(x_i)$ (2.32), а в (2.31) функции $\hat{g}_{ij}(x_i)$ в соответствии с (2.33) переходим к следующей форме приближенной задачи с переменными λ_{ki} вместо x_i :

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{r_i} f_{ki} \lambda_{ki} \rightarrow \max, \quad (2.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{r_i} g_{kij} \lambda_{ki} \{ \leq, =, \geq \} b_j, \quad j = \overline{1, m}, \\ \sum_{k=0}^{r_i} \lambda_{ki} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \\ \lambda_{ki} \geq 0, \quad k = \overline{0, r_i}, \quad i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (2.37)$$

В результате приближенная задача в форме (2.36), (2.37) становится задачей линейного программирования, которая может быть решена симплексным методом. Найденные в результате решения задачи (2.36), (2.37) значения λ_{ki} используются для определения приближенных значений x_i в соответствии с соотношениями (2.34).

Очевидно, что при аппроксимации размерность задачи возрастает, но поскольку в качестве метода решения используется симплексный метод, данный алгоритм имеет значительную практическую ценность.

Чтобы продемонстрировать использование метода аппроксимации найдем решение следующей задачи нелинейного программирования:

$$z = 2x_1 - x_1^2 + x_2 \rightarrow \max,$$

$$2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 6,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

И целевая функция и ограничение являются сепарабельными, т.е. могут быть записаны в виде $f = f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$. Целевую функцию $z = 2x_1 - x_1^2 + x_2$ можно записать как $z = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, где $f_1(x_1) = 2x_1 - x_1^2$, $f_2(x_2) = x_2$, ограничение $2x_1^2 + 3x_2^2$ как $g_1(x_1) = 2x_1^2$ и $g_2(x_2) = 3x_2^2$.

Заметим, что x_1 и x_2 не могут иметь значения больше 2. Допустим, что точки x_{kj} мы выбрали равноотстоящими с интервалом 0,25. Отсюда для каждого x_j будет девять λ_{kj} . Тогда приближенная задача с 18 переменными примет следующий вид:

$$\hat{z} = \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^8 f_{kj} \lambda_{kj} \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^8 g_{kj} \lambda_{kj} \leq 6,$$

$$\sum_{k=0}^8 \lambda_{k1} = 1, \quad \sum_{k=0}^8 \lambda_{k2} = 1,$$

$$\lambda_{k1} \geq 0, \quad \lambda_{k2} \geq 0, \text{ при всех } k.$$

Значения функций g_{kj} и f_{kj} представлены в табл.2.8.

Таблица 2.8

Значения функций g_{kj} и f_{kj}

x_1 или x_2	$g_1(x_1)$	$f_1(x_1)$	$g_2(x_2)$	$f_2(x_2)$
0	0	0	0	0
0,25	1,1250	0,4375	0,1875	0,2500
0,50	0,5000	0,7500	0,7500	0,5000
0,75	1,1250	0,9375	1,6875	0,7500
1,00	2,0000	1,0000	3,0000	1,0000

x_1 или x_2	$g_1(x_1)$	$f_1(x_1)$	$g_2(x_2)$	$f_2(x_2)$
1,25	3,1250	0,9375	4,6875	1,2500
1,50	4,5000	0,7500	6,7500	1,5000
1,75	6,1250	0,4375	9,1875	1,7500
2,00	8,0000	0	12,0000	2,0000

Представим подробно приближенную задачу:

$$\hat{z} = 0 \cdot \lambda_{01} + 0,4375\lambda_{11} + 0,75\lambda_{21} + 0,9375\lambda_{31} + 1 \cdot \lambda_{41} + 0,9375\lambda_{51} + 0,75\lambda_{61} + \\ + 0,4375\lambda_{71} + 0 \cdot \lambda_{81} + 0 \cdot \lambda_{02} + 0,25\lambda_{12} + 0,5\lambda_{22} + 0,75\lambda_{32} + 1 \cdot \lambda_{42} + \\ + 1,25\lambda_{52} + 1,5\lambda_{62} + 1,75\lambda_{72} + 2\lambda_{82} \rightarrow \max,$$

$$0 \cdot \lambda_{01} + 1,125\lambda_{11} + 0,5\lambda_{21} + 1,125\lambda_{31} + 2\lambda_{41} + 3,125\lambda_{51} + 4,5\lambda_{61} + \\ + 6,125\lambda_{71} + 8\lambda_{81} + 0 \cdot \lambda_{02} + 0,1875\lambda_{12} + 0,75\lambda_{22} + 1,6875\lambda_{32} + 3\lambda_{42} + \\ + 4,6875\lambda_{52} + 6,75\lambda_{62} + 9,1875\lambda_{72} + 12\lambda_{82} \leq 6,$$

$$\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} + \lambda_{71} + \lambda_{81} = 1,$$

$$\lambda_{02} + \lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{32} + \lambda_{42} + \lambda_{52} + \lambda_{62} + \lambda_{72} + \lambda_{82} = 1,$$

$$\lambda_{01} \geq 0, \lambda_{11} \geq 0, \lambda_{21} \geq 0, \lambda_{31} \geq 0, \lambda_{41} \geq 0, \lambda_{51} \geq 0, \lambda_{61} \geq 0, \lambda_{71} \geq 0, \lambda_{81} \geq 0,$$

$$\lambda_{02} \geq 0, \lambda_{12} \geq 0, \lambda_{22} \geq 0, \lambda_{32} \geq 0, \lambda_{42} \geq 0, \lambda_{52} \geq 0, \lambda_{62} \geq 0, \lambda_{72} \geq 0, \lambda_{82} \geq 0.$$

Приближенная задача является задачей линейного программирования, ее решение находится симплексным методом линейного программирования.

Максимум задачи составляет $\hat{z}^* = 2,2102$. Он достигается в точке $\lambda_{01}^* = 0$,

$$\lambda_{11}^* = 0, \lambda_{21}^* = 0, \lambda_{31}^* = 1, \lambda_{41}^* = 0, \lambda_{51}^* = 0, \lambda_{61}^* = 0, \lambda_{71}^* = 0, \lambda_{81}^* = 0, \lambda_{02}^* = 0, \lambda_{12}^* = 0,$$

$$\lambda_{22}^* = 0, \lambda_{32}^* = 0, \lambda_{42}^* = 0, \lambda_{52}^* = 0,9091, \lambda_{62}^* = 0,0909, \lambda_{72}^* = 0, \lambda_{82}^* = 0. \text{ Оптимальные}$$

значения $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ определяются в соответствии с (2.34) как $\hat{x}_1^* = \lambda_{31}x_{31} = 0,75$,

$$\hat{x}_2^* = \lambda_{52}x_{52} + \lambda_{62}x_{62} = 1,2726. \text{ Оптимальное же значение исходной задачи}$$

$$z^* = 2,213, x_1^* = 0,7906, x_2^* = 1,258. \text{ Видно, что решение приближенной задачи}$$

оказалось весьма близким к точному. Аппроксимация может быть сделана

еще более точной за счет более мелкого дробления интервалов для x_1 и x_2 .

Очевидно, что при аппроксимации размерность задачи возрастает, но поскольку в качестве метода решения используется симплексный метод линейного программирования данный алгоритм эффективен для решения задач большой размерности, позволяет найти глобальный оптимум задачи и имеет значительную практическую ценность для разработки автоматизированной системы управления товарным запасом в торговых организациях.

2.5. Пример решения задачи нахождения оптимального ассортимента товаров с помощью приближенной задачи линейного программирования

Рассмотрим решение нелинейной оптимизационной задачи из параграфа 2.3 с помощью приближенной задачи линейного программирования.

Ожидаемая прибыль от продажи трех лекарственных средств

$$Z = 11400 - 7x_1 - 108 \int_{x_1}^{\infty} (r_1 - x_1) f(r_1; 300, 80) dr_1 + 12600 - 4x_2 - 61 \int_{x_2}^{\infty} (r_2 - x_2) f(r_2; 600, 120) dr_2 + 9750 - 10x_3 - 285 \int_{x_3}^{\infty} (r_3 - x_3) f(r_3; 150, 30) dr_3$$

получается суммированием Z_1 , Z_2 и Z_3 , т.е. является сепарабельной и может быть записана как $Z = Z(x_1, x_2, x_3) = Z_1(x_1) + Z_2(x_2) + Z_3(x_3)$

Необходимо найти такие неотрицательные значения переменных x_1 , x_2 и x_3 , при которых выполняется ограничение

$$35x_1 + 20x_2 + 50x_3 \leq 30000.$$

Заметим, что x_1 , x_2 и x_3 не могут принимать значения больше 860, 1500 и 600 соответственно. Пусть точки x_{kj} являются равноотстоящими друг от друга с интервалом 10. Отсюда для x_1 будет 87 переменных λ_{k1} , для x_2 -

151 переменных λ_{k2} и для x_3 - 61 переменных λ_{k3} :

$$x_1 = \sum_{k=0}^{86} \lambda_{k1} x_{k1}, \quad x_2 = \sum_{k=0}^{150} \lambda_{k2} x_{k2}, \quad x_3 = \sum_{k=0}^{60} \lambda_{k3} x_{k3}.$$

Тогда приближенная задача с 299 переменными примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \sum_{k=0}^{86} Z_{k1} \lambda_{k1} + \sum_{k=0}^{150} Z_{k2} \lambda_{k2} + \sum_{k=0}^{60} Z_{k3} \lambda_{k3} \rightarrow \max, \\ 35 \sum_{k=0}^{86} \lambda_{k1} x_{k1} + 20 \sum_{k=0}^{150} \lambda_{k2} x_{k2} + 50 \sum_{k=0}^{60} \lambda_{k3} x_{k3} &\leq 30000, \\ \sum_{k=0}^{86} \lambda_{k1} &= 1, \quad \sum_{k=0}^{150} \lambda_{k2} = 1, \quad \sum_{k=0}^{60} \lambda_{k3} = 1, \\ \lambda_{k1} &\geq 0, \quad \lambda_{k2} \geq 0, \quad \lambda_{k3} \geq 0, \quad \text{при всех } k. \end{aligned}$$

Значения x_{kj} и соответствующие им значения функций Z_{kj} в приближенной задаче представлены в табл.2.9.

Таблица 2.9

Значения функций Z_{kj}

x_{k1}	$Z_{k1}(x_{k1})$	x_{k2}	$Z_{k2}(x_{k2})$	x_{k3}	$Z_{k3}(x_{k3})$
0	-21000	0	-24000	0	600
10	-19990	10	-23430	10	1100
20	-18980	20	-22860	20	1620
30	-17970	30	-22290	30	2130
40	-16960	40	-21720	40	2640
50	-15950	50	-21150	50	3150
60	-14940	60	-20580	60	3659
70	-13940	70	-20010	70	4168
80	-12930	80	-19449	80	4674
90	-11920	90	-18870	90	5174
100	-10920	100	-18300	100	5664

x_{k1}	$Z_{k1}(x_{k1})$	x_{k2}	$Z_{k2}(x_{k2})$	x_{k3}	$Z_{k3}(x_{k3})$
110	-9915	110	-17730	110	6132
120	-8917	120	-17160	120	6568
130	-7922	130	-16590	130	6953
140	-6923	140	-16020	140	7275
150	-5952	150	-15450	150	7520
160	-4980	160	-14880	160	7685
170	-4018	170	-14310	170	7773
180	-3073	180	-13740	180	7798
190	-2145	190	-13170	190	7772
200	-1237	200	-12600	200	7714
210	-354,152	210	-12030	210	7634
220	500,154	220	-11460	220	7544
230	1322	230	-10890	230	7448
240	2107	240	-10320	240	7349
250	2851	250	-9754	250	7250
260	3551	260	-9185	260	7150
270	4204	270	-8617	270	7050
280	4806	280	-8049	280	6950
290	5356	290	-7481	290	6850
300	5853	300	-6915	300	6750
310	6296	310	-6349	310	6650
320	6686	320	-5784	320	6550
330	7024	330	-5221	330	6450
340	7311	340	-4659	340	6350
350	7551	350	-4100	350	6250
360	7747	360	-3542	360	6150
370	7902	370	-2987	370	6050
380	8020	380	-2436	380	5950
390	8106	390	-1888	390	5850

x_{k1}	$Z_{k1}(x_{k1})$	x_{k2}	$Z_{k2}(x_{k2})$	x_{k3}	$Z_{k3}(x_{k3})$
400	8163	400	-1345	400	5750
410	8195	410	-806,93	410	5650
420	8207	420	-274,526	420	5550
430	8201	430	251,29	430	5450
440	8180	440	769,668	440	5350
450	8148	450	1280	450	5250
460	8107	460	1780	460	5150
470	8058	470	2271	470	5050
480	8003	480	2750	480	4950
490	7945	490	3217	490	4850
500	7883	500	3671	500	4750
510	7818	510	4110	510	4650
520	7752	520	4534	520	4550
530	7685	530	4942	530	4450
540	7617	540	5232	540	4350
550	7548	550	5705	550	4250
560	7479	560	6059	560	4150
570	7409	570	6394	570	4050
580	7359	580	6709	580	3950
590	7270	590	7005	590	3850
600	7200	600	7280	600	3750
610	7130	610	7535		
620	7060	620	7769		
630	6990	630	7984		
640	6920	640	8179		
650	6850	650	8355		
660	6780	660	8512		
670	6710	670	8652		
680	6640	680	8774		

x_{k1}	$Z_{k1}(x_{k1})$	x_{k2}	$Z_{k2}(x_{k2})$	x_{k3}	$Z_{k3}(x_{k3})$
690	6570	690	8880		
700	6500	700	8971		
710	6430	710	9047		
720	6360	720	9110		
730	6290	730	9161		
740	6220	740	9200		
750	6150	750	9230		
760	6080	760	9250		
770	6010	770	9261		
780	5940	780	9265		
790	5870	790	9263		
800	5800	800	9255		
810	5730	810	9242		
820	5660	820	9224		
830	5590	830	9203		
840	5520	840	9178		
850	5450	850	9150		
860	5380	860	9121		
		870	8985		
		880	9056		
		890	9021		
		900	8985		
		910	8949		
		920	8911		
		930	8873		
		940	8835		
		950	8796		
		960	8757		
		970	8718		

x_{k1}	$Z_{k1}(x_{k1})$	x_{k2}	$Z_{k2}(x_{k2})$	x_{k3}	$Z_{k3}(x_{k3})$
		980	8678		
		990	8639		
		1000	8599		
		1010	8559		
		1020	8520		
		1030	8480		
		1040	8440		
		1050	8360		
		1060	8360		
		1070	8230		
		1080	8280		
		1090	8240		
		1100	8200		
		1110	8160		
		1120	8120		
		1130	8080		
		1140	8040		
		1150	8000		
		1160	7960		
		1170	7920		
		1180	7880		
		1190	7840		
		1200	7800		
		1210	7760		
		1220	7720		
		1230	7680		
		1240	7640		
		1250	7600		
		1260	7560		

x_{k1}	$Z_{k1}(x_{k1})$	x_{k2}	$Z_{k2}(x_{k2})$	x_{k3}	$Z_{k3}(x_{k3})$
		1270	7520		
		1280	7480		
		1290	7440		
		1300	7400		
		1310	7360		
		1320	7320		
		1330	7280		
		1340	7240		
		1350	7200		
		1360	7160		
		1370	7120		
		1380	7080		
		1390	7040		
		1400	7000		
		1410	6960		
		1420	6920		
		1430	6880		
		1440	6840		
		1450	6800		
		1460	6760		
		1470	6720		
		1480	6680		
		1490	6640		
		1500	6600		

Максимум задачи составляет $\hat{Z}^* = 19520$. Он достигается при $x_1^* = 290$, $x_2^* = 570$, $x_3^* = 170$. Видно, что решение приближенной задачи оказалось достаточно близким к точному.

ВЫВОДЫ:

1. Разработана математическая модель задачи определения оптимального ассортимента товаров в торговых организациях при случайном спросе на товар, в которой реализована вероятностная оценка эффективности ассортимента товаров и их запасов.

2. Показано, что спрос на товары хорошо описывается нормальным законом распределения вероятностей, поскольку зависит от огромного числа независимых случайных слагаемых с различными законами распределения, суммарное воздействие которых стремится к нормальному закону.

3. Поставленная задача оптимизации ассортимента товаров сформулирована в виде задачи нелинейного программирования с нелинейной сепарабельной целевой функцией и линейными ограничениями. Предложен эффективный вычислительный алгоритм, основанный на методе кусочно-линейной аппроксимации нелинейной целевой функции, позволяющий свести задачу нелинейного программирования к задаче линейного программирования, который легко реализуется на ЭВМ.

ГЛАВА 3

УПРАВЛЕНИЕ ТОВАРНЫМИ ЗАПАСАМИ В РОЗНИЧНОЙ ТОРГОВЛЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

3.1. Управление запасами товаров на основе теории массового обслуживания

Когда вопрос с ассортиментом решен, т. е. установлено какие товары или группы товаров следует иметь в торговой организации и в каких объемах, необходимо выработать стратегию заказов, т.е. определить, в какой момент и в каком количестве заказывать товары.

Обзор работ в первой главе показал, что многие ситуации управления запасами можно рассматривать как задачи массового обслуживания – не только в том смысле, что покупатели могут простоять в очереди за товарами, но и в том смысле, что товары, ожидающие покупателей, также образуют очереди. Если покупатели отсутствуют, то запасы товаров увеличиваются. Если нет очереди товаров (нет запасов), то имеет место дефицит, покупатели не обслуживаются. Если в качестве требований и заявок в системе массового обслуживания считать запасенные товары, а обслуживающие устройства – покупателей товаров, то зная интенсивность прибытия покупателей, можно определить оптимальную интенсивность поступления товаров в условиях тех или иных ограничений.

Хотя нельзя точно предсказать, какова будет длина очереди товаров (объем запасенных товаров) в любой заданный момент времени, все же некоторые свойства очередей можно предвидеть даже в том случае, когда интенсивность поступления требований и интенсивность обслуживания испытывают значительные колебания.

Теория массового обслуживания является известным разделом иссле-

дования операций и была разработана для того, чтобы создавать модели для прогнозирования состояний системы, которая предназначена обеспечить обслуживание по случайно возникающим запросам [11, 15, 57, 95].

Первые исследования систем массового обслуживания принадлежат А.К. Эрлангу, который еще в 1909 году опубликовал работу «Теория вероятностей и телефонные разговоры» в которой исследовал проблему перегрузки телефонных станций. Он пришел к выводу, что работа телефонных станций характеризуется: 1) законом распределения Пуассона для входящего случайного потока запросов; 2) экспоненциальным законом распределения для случайного времени обслуживания [11]. Работа по применению этой теории была продолжена Молиной в 1927 году в работе «Приложение теории вероятностей к проблемам телефонной связи», где он развил идеи Эрланга. Дальнейшие исследования в этой области были проведены Колмогоровым в 1931 году в его работе «О проблеме ожидания». Впоследствии множество задач было поставлено и решено современными исследователями.

Было замечено, что нормальное распределение, которое хорошо согласуется с опытными данными о поступлении запросов хорошо аппроксимируется распределением Пуассона, поэтому не удивительно частое появление последнего в качестве подходящего распределения для описания входных потоков в систему массового обслуживания [11, 15, 95].

Пуассоновский поток имеет место тогда, когда выполняются следующие два допущения:

1. Общее число поступлений в течение данного интервала времени не зависит от числа поступлений, уже имевших место до начала этого интервала.

2. Для любого интервала $(t, t + \Delta t)$ вероятность того, что произойдет точно одно поступление, равна λdt , где λ есть постоянная величина, представляющая собой средний темп поступлений (число поступлений за единицу времени) входящего потока. Отсюда следует, что $1/\lambda$ есть средняя длина

интервала времени между двумя последовательными поступлениями.

Систему массового обслуживания можно описать с помощью следующих характеристик:

- 1) распределение входящего потока или распределение числа требований, поступающих в обслуживающее устройство;
- 2) число каналов, длительности обслуживания в которых можно охарактеризовать некоторой функцией распределения;
- 3) дисциплина очереди, т. е. порядок выбора клиентов для обслуживания. Обычно в большинстве случаев обслуживание производится по принципу «первым прибыл первым обслужен», однако возможны и другие дисциплины очереди. Из других порядков обслуживания можно назвать случайный выбор клиентов для обслуживания (как в телефонных системах), обслуживание клиентов на основе назначения приоритета (как во многих военных системах) или одновременное обслуживание группы клиентов (как в некоторых телефонных коммутационных системах и в медицинских клиниках).

3.2. Стратегия непрерывного пополнения запасов

Пусть поступление товаров в магазин происходит с интенсивностью λ и имеет пуассоновское распределение. Прибытие клиентов в магазин происходит с интенсивностью μ и также характеризуется пуассоновским распределением. Будем считать, что интенсивности λ и μ не зависят от времени.

Обозначим через S_n состояние системы, имея в виду, что система находится в состоянии S_n , когда в магазине присутствует n товаров, как «обслуживаемых» покупателями, так и ожидающих обслуживания. Система выходит из состояния S_n в состояние S_{n+1} , когда прибывает дополнительная единица товара, или в состояние S_{n-1} , когда товар куплен покупателем. Служ-

чайный процесс, протекающий в системе S , можно трактовать как процесс блуждания системы в цепи состояний, в которой каждое состояние S_n (кроме двух крайних S_0 и S_N) связано прямой и обратной связью с двумя соседними S_{n-1} , S_{n+1} , а каждое из двух крайних связано прямой и обратной связью только с одним соседним. Схема случайного процесса движения товаров представлена на рис.3.1.

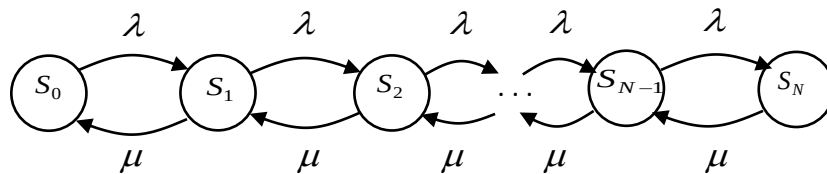


Рис.3.1. Случайный процесс движения товаров
с конечным множеством состояний

Такая схема случайного процесса получила название «гибели и размножения», а сам процесс – процессом «гибели и размножения» [15].

Термин «процесс гибели и размножения» ведет начало от биологических задач, где такими процессами описывается изменение численности биологических популяций; стрелки, ведущие слева направо, соответствуют увеличению численности (размножению) популяции, а справа налево – гибели популяций. Очевидно, что схема «гибели и размножения» далеко выходит за пределы биологических задач.

Интенсивности пуассоновских потоков событий, ведущих к уменьшению товаров, обозначены как μ , а к увеличению как λ .

Обозначим через P_n вероятность того, что в наличии имеются n единиц товара (P_0 – вероятность того, что товар отсутствует), а через dP_n/dt – скорость изменения состояния S_n . Тогда скорость изменения размеров запаса товара можно определить с помощью уравнений Колмогорова [15]:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1, \quad (3.1)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -(\lambda + \mu)P_1 + \lambda P_0 + \mu P_2, \quad (3.2)$$

...

$$\frac{dP_n}{dt} = -(\lambda + \mu)P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}. \quad (3.3)$$

В случае конечного числа единиц товара к системе уравнений (3.1) – (3.3) добавляется выражение:

$$\frac{dP_N}{dt} = -\mu P_N + \lambda P_{N-1}, \quad (3.4)$$

где N – максимальное число товаров.

Очевидно, что для системы с дискретными состояниями $S_0, S_1, \dots, S_N$ в любой момент времени сумма вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=0}^N P_i = 1, \quad (3.5)$$

как сумма вероятностей полной группы несовместимых событий.

Систему уравнений (3.1) – (3.5) нужно решать при начальных условиях $P_i(0) \geq 0$ ($i = \overline{0, N}$), при выполнении требования (3.5). Так, например, если в начальный момент времени $t = 0$ в магазине отсутствовал товар, то решать систему уравнений (3.1) – (3.5) следует при начальных условиях $P_0(0) = 1$, $P_i(0) = 0$ ($i = \overline{1, N}$).

При постоянных интенсивностях потоков и конечном числе состояний существует стационарный режим. В стационарном режиме процесс будет менять свои состояния, переходя из одного в другое, но вероятности этих состояний уже не зависят от времени. Их можно трактовать, как среднее относительное время пребывания процесса в соответствующих состояниях.

Нас и интересует стационарное решение. Значения вероятностей для случайного процесса, находящегося в стационарном режиме, могут быть по-

лучены из системы (3.1) – (3.4), в которой $dP_n / dt = 0$ для всех n

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1, \quad (3.6)$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_1 + \lambda P_0 + \mu P_2, \quad (3.7)$$

...

$$0 = -(\lambda + \mu)P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, \quad (3.8)$$

...

$$0 = -\mu P_N + \lambda P_{N-1}. \quad (3.9)$$

Найдем решение этой системы однородных алгебраических уравнений.
Из первого уравнения получим:

$$\lambda P_0 = \mu P_1.$$

Из второго имеем

$$\mu P_2 = (\lambda + \mu)P_1 - \lambda P_0,$$

но поскольку $\lambda P_0 = \mu P_1$, следовательно

$$\mu P_2 = (\lambda + \mu)P_1 - \mu P_1 = \lambda P_1.$$

Далее

$$\mu P_3 = (\lambda + \mu)P_2 - \lambda P_1,$$

но $\lambda P_1 = \mu P_2$, откуда

$$\mu P_3 = (\lambda + \mu)P_2 - \mu P_2 = \lambda P_2$$

и т.д. Проводя такую рекуррентную процедуру, можно доказать, что

$$\mu P_i = \lambda P_{i-1} \quad (i = \overline{1, N}). \quad (3.10)$$

Из равенства (3.10) получаем

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0, P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} P_0, P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} P_0 \text{ и т.д.} \quad (3.11)$$

Таким образом, любую вероятность P_i ($i = \overline{1, N}$) можно выразить через вероятность P_0 .

$$\text{Поскольку } \sum_{i=0}^N P_i = 1, \text{ следовательно } P_0 = 1 - \sum_{i=1}^N P_i,$$

откуда

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}. \quad (3.12)$$

Введем параметр $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, который представляет собой приведенную интенсивность потока. Выражения для вероятностей P_i получим из (3.11):

$$P_i = \rho^i P_0, i = \overline{1, N}. \quad (3.13)$$

Значение P_0 найдем из соотношения (3.12), которое с учетом введенного параметра ρ примет вид:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \rho^i} \quad (3.14)$$

или

$$P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^{N-1} + \rho^N) = 1. \quad (3.15)$$

Суммируя прогрессию с первым членом 1 и значением ρ , находим:

$$P_0 = \frac{1}{(1 - \rho^{N+1})/(1 - \rho)} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}. \quad (3.16)$$

Таким образом, формулы (3.13) и (3.14) окончательно примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \\ P_1 = \rho P_0, \\ P_2 = \rho^2 P_0, \\ P_3 = \rho^3 P_0, \\ \dots \\ P_N = \rho^N P_0. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Следует обратить внимание на то, что формула (3.16) справедлива только при $\rho \neq 1$ (при $\rho = 1$ она дает неопределенность вида 0/0). При $\rho = 1$

геометрическая прогрессия в формуле (3.15) равна $N + 1$, а $P_0 = \frac{1}{N + 1}$. Этот результат можно получить, раскрывая неопределенность (3.16) по правилу Лопиталя [15]

Важным показателем в системе управления запасами является $\bar{n}$ – среднее число ожидаемых товаров (средний объем запасенного товара), находящихся в системе.

Среднее число единиц наличного товара, находящихся в системе в стационарном режиме определяется по формуле

$$\bar{n} = \sum_{i=0}^N iP_i = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \dots + N \cdot P_N \quad (3.18)$$

или

$$\bar{n} = 1 \cdot \rho P_0 + 2 \cdot \rho^2 P_0 + 3 \cdot \rho^3 P_0 + \dots + N \cdot \rho^N P_0. \quad (3.19)$$

Вынесем в (3.19) ρP_0 за скобки:

$$\bar{n} = \rho P_0 (1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots + N\rho^{N-1}). \quad (3.20)$$

Выведем формулу для суммы, стоящей в скобках (3.20). Очевидно, рассматриваемая сумма представляет собой производную по ρ от суммы

$$\rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^N,$$

а так как сумма $\rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^N$ равна $\frac{\rho - \rho^{N+1}}{1 - \rho}$ [15] продифференци-

руем $\frac{\rho - \rho^{N+1}}{1 - \rho}$ по ρ :

$$\left(\frac{\rho - \rho^{N+1}}{1 - \rho} \right)' = \frac{1 - \rho^N (N + 1 - N\rho)}{(1 - \rho)^2}.$$

Таким образом найдено выражение для суммы $1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots + N\rho^{N-1}$ в правой части (3.20).

Подставляя его в (3.20), получим

$$\bar{n} = \rho P_0 \frac{1 - \rho^N (N + 1 - N\rho)}{(1 - \rho)^2}.$$

Учитывая, что $P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}$, имеем:

$$\bar{n} = \rho \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \cdot \frac{1 - \rho^N (N + 1 - N\rho)}{(1 - \rho)^2}$$

или, окончательно

$$\bar{n} = \frac{\rho(1 - \rho^N (N + 1 - N\rho))}{(1 - \rho^{N+1})(1 - \rho)}. \quad (3.21)$$

Итак, получено выражение для среднего числа запасенных товаров в ожидании покупателей на горизонте планирования.

Ожидаемое число единиц товара, реализованного за единицу времени, равно

$$\bar{N} = \mu(1 - P_0)$$

или

$$\bar{N} = \mu \left(1 - \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \right). \quad (3.22)$$

Для задачи управления товарными запасами важнейшими показателями эффективности системы является стоимость, затраты и прибыль.

Обозначим через C_1 издержки выполнения заказа одной единицы товара, а через C_2 затраты на хранение единицы товара. Тогда $C_1\lambda$ – издержки выполнения заказа товара или $C_1\rho\mu$, а $C_2\bar{n}$ – затраты на хранение запасенного товара.

Пусть доход на единицу проданного товара равен Z . Тогда чистая прибыль на горизонте управления товарными запасами составит

$$F = Z\mu(1 - P_0) - C_1\rho\mu - C_2\bar{n}$$

или

$$F = Z\mu \left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \right) - C_1 \rho \mu - C_2 \frac{\rho(1-\rho^N(N+1-N\rho))}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)}. \quad (3.23)$$

Нас интересует значение ρ , максимизирующее прибыль F . В частности требуется найти значение интенсивности пополнения запаса товаров λ , максимизирующее прибыль F при известной интенсивности спроса на товары μ .

Беря производную от F по ρ и приравнявая ее к нулю, получим

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\rho} = & -Z\mu \left[\frac{1}{\rho^{N+1}-1} - \frac{\rho^N(N+1)(\rho-1)}{(\rho^{N+1}-1)^2} \right] - C_1\mu + \frac{C_2[\rho^N(N-N\rho+1)-1]}{(\rho-1)(\rho^{N+1}-1)} - \\ & \frac{C_2\rho[\rho^N(N-N\rho+1)-1]}{(\rho-1)^2(\rho^{N+1}-1)} - \frac{C_2\rho[N\rho^N - N\rho^{N-1}(N-N\rho+1)]}{(\rho-1)(\rho^{N+1}-1)} - \\ & - \frac{C_2\rho\rho^N(N+1)[\rho^N(N-N\rho+1)]}{(\rho-1)(\rho^{N+1}-1)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Преобразуем выражение (3.24), разложив его на множители, получим

$$\begin{aligned} & - \frac{C_2 - C_2\rho^N + C_1\mu - Z\mu + 2Z\mu\rho - C_2N^2\rho^N - C_2\rho^2\rho^N + C_1\mu\rho^2}{(\rho-1)^2(\rho\rho^N-1)^2} - \\ & - \frac{Z\mu\rho^2 + C_2\rho^2\rho^{2N} - 2C_2N\rho^N - 2C_1\mu\rho + 2Z\mu\rho^N}{(\rho-1)^2(\rho\rho^N-1)^2} + \\ & - \frac{4C_2N\rho\rho^N + NZ\mu\rho^N - 2C_1\mu\rho\rho^N - 2Z\mu\rho\rho^N - 2C_2N\rho^2\rho^N}{(\rho-1)^2(\rho\rho^N-1)^2} + \\ & - \frac{2C_2N^2\rho\rho^N + 4C_1\mu\rho^2\rho^N - 2C_1\mu\rho^3\rho^N + Z\mu\rho^2\rho^N}{(\rho-1)^2(\rho\rho^N-1)^2} + \\ & - \frac{C_1\mu\rho^4\rho^{2N} - 3NZ\mu\rho\rho^N + 3NZ\mu\rho^2\rho^N - C_2N^2\rho^2\rho^N}{(\rho-1)^2(\rho\rho^N-1)^2} + \\ & + \frac{C_1\mu\rho^2\rho^{2N} - 2C_1\mu\rho^3\rho^{2N}NZ\mu\rho^3\rho^N}{(\rho-1)^2(\rho\rho^N-1)^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Очевидно, что именно сумма числителей множителей выражения (3.25) дает равенство нулю (3.25).

Тогда достаточно найти корни следующего уравнения

$$\begin{aligned}
& -(C_2 - C_2 \rho^N + C_1 \mu - Z\mu + 2Z\mu\rho - C_2 N^2 \rho^N - C_2 \rho^2 \rho^N + C_1 \mu \rho^2 + Z\mu \rho^2 + C_2 \rho^2 \rho^{2N} - 2C_2 N \rho^N - \\
& - 2C_1 \mu \rho + 2Z\mu \rho^N + 4C_2 N \rho \rho^N + NZ\mu \rho^N - 2C_1 \mu \rho \rho^N - 2Z\mu \rho \rho^N - 2C_2 N \rho^2 \rho^N + 2C_2 N^2 \rho \rho^N + \\
& + 4C_1 \mu \rho^2 \rho^N - 2C_1 \mu \rho^3 \rho^N + Z\mu v^2 \rho^N + C_1 \mu \rho^4 \rho^{2N} - 3NZ\mu \rho \rho^N + 3NZ\mu \rho^2 \rho^N - C_2 N^2 v^2 \rho^N + \\
& + C_1 \mu \rho^2 \rho^{2N} - 2C_1 \mu \rho^3 \rho^{2N} NZ\mu \rho^3 \rho^N) = 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Решением (3.26) относительно ρ является уравнение

$$\rho^N = \frac{C_2(1 + \rho^2 \rho^{2N}) + Z\mu(1 + 2\rho - \rho^2) + C_1\mu(1 + \rho^2 - 2\rho + \rho^2 \rho^{2N} - 2\rho^3 \rho^{2N} + \rho^4 \rho^{2N})}{C_2(1 + \rho^2 + 2N + N^2 + 2N\rho^2 - 2N^2 \rho + N^2 \rho^2 - 4N\rho) + Z\mu(2\rho - 1 - \rho^2 - N + 3N\rho + N\rho^3) + C_1\mu\rho(2\rho^2 - 4\rho + 2)}. \tag{3.27}$$

Уравнение (3.27) является нелинейным уравнением. Методы решения нелинейных уравнений делятся на прямые (аналитические, точные) и итерационные. Прямые методы позволяют записать решение в виде некоторого соотношения (формулы). Однако подавляющее большинство нелинейных уравнений не удастся решить прямыми методами. В этих случаях приходится обращаться к численным методам, позволяющим получить приближенное решение корней с любой заданной точностью.

Для решения уравнения (3.27) можно воспользоваться любым численным методом решения нелинейных уравнений, например, методом Ньютона.

По найденному ρ и известному μ из выражения $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ легко рассчитаем интенсивность пополнения запасов λ .

Пример 3.1. Пусть спрос на товар составляет 60 единиц в неделю. Оформление заказа единицы товара обходится магазину в 9000 рублей, а доход от продажи единицы товара – 10000 рублей. Пусть стоимость хранения единицы товара в неделю 1500 рублей. Разместить в магазине можно не более 40 единиц товара.

Из (3.27) находим значение переменной $\rho = 0,87$, при котором критерий оптимальности (3.23) достигает максимума. Тогда оптимальное значение интенсивности пополнения запасов товара в неделю $\lambda = \mu\rho = 60 \cdot 0,87 = 52,2$. Округляя до целого значения, находим оптимальное целочисленное значение $\lambda = 52$.

Вероятность того, что в течение недели будет исчерпан запас товара равна

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} = \frac{1 - 0,87}{1 - 0,87^{41}} = 0,13.$$

Средний запас товара будет равен

$$\bar{n} = \frac{\rho(1 - \rho^N(N + 1 - N\rho))}{(1 - \rho^{N+1})(1 - \rho)} = \frac{0,87(1 - 0,87^{40}(40 + 1 - 40 \cdot 0,87))}{(1 - 0,87^{41})(1 - 0,87)} = 6,656$$

или 7 единиц.

Вероятность того, что в наличие имеется 8 и более единиц товара, т.е. более чем средний запас товара, равен

$$P(\geq 8) = \sum_{i=1}^{40} P_i = 0,374.$$

Ожидаемая реализация товара равна $\mu(1 - P_0) = 52,17$ или 52 единицы.

Прибыль от реализации товара составит 384 400 рублей.

Видно, что среднее количество единиц товара в очереди (средний запас товара) много меньше предельного значения (40 единиц), т.е. ограничение по количеству товара не является существенным.

Снимем это ограничение и устремим число товаров n к бесконечности. При этом число возможных состояний системы станет бесконечным и граф

состояний системы массового обслуживания примет вид, показанный на рис. 3.2.

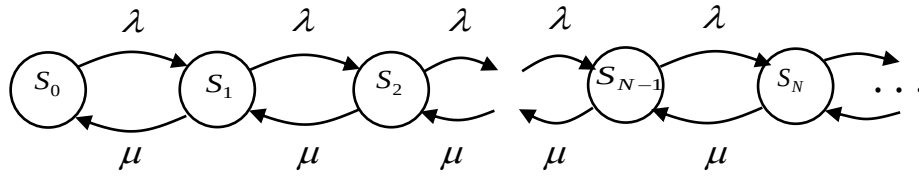


Рис.3.2. Случайный процесс движения товаров
с бесконечным множеством состояний

Найдем вероятности состояний системы с неограниченной очередью.

Заметим, что знаменатель в формуле (3.14) представляет собой сумму бесконечного числа членов геометрической прогрессии

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i}. \quad (3.28)$$

Эта сумма сходится только тогда, когда прогрессия бесконечно убывающая, т.е. при $\rho < 1$. Можно строго доказать, что $\rho < 1$ есть условие, при котором в системе на рис. 3.2 существует установившийся режим; при $\rho \geq 1$ такого режима не существует, и очередь при $t \rightarrow \infty$ растет до бесконечности.

В дальнейшем положим, что $\rho = \lambda / \mu < 1$. Это хорошо согласуется с задачей управления запасами товаров, поскольку с практической точки зрения задача имеет смысл лишь при $\rho < 1$, иначе наступит переизбыток товаров со всеми вытекающими последствиями.

Представим формулу (3.28) в следующем виде

$$P_0 = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots} \quad (3.29)$$

или

$$P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots) = 1. \quad (3.30)$$

Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем

$$P_0 = 1 - \rho. \quad (3.31)$$

С учетом (3.31) выражения для вероятностей состояний P_i принимают вид

$$P_i = \rho^i (1 - \rho), i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

Среднее число единиц наличного товара определяется по формуле

$$\bar{n} = \sum_{i=0}^{\infty} i P_i = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \dots \quad (3.33)$$

или

$$\bar{n} = 1 \cdot \rho P_0 + 2 \cdot \rho^2 P_0 + 3 \cdot \rho^3 P_0 + \dots \quad (3.34)$$

Вынесем в (3.34) ρP_0 за скобки:

$$\bar{n} = \rho P_0 (1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots). \quad (3.35)$$

или

$$\bar{n} = \rho (1 - \rho) (1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots). \quad (3.36)$$

Бесконечная сумма $1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots$ в (3.35) и (3.36) равна

$$1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots = \frac{1}{(1 - \rho)^2}. \quad (3.37)$$

Отсюда

$$\bar{n} = \rho (1 - \rho) \frac{1}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (3.36)$$

Учитывая, что прибыль от реализации товара составляет

$$F = Z\mu(1 - P_0) - C_1\rho\mu - C_2\bar{n}, \quad (3.37)$$

с учетом выражений (3.31) и (3.36) выражение (3.37) примет вид

$$F = Z\mu\rho - C_1\mu\rho - C_2 \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (3.38)$$

Найдем значение ρ , максимизирующее прибыль F от продажи товара.

Возьмем производную от F по ρ и приравняем ее нулю, получим

$$\frac{dF}{d\rho} = Z\mu - C_1\mu - \frac{C_2}{(\rho-1)^2} = 0. \quad (3.39)$$

Так как $\rho < 1$, решением полученного уравнения является корень, меньший единицы, т.е.

$$\rho = 1 - \frac{\sqrt{C_2}}{\sqrt{\mu} \cdot \sqrt{Z - C_1}}. \quad (3.40)$$

Для иллюстрации данных результатов решим задачу из примера 3.1 без ограничений на количество запасенного товара.

В соответствии с (3.40)

$$\rho = 1 - \frac{\sqrt{9000}}{\sqrt{60} \cdot \sqrt{10000 - 9000}} = 0,842;$$

$$\lambda = \mu\rho = 60 \cdot 0,842 = 50,52 \text{ или } 51 \text{ единица};$$

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - 0,842 = 0,158;$$

$$\bar{n} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0,842}{1 - 0,842} = 5,32.$$

Максимальная прибыль от реализации товара составит 382 900 рублей.

Следует заметить, что в сформулированной задаче нет ограничений к текущему уровню запасов. Допущение о бесконечности уровня запасов позволило упростить решение и получить удобное аналитическое выражение (3.40) для нахождения оптимальной интенсивности пополнения запасов. Однако такая формулировка допустима в задаче управления запасами, когда спрос на товары меньше максимально допустимого уровня запасов. Если же спрос выше допустимого уровня запасов оптимальную интенсивность пополнения запасов следует находить из выражения (3.27).

Модель с непрерывным пополнением запасов может найти эффективное применение для нахождения оптимальной стратегии пополнения запасов в торговых организациях, реализующих штучный товар, например, автомобили, дорогую мебель, ювелирные изделия и т.п., когда предприятию невы-

годно заказывать товар крупными партиями, а выгоднее штучное пополнение, но с широким ассортиментом.

Далее рассмотрим задачу управления запасами для случая пополнение запасов партиями.

3.3. Стратегия пополнения запасов партиями

Как и в модели с непрерывным пополнением запасов примем допущение, что покупатели прибывают за товаром с интенсивностью μ человек в единицу времени. Распределение спроса во времени является пуассоновским.

Если уровень запасов равен нулю, продажа товара не производится (неудовлетворенный спрос не одалживается).

Длительность промежутка времени от момента подачи заказа на пополнение запасов до момента поступления товара имеет показательное (экспоненциальное) распределение. При показательном законе и потоке событий с интенсивностью λ среднее время доставки заказа составляет $T = 1/\lambda$.

Пусть при уменьшении уровня запасов до критического уровня («точки заказа») P заказывается количество товара, равное Q единицам, таким образом, что

$$P + Q = M, \quad (3.41)$$

где M – максимальное количество товара, которое может принять торговая организация. Поскольку величина M для каждого наименования товаров была получена из решения задачи оптимизации ассортимента товаров и их объемов, определению подлежит либо точка заказа P для каждого наименования товара, либо объем заказа каждой партии Q . Очевидно, что установив любое из этих значений, второе можно найти из уравнения (3.41).

Пусть как и в предыдущей модели P_n есть вероятность того, что в наличии имеются n единиц товара.

Применение правила «заказывать Q единиц товара, когда уровень запасов уменьшится до P , и заказывать M единиц товара, когда уровень запасов уменьшается до нуля», означает, что:

- 1) система S переходит из состояния S_n в состояние S_{n-1} при продаже единицы товара с интенсивностью μ ;
- 2) система S переходит из состояния S_n ($n \neq 0$) в состояние S_{n+Q} и из состояния S_0 в состояние S_M , при пополнении запаса с интенсивностью λ .

Случайный процесс, протекающий, например, в системе S с шестью состояниями (максимальный запас товара равен пяти единицам, а точка заказа двум единицам товара), показан на рис. 3.3.

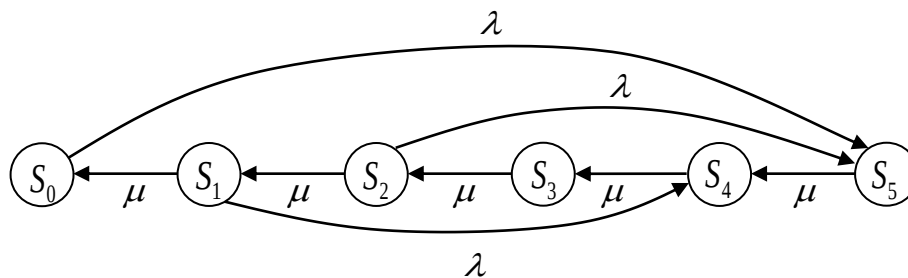


Рис. 3.3. Случайный процесс движения товаров
при заказе товара партиями

На рис. 3.3 видно, что при отсутствии товара делается заказ на пополнение запаса до максимального уровня. Далее, как только запас товара уменьшается до двух единиц (точки заказа) следует заказ товара в количестве трех единиц. Пополнение запаса может наступить до прибытия очередного покупателя (в этом случае система перейдет из состояния S_2 в состояние S_5), либо уже после прибытия очередного покупателя и продажи ему единицы товара (в этом случае система перейдет из состояния S_1 в состояние S_4) и т.д.

Например, для системы на рис. 3.3 получаем следующие уравнения для вероятностей состояний:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1, \quad (3.42)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -\lambda P_1 - \mu P_1 + \mu P_2, \quad (3.43)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\lambda P_2 - \mu P_2 + \mu P_3, \quad (3.44)$$

$$\frac{dP_3}{dt} = -\mu P_3 + \mu P_4, \quad (3.45)$$

$$\frac{dP_4}{dt} = \lambda P_1 - \mu P_4 + \mu P_5, \quad (3.46)$$

$$\frac{dP_5}{dt} = \lambda P_0 + \lambda P_2 - \mu P_5. \quad (3.47)$$

Стационарные решения системы уравнений (3.42) – (3.47) принимают вид:

$$P_1 = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right), \quad (3.48)$$

$$P_2 = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right), \quad (3.49)$$

$$P_3 = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^2, \quad (3.50)$$

$$P_4 = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^2, \quad (3.51)$$

$$P_5 = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\mu^2 + \mu\lambda + \lambda^2}{\mu^2} \right). \quad (3.52)$$

где

$$P_0 = \frac{\mu^3}{\mu^3 + 5\mu^2\lambda + 6\mu\lambda^2 + 3\lambda^2}. \quad (3.53)$$

Зависимости вероятностей состояния от времени при $\lambda = 9$ и $\mu = 10$ приведены на рис. 3.4. На рисунке видно, что в начальный момент (при $t = 0$) товар отсутствовал ($P_0 = 1$). С увеличением t вероятность P_0 уменьшается и в

пределе (при $t \rightarrow \infty$) стремится к $P_0 = \frac{\mu^3}{\mu^3 + 5\mu^2\lambda + 6\mu\lambda^2 + 3\lambda^2}$.

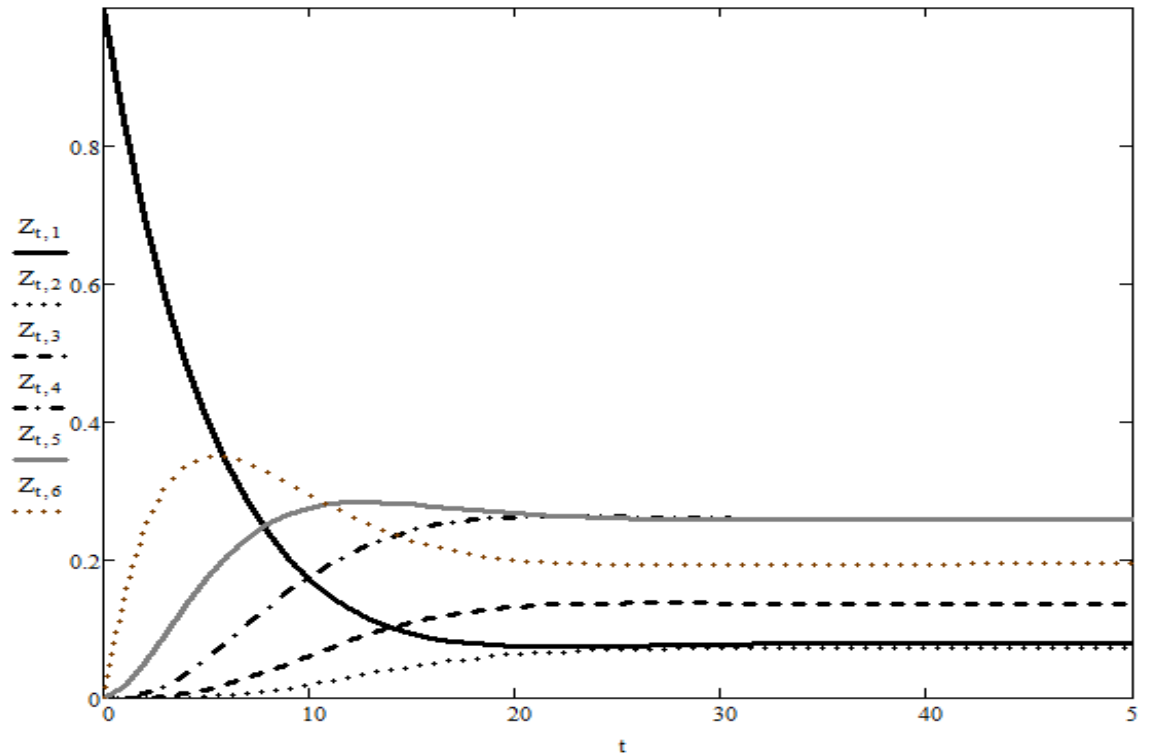


Рис. 3.4. Вероятности состояний в системе массового обслуживания

На том же графике видно, что значения вероятностей других состояний увеличиваются и в пределе, при $t \rightarrow \infty$, принимают значения $P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, $P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)$, $P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^2$, $P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)^3$ и $P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu^2+\mu\lambda+\lambda^2}{\mu^2}\right)$ для запасов, равных 1, 2, 3, 4 и 5 товарам соответственно. Видно, что чаще всего система находится в состояниях, когда объемы запасов товаров составляют 3 или 4 единицы.

Запишем в общем виде уравнения для вероятностей состояний системы с пополнением запасами партиями

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0 + \mu P_1, \quad (3.54)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = -\lambda P_n - \mu P_n + \mu P_{n+1}, \text{ для } n \leq P, \quad (3.55)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = -\mu P_n + \mu P_{n+1}, \text{ для } P < n \leq R, \quad (3.56)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda P_{n-R} - \mu P_n + \mu P_{n+1}, \text{ для } R < n < M, \quad (3.57)$$

$$\frac{dP_M}{dt} = \lambda P_0 + \lambda P_{M-R} - \mu P_M. \quad (3.58)$$

Стационарные решения системы уравнений (3.54) – (3.58):

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^{n-1}, \text{ для } 0 < n \leq P, \quad (3.59)$$

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P, \text{ для } P < n \leq M - P + 1, \quad (3.60)$$

$$P_n = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left[1 + \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P - \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^{n-Q-1} \right], \text{ для } M - P + 1 < n \leq M, \quad (3.61)$$

где

$$P_0 \approx \frac{\mu^{P+1}}{(\mu + \lambda)^P (\mu + Q\lambda)}. \quad (3.62)$$

Следует обратить внимание на то, что формулы (3.59) – (3.61) являются точными, тогда как формула (3.62) для расчета вероятности дефицита товаров является приближенной. Это связано с тем, что не удалось найти компактное аналитическое выражение для P_0 ².

Однако сравнение результатов расчетов вероятности P_0 , полученных по точным и приближенным выражениям, показало, что значения близки друг к другу (табл.3.1).

² Далее будет показано, что нахождение оптимального решения задачи управления запасами даже при компактных приближенных выражениях приводит к сложным математическим выкладкам.

Таблица 3.1

Сравнение вероятностей дефицита товаров P_0 , рассчитанных по точным и приближенным выражениям

Условия	Точная формула	Значение	Приближенная формула (3.66)	Значение	Абс. ошибка, Δ	Отн. ошибка, $\frac{\Delta}{\text{точн.зн.}} \cdot 100$
$M = 4, P = 1, Q = 3,$ $\mu = 10, \lambda = 9$	$P_0 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 4\mu\lambda + 3\lambda^2}$	0,142	$P_0 \approx \frac{\mu^2}{(\mu + \lambda)(\mu + 3\lambda)}$	0,142	0	0
$M = 4, P = 1, Q = 3,$ $\mu = 50, \lambda = 25$		0,267		0,267	0	0
$M = 5, P = 2, Q = 3,$ $\mu = 10, \lambda = 9$	$P_0 = \frac{\mu^3}{\mu^3 + 5\mu^2\lambda + 6\mu\lambda^2 + 3\lambda^3}$	0,055	$P_0 \approx \frac{\mu^3}{(\mu + \lambda)^2(\mu + 3\lambda)}$	0,052	0,003	5,45
$M = 5, P = 2, Q = 3,$ $\mu = 50, \lambda = 25$		0,186		0,178	0,008	4,30
$M = 6, P = 1, Q = 5,$ $\mu = 10, \lambda = 9$	$P_0 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 6\mu\lambda + 5\lambda^2}$	0,096	$P_0 \approx \frac{\mu^2}{(\mu + \lambda)(\mu + 5\lambda)}$	0,096	0	0
$M = 6, P = 1, Q = 5,$ $\mu = 50, \lambda = 25$		0,190		0,190	0	0

Условия	Точная формула	Значение	Приближенная формула (3.66)	Значение	Абс. ошибка, Δ	Отн. ошибка, $\frac{\Delta}{\text{точн.зн.}} \cdot 100$
$M = 6, P = 3, Q = 3,$ $\mu = 10, \lambda = 9$	$P_0 = \frac{\mu^4}{\mu^4 + 6\mu^3\lambda + 9\mu^2\lambda^2 + 9\mu\lambda^3 + 3\lambda^4}$	0,045	$P_0 \approx \frac{\mu^4}{(\mu + \lambda)^3(\mu + 3\lambda)}$	0,039	0,006	13,3
$M = 6, P = 3, Q = 3,$ $\mu = 50, \lambda = 25$		0,132		0,119	0,013	9,84
$M = 8, P = 3, Q = 5,$ $\mu = 10, \lambda = 9$	$P_0 = \frac{\mu^4}{\mu^4 + 8\mu^3\lambda + 15\mu^2\lambda^2 + 15\mu\lambda^3 + 5\lambda^4}$	0,029	$P_0 \approx \frac{\mu^4}{(\mu + \lambda)^3(\mu + 5\lambda)}$	0,027	0,002	6,89
$M = 8, P = 3, Q = 5,$ $\mu = 50, \lambda = 25$		0,091		0,085	0,006	6,59
$M = 10, P = 3,$ $Q = 7$ $\mu = 10, \lambda = 9$	$P_0 = \frac{\mu^4}{\mu^4 + 10\mu^3\lambda + 21\mu^2\lambda^2 + 21\mu\lambda^3 + 7\lambda^4}$	0,021	$P_0 \approx \frac{\mu^4}{(\mu + \lambda)^3(\mu + 7\lambda)}$	0,020	0,001	4,76
$M = 10, P = 3,$ $Q = 7$ $\mu = 50, \lambda = 25$		0,070		0,066	0,004	5,71

Вычислим показатели эффективности системы пополнения запасами партиями.

Среднее число запасенных товаров, находящихся в системе в стационарном режиме определяется по формуле

$$\bar{n} = \sum_{i=0}^M iP_i = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \dots + N \cdot P_N \quad (3.63)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{n} = & \sum_{i=1}^{P+1} i \cdot P_0 \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^{i-1} + \sum_{i=P+2}^{M-P+1} i \cdot P_0 \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P + \\ & + \sum_{i=M-P+2}^M i \cdot P_0 \frac{\lambda}{\mu} \left[1 + \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P - \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^{i-Q-1} \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Вынесем в (3.64) $P_0 \frac{\lambda}{\mu}$ за скобки:

$$\bar{n} = P_0 \frac{\lambda}{\mu} \left[\sum_{i=1}^{P+1} i \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^{i-1} + \sum_{i=P+2}^{M-P+1} i \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P + \sum_{i=M-P+2}^M i \left[1 + \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P - \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^{i-Q-1} \right] \right] \quad (3.65)$$

Сумма, стоящая в скобках (3.65) представляет сумму трех рядов. Не приводя подробные вычисления, запишем выражение для нахождения среднего числа запасенных товаров, которое принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{n} \approx & \frac{\mu^{P+1}}{(\mu + \lambda)^P (\mu + Q\lambda)} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \times \\ & \times \left[\frac{1 - \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P \left(P + 1 - P \frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)}{\left[1 - \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right) \right]^2} + \left(\frac{M(M+1) - P(P+1)}{2} \right) \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P \right] \end{aligned} \quad (3.66)$$

Выражение (3.66) для нахождения среднего числа товаров в системе обслуживания $\bar{n}$ является не точным, а приближенными. Это также связано с тем, что не удалось получить компактное выражение. Однако сравнение точных и приближенных значений $\bar{n}$ (табл. 3.2) показывает, что приближенное выражение может быть использовано в задаче управления запасами.

Таблица 3.2

Сравнение $\bar{n}$, рассчитанных по точным и приближенным выражениям

Условия	Точная формула	Значение	Приближенная формула (3.62)	Значение
$M = 6,$ $P = 1, Q = 5,$ $\mu = 10, \lambda = 9$	$\bar{n} = \frac{\mu^2 \lambda}{\mu^2 + 6\mu\lambda + 5\lambda^2} \left(\frac{21\mu + 20\lambda}{\mu^2} \right)$	3,359	$\bar{n} \approx \frac{\mu^2}{(\mu + \lambda)(\mu + 5\lambda)} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \times$ $\times \left[\frac{1 - \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right) \left(2 - \frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)}{\left[1 - \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right) \right]^2} + 20 \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right) \right]$	3,359
$M = 6,$ $P = 1, Q = 5,$ $\mu = 50, \lambda = 25$		2,952		2,952
$M = 6, P = 3,$ $Q = 3, \mu = 10,$ $\lambda = 9$	$\bar{n} = \frac{\mu^4 \lambda}{\mu^4 + 6\mu^3 \lambda + 9\mu^2 \lambda^2 + 9\mu \lambda^3 + 3\lambda^4} \times$ $\times \left(\frac{21\mu^3 + 36\mu^2 \lambda + 42\mu \lambda^2 + 15\lambda^3}{\mu^4} \right)$	3,983	$\bar{n} \approx \frac{\mu^4}{(\mu + \lambda)^3 (\mu + 3\lambda)} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \times$ $\times \left[\frac{1 - \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^3 \left(4 - 3 \frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)}{\left[1 - \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right) \right]^2} + 15 \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^3 \right]$	4,003
$M = 6, P = 3,$ $Q = 3, \mu = 50,$ $\lambda = 25$		3,391		3,437

Перейдем непосредственно к задаче пополнения товарных запасов партиями.

Пусть $\mathcal{G}$ – розничная цена товара, ν – закупочная цена товара, C_1 – затраты на оформление и выполнение заказа (не зависят от размера партии), C_2 – затраты на хранение единицы товара. Если спрос на товар на горизонте управления составляет μ , то количество заказов в установившемся режиме будет равно μ/Q .

Тогда прибыль на горизонте управления товарными запасами составит

$$F = (\mathcal{G} - \nu)\mu(1 - P_0) - C_1 \frac{\mu}{Q} - C_2 \bar{n}$$

или с учетом выражений (3.62) и (3.66)

$$F = (\mathcal{G} - \nu)\mu \left(1 - \frac{\mu^{P+1}}{(\mu + \lambda)^P (\mu + Q\lambda)} \right) - C_1 \frac{\mu}{Q} - C_2 \frac{\mu^{P+1}}{(\mu + \lambda)^P (\mu + Q\lambda)} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \times \\ \times \left[\frac{1 - \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P \left(P + 1 - P \frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)}{\left[1 - \frac{\mu + \lambda}{\mu} \right]^2} + \left(\frac{M(M + 1) - P(P + 1)}{2} \right) \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P \right]. \quad (3.67)$$

Нас интересуют критический уровень заказа P и объем каждой партии Q , максимизирующие F . Поскольку P и Q связаны уравнением (3.41) подставим в (3.67) $M - P$ вместо Q . В результате получим

$$F = (\mathcal{G} - \nu)\mu \left(1 - \frac{\mu^{P+1}}{(\mu + \lambda)^P [\mu + (M - P)\lambda]} \right) - C_1 \frac{\mu}{M - P} - \\ - C_2 \frac{\mu^{P+1}}{(\mu + \lambda)^P [\mu + (M - P)\lambda]} \frac{\lambda}{\mu} \times \\ \times \left[\frac{1 - \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P \left(P + 1 - P \frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)}{\left[1 - \frac{\mu + \lambda}{\mu} \right]^2} + \left(\frac{M(M + 1) - P(P - 1)}{2} \right) \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P \right] \quad (3.68)$$

Возьмем производную от F по P и приравняв ее к нулю, получим

$$\begin{aligned}
& \frac{C_2 \mu^{P+1} \lambda \ln(\mu + \lambda) \left[\frac{M(M+1)}{2} - \frac{P(P-1)}{2} \right] \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P - \frac{\left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P \left[P - \frac{P(\mu + \lambda)}{\mu} + 1 \right]}{\left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} - 1 \right)^2} + 1}{\mu [\mu + \lambda(M - P)] (\mu + \lambda)^P} \\
& - \mu(\vartheta - \nu) \left[\frac{\mu^{P+1} \lambda}{[\mu + \lambda(M - P)]^2 (\mu + \lambda)^P} - \frac{\mu^{P+1} \ln(\mu + \lambda)}{[\mu + \lambda(M - P)] (\mu + \lambda)^P} + \frac{\mu^{P+1} \ln(\mu)}{[\mu + \lambda(M - P)] (\mu + \lambda)^P} \right] \\
& - \frac{C_2 \mu^{P+1} \lambda^2 \left[\frac{M(M+1)}{2} - \frac{P(P-1)}{2} \right] \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P - \frac{\left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P \left[P - \frac{P(\mu + \lambda)}{\mu} + 1 \right]}{\left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} - 1 \right)^2} + 1}{\mu [\mu + \lambda(M - P)]^2 (\mu + \lambda)^P} \\
& - \frac{C_2 \mu^{P+1} \lambda \left[\frac{\left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P}{\frac{\mu + \lambda}{\mu} - 1} - \left(P - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P + \ln \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right) \left[\frac{M(M+1)}{2} - \frac{P(P-1)}{2} \right] \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P - \frac{\ln \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P \left[P - \frac{P(\mu + \lambda)}{\mu} + 1 \right]}{\left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} - 1 \right)^2} \right]}{\mu [\mu + \lambda(M - P)] (\mu + \lambda)^P} \\
& - \frac{C_1 \mu}{(M - P)^2} - \frac{C_2 \mu^{P+1} \lambda \ln(\mu) \left[\frac{M(M+1)}{2} - \frac{P(P-1)}{2} \right] \left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P - \frac{\left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} \right)^P \left[P - \frac{P(\mu + \lambda)}{\mu} + 1 \right]}{\left(\frac{\mu + \lambda}{\mu} - 1 \right)^2} + 1}{\mu [\mu + \lambda(M - P)] (\mu + \lambda)^P}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Решая уравнение (3.69) численно можно найти оптимальное значение критического уровня запаса P , а по уравнению (3.41) оптимальный размер заказа Q .

Пример 2. Пусть спрос на товар составляет 200 единиц в неделю. Максимальный объем запаса товара не должен превышать 40 единиц. Среднее время доставки заказа составляет 6,7 часов или 0,04 недели. Закупочная цена единицы товара составляет 400 рублей, а продаваться будет за 500 рублей. Оформление одного заказа обходится магазину в 2000 рублей, независимо от размера партии, а стоимость хранения единицы товара в неделю обходится магазину в 50 рублей.

Требуется определить критический уровень товара и размер заказа при которых прибыль магазина от реализации товара будет максимальной.

Для начала из уравнения $T = 1/\lambda$ найдем интенсивность потока пополнения запаса λ :

$$\lambda = 1/0,04 = 25.$$

Далее, для найденного $\lambda = 25$ и заданных $\mu = 200$, $M = 40$, $\vartheta = 500$, $v = 400$, $C_1 = 2000$ и $C_2 = 50$ из уравнения (3.69) находим оптимальное значение критического уровня запаса $P^* = 9,078$. Округляя решение до ближайшего целого получаем значение 9. Таким образом, «точка заказа» составляет 9 единиц товара.

Тогда оптимальная стратегия управления запасами будет заключаться в следующем: каждый раз, когда уровень запаса достигает 9 единиц, следует заказывать 31 единицу товара.

При данной стратегии вероятность дефицита на горизонте управления P_0 будет равна 0,071, средний уровень запаса $\bar{n}$ составит 20 единиц, а ожидаемая прибыль магазина будет равна 14340 рублей.

3.4. Управление запасами множеством товаров

Одно дело найти оптимальную стратегию управления однопродуктовыми запасами, но совсем другое – пытаться искать такие стратегии для десятков тысяч наименований товаров. В работе предлагается применить одинаковый подход для всех наименований товаров.

Рассмотрим теперь управление запасами множеством товаров.

Пусть торговое предприятие осуществляет управление запасами N различных товаров.

Пусть ϑ_j – розничная цена j -го товара, ν_j – закупочная цена j -го товара, C_{1j} – издержки выполнения заказа партии j -го товара, C_{2j} – затраты на хранение одной единицы j -го товара, μ_j – спрос на j -й товар на горизонте управления, λ_j – интенсивность пополнения запаса j -го товара,

Тогда прибыль на горизонте управления товарными запасами составит

$$F = \sum_{j=1}^N \left[(\vartheta_j - \nu_j) \mu_j (1 - P_{0j}) - C_{1j} \frac{\mu_j}{Q_j} - C_{2j} \overline{n_j} \right]$$

или

$$\begin{aligned} F = \sum_{j=1}^N F_j = \sum_{j=1}^N & \left((\vartheta_j - \nu_j) \mu_j \left(1 - \frac{\mu_j^{P_j+1}}{(\mu_j + \lambda_j)^{P_j} (\mu_j + Q_j \lambda_j)} \right) - \right. \\ & - C_{1j} \frac{\mu_j}{Q_j} - C_{2j} \frac{\mu_j^{P_j+1}}{(\mu_j + \lambda_j)^{P_j} (\mu_j + Q_j \lambda_j)} \cdot \frac{\lambda_j}{\mu_j} \times \\ & \times \frac{\left[1 - \left(\frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_j} \right)^{P_j} \right] \left(P_j + 1 - P_j \frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_j} \right)}{\left[1 - \frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_j} \right]^2} + \\ & \left. + \left(\frac{M_j(M_j + 1) - P_j(P_j + 1)}{2} \right) \left(\frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_j} \right)^{P_j} \right). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Так как

$$\begin{aligned}
F_j = & (\mathcal{G}_j - v_j) \mu_j \left(1 - \frac{\mu_j^{P+1_j}}{(\mu_j + \lambda_j)^{P_j} (\mu_j + Q_j \lambda_j)} \right) - C_{1j} \frac{\mu_j}{Q_j} - \\
& - C_{2j} \frac{\mu_j^{P+1_j}}{(\mu_j + \lambda_j)^{P_j} (\mu_j + Q_j \lambda_j)} \cdot \frac{\lambda_j}{\mu_j} \times \\
& \times \left[\frac{1 - \left(\frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_j} \right)^{P_j} \left(P_j + 1 - P_j \frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_j} \right)}{\left[1 - \frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_j} \right]^2} + \left(\frac{M_j (M_j + 1) - P_j (P_j + 1)}{2} \right) \left(\frac{\mu_j + \lambda_j}{\mu_j} \right)^{P_j} \right], \quad (3.71) \\
& j = \overline{1, N},
\end{aligned}$$

очевидно, что максимум (3.70) достигается тогда, когда N функций F_j максимальны каждая в отдельности, так как эти функции независимы одна от другой. Следовательно, максимум F определяется из условий

$$\frac{\partial F_j}{\partial P_j} = 0, \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.72)$$

Обращаясь к (3.69), получим оптимальные «точки заказа» для всех N товаров, а следовательно, оптимальные стратегии пополнения запасов каждого из товаров.

Задача управления запасами множеством товаров была рассмотрена без ограничений. Попытки найти оптимальные стратегии управления многопродуктовыми запасами с учетом ограничений могут оказаться слишком дорогостоящими [112]. В работе [82] доказана оптимальность двухуровневых стратегий (для случая двух товаров). Однако для трех и более товаров практическое применение данного класса стратегий крайне затруднено методологическими и вычислительными трудностями.

К счастью, указанные ограничения не являются столь жесткими, чтобы их надо было вводить явно. Наиболее важными являются ограничения финансовых расходов на поставки. Однако, они были учтены при решении за-

дачи оптимизации ассортимента товаров, поэтому в задаче оптимизации поставок не участвуют, что существенно упрощает решение задачи.

ВЫВОДЫ

1. Приведено математическое описание двух моделей задачи управления запасами на основе теории массового обслуживания. Модель с непрерывным пополнением запасов может найти эффективное применение для нахождения оптимальной стратегии пополнения запасов в торговых организациях, когда невыгодно заказывать товар крупными партиями, а выгоднее штучное пополнение, но с широким ассортиментом. Модель пополнения запасов партиями пригодна для широкого круга задач управления запасами, в которых приходится иметь дело с групповыми поставками. Важнейшей особенностью приведенных моделей является возможность получения оптимальных параметров стратегии управления запасами при известном математическом ожидании спроса на товар.

2. Получены выражения для расчета параметров системы массового обслуживания товарами:

а) для системы с непрерывным пополнением товарных запасов найдены точные аналитические выражения для расчета вероятностей дефицита товаров и среднего числа товаров в системе массового обслуживания;

б) для системы с пополнением запасов партиями найдены приближенные выражения для расчета вероятностей дефицита товаров и среднего числа товаров в системе обслуживания.

Полученные аналитические и приближенные выражения для вычисления параметров системы массового обслуживания товарными запасами позволили сформировать критерии оптимальности, поставить задачи управления товарными запасами и найти оптимальные стратегии управления.

ГЛАВА 4

ПОДДЕРЖКА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ АССОРТИМЕНТОМ И ТОВАРНЫМИ ЗАПАСАМИ

4.1. Система поддержки принятия решений

Задача управления ассортиментом товаров и товарными запасами на основе разработанных в диссертации математических моделей сложна из-за высокой размерности определяемых переменных, наличия огромного числа идентифицируемых параметров моделей и ограничений. Очевидно, что справиться с задачей такой размерности можно лишь с помощью компьютерных автоматизированных систем выработки решений.

Автоматизация управления ассортиментом товаров и товарными запасами позволяет не только снизить временные затраты сотрудников торговых предприятий на обработку информации, но и сократить число ошибочных решений за счет уменьшения влияния человеческого фактора [21, 89].

В последнее время получили большое распространение системы поддержки принятия решений (СППР), помогающие человеку в задачах выбора [9]. Система поддержки принятия решений – это диалоговая автоматизированная система, использующая правила принятия решений и соответствующие математические модели с базами данных, а также интерактивный компьютерный процесс выработки решения. В отличие от автоматизированных систем управления предприятиями (АСУП) СППР, кроме традиционных методов обработки информации и нахождения управлений с помощью оптимизационных математических моделей ориентируются и на решение плохо структурированных (слабоформализуемых) задач.

Главной особенностью систем поддержки принятия решений является совершенно новый способ взаимодействия человека и компьютера в выработке управленческих решений. Принятие решения происходит в результате итерационного процесса, участниками которого являются:

- система поддержки принятия решений как вычислительное звено и объект управления;
- лицо, принимающее решение (ЛПР) в качестве управляющего звена, роль которого задать входные данные и оценить полученные результаты вычислений.

На рис. 4.1 показан процесс выработки решений с помощью СППР.

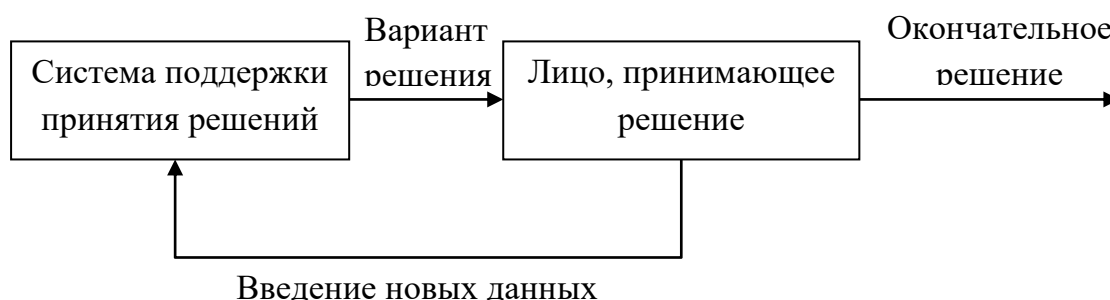


Рис.4.1. Процесс выработки решений как итерационный процесс

СППР предназначена для решения задач выбора из большого количества вариантов (альтернатив) наилучшего варианта, как на основе решения оптимизационных задач, так и на основе предпочтений ЛПР.

Основу СППР составляют комплекс взаимосвязанных математических моделей с соответствующей алгоритмической и информационной поддержкой расчетов и исследований, интеллектуальные и экспертные системы, включающие опыт решения задач управления и обеспечивающие участие экспертов в процессе выработки рациональных решений.

Структура системы поддержки принятия решений, а также функции составляющих ее блоков показаны на рис. 4.2.

В состав СППР входят три главных компонента: база данных, база

моделей и программная подсистема управления, которая состоит: из системы управления базой данных (СУБД), системы управления базой моделей (СУБМ) и системы управления интерфейсом.

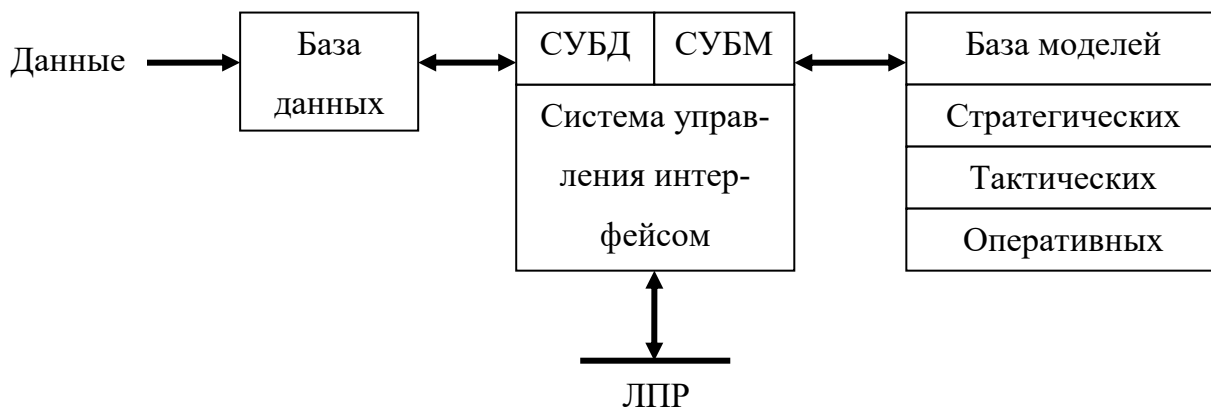


Рис.4.2. Основные компоненты системы поддержки принятия решений

База данных выполняет роль информационного хранилища, которая используется непосредственно для вычислений по математическим моделям. Основные данные поступают от информационной системы операционного уровня.

База моделей содержит математическое описание процесса или объекта. Модели при использовании определенных алгоритмов, способствуют нахождению полезной информации для принятия правильных решений, т.к основываются на математической интерпретации проблемы. Применение моделей обеспечивает осуществление анализа в СППР.

В системах поддержки принятия решений база моделей может включать в себя тактические, стратегические и оперативные математические модели.

Стратегические модели используются на верхнем уровне управления для нахождения планов производства и развития организации с учетом имеющихся ресурсов, политики приобретения и использования этих ресурсов. Такие модели могут быть, в том числе, полезны прогнозировании

политики конкурентов, при выборе вариантов размещения предприятий, и т.д. Характерным является значительная широта охвата, множество переменных, представление данных в сжатой агрегированной форме. И как правило, горизонт планирования измеряется в годах.

Тактические модели используются на среднем уровне управления для распределения и контроля использования имеющихся ресурсов. Так, например, в задачах управления торговыми предприятиями тактические модели применяются для финансового планирования, планирования ассортимента товаров и продаж новых товаров, построения схем компоновки торговых залов и складских помещений и т.п. Чаще всего эти модели применяют к подразделениям предприятия (например, к системе производства и сбыта, складскому хозяйству) и могут также включать в себя агрегированные показатели. Для тактических моделей временной горизонт составляет от одного месяца до года.

Оперативные модели служат для принятия решений на нижнем уровне управления с горизонтом, исчисляемым днями и неделями. В торговых организациях применения этих моделей включают управление товарными запасами, ведение дебиторских счетов и кредитных расчетов.

Программная подсистема управления обеспечивает взаимодействие СУБД и СУБМ и диалог с пользователем. Совершенствование подсистемы управления СППР определяется прогрессом в развитии каждого из указанных компонентов.

Главным достоинством СППР являются высокая адаптивность, обеспечивающая возможность приспособливаться к особенностям имеющегося математического, информационного, алгоритмического, технического и программного обеспечения, а также требованиям пользователя.

4.2. Математическое и алгоритмическое обеспечение поддержки принятия решений в задаче управления ассортиментом и запасами

Сформулируем основные требования к СППР при управлении ассортиментом товаров и товарными запасами. СППР должна обеспечивать:

- классификацию и деление товаров по группам;
- прогноз спроса на товары и интенсивности поставок товаров на основе ретроспективных данных о сбыте и времени выполнения заказов;
- на основании прогнозов спроса на товары и интенсивности пополнения запасов, издержек на выполнение заказов, хранения, закупочной цены и с учетом остатка товарных запасов на момент принятия решений система должна предлагать ЛПР наиболее подходящий ассортимент товаров, план закупок и стратегии пополнения товарных запасов, исходя из максимума прибыли торгового предприятия.

4.2.1. Снижение размерности задачи управления ассортиментом и товарными запасами

Поставленные в предыдущих главах задачи оптимизации ассортимента товаров и управления товарными запасами имеют высокую размерность. Так, например, ассортимент даже небольшого универсама включает в себя несколько тысяч наименований товаров. Нахождение оптимального ассортимента товаров при случайном спросе на товары для такого универсама с учетом линеаризации нелинейной оптимизационной задачи определения ассортимента приводит к задаче с сотнями тысяч переменных. Несмотря на то, что для задачи линейного программирования разработаны эффективные алго-

ритмы нахождения оптимального решения³ снижение размерности задачи позволяет значительно повысить эффективность управления ассортиментом и товарными запасами.

Важным инструментом снижения размерности задачи оптимизации ассортимента и практического решения задачи управления товарными запасами выступает так называемый *ABC*-анализ [10, 96]. Как уже было отмечено в первой главе в основе *ABC*-анализа лежит принцип Парето, согласно которому 20 % ассортиментных позиций приносят 80 % прибыли [10, 96].

Суть *ABC*-анализа состоит в том, чтобы разбить все множество товаров на несколько групп (как правило, три) так, чтобы в группу *A* вошло относительно небольшое число наиболее значимых с точки зрения приносимой прибыли товаров, в группу *B* – менее значимые товары, и, наконец, в группу *C* – все оставшиеся товары. Хорошим результатом разбиения на группы принято считать тот, при котором в группе *A* оказывается не более 10 % товаров с долей в прибыли от продаж до 80 %, в группу *B* включается 15-30 % товаров с долей прибыли до 15 %, а в группу *C* – оставшиеся 65-80 % наименований товаров и их доля в общей прибыли от 5 до 15 %.

Отыскание хорошего решения *ABC*-анализа оказывает решающее значение в достижении эффективности автоматизированных систем управления ассортиментом и товарными запасами.

Для решения задачи *ABC*-классификации товаров применяются различные методы – от чисто эмпирических до хорошо формализованных (кластеризация, автоматическая классификация и др.) [58, 70, 74, 75].

Мы полагаем, что в задачах управления ассортиментом, и в частности, классификации товаров по группам, решающее слово должно оставаться за человеком.

³Данцигу удалось решить задачу линейного программирования с 10^4 уравнениями и 10^6 переменными в 1965 году на ЭВМ IBMMPS/360 [23].

Наиболее простым в реализации *ABC*-классификации с участием ЛПР является дифференциальный метод [70]. При использовании дифференциального метода границы между группами *A*, *B* и *C* определяются в несколько этапов. На первом этапе рассчитывается годовая сумма расходов (доходов) по всей номенклатуре товаров, на втором этапе рассчитываются средние расходы (доходы) на одну позицию номенклатуры товаров. На третьем этапе осуществляется разделение на группы. В группу *A* включают товары, расходы (доходы) на которые в 6 и более раз превышают среднее значение, в группу *C* – товары, расходы (доходы) на которые меньше среднего значения в 2 и более раза, остальные позиции входят в группу *B* [70].

В качестве примера приведем таблицу результатов, полученных при разбиении дифференциальным методом лекарственных препаратов, реализуемых муниципальным унитарным предприятием Ангарского городского округа «Аптека № 28» в период с января 2015 по декабрь 2015 гг.

Таблица 4.1

Результаты *ABC*-анализа дифференциальным методом

Группа	Количество наименований в группе	Распределение по группам, %	Распределение по доходам от продаж, %
<i>A</i>	123	6,86	51,45
<i>B</i>	402	22,43	25,64
<i>C</i>	1267	70,71	22,91
Всего	1792	100	100

Из табл. 4.1 видно, что ≈ 7 % или 123 наименования лекарственных средств приносит более половины доходов от продаж. Группа *B* (22,43 % или 402 наименования) обеспечивает чуть более 25 % доходов; группа *C* (70,71 % или 1267 наименований) обеспечивает почти 23 % дохода.

Очевидно, что выбор соотношений между средними значениями расхо-

дов (доходов) по группам товаров подбирается ЛПП с учетом его приоритетов и проводимой торговым предприятием ассортиментной политики.

АВС-анализ позволяет повысить эффективность управления ассортиментом и запасами. Группе *A* отдаются приоритетное внимание, затем закупаются товары группы *B*, и, затем – *C*. Либо в связи с высокой размерностью задачи управления ассортиментом и товарными запасами, а также в виду того, что основную прибыль приносят товары групп *A* и *B*, достаточно задачу управления ассортиментом и товарными запасами на основе разработанных в диссертации математических моделей решать лишь для товаров групп *A* и *B*. Для товаров же группы *C* не следует применять усложненные процедуры управления.

4.2.2. Прогнозирование спроса и параметров распределений случайных величин в задачах управления ассортиментом и товарными запасами

Для нахождения оптимального ассортимента и наилучшей стратегии управления товарными запасами необходимо идентифицировать ряд параметров, входящих в модели. Это параметры:

- прогноз спроса на товары;
- прогноз интенсивности пополнения товарных запасов.

Эффективность системы управления ассортиментом и товарными запасами в значительной степени зависит от способности дать с приемлемой точностью прогноз спроса на товары.

Обе модели, разработанные в предыдущих главах непосредственно связаны с прогнозированием спроса. В модели задачи нахождения ассортимента товаров нужно знать средний спрос μ и среднеквадратическое отклонение σ для каждого товара, а для модели управления запасами для каждого товара - интенсивность спроса μ и интенсивность пополнения запасов λ .

Будем рассматривать случай, когда прогноз спроса на товары и интенсивность пополнения запасов осуществляются исключительно на основе данных предыстории.

Почти во всех случаях имеются данные о сбыте товара, которые можно использовать в качестве данных спроса. Предполагается, что сбыт является достаточно точным показателем спроса и что в случае дефицита не происходит настолько большой потери сбыта, что данные о сбыте перестают соответствовать данным о спросе.

Исследование показало, что использование только одной модели для прогнозирования спроса на товары не оправдано. Так, для товаров, сбыт которых за прошлый период не подвергался значительным сезонным колебаниям, можно применить простейшие модели прогнозирования. Если же сбыт значительно меняется во времени, наблюдаются заметные колебания сбыта в зависимости от времени года, то требуются другие модели прогнозирования.

Наиболее широкое применение получили процедуры, основанные на методе наименьших квадратов и на экспоненциальном сглаживании.

Поскольку нами принято допущение, что результаты наблюдений над выходной переменной y (сбытом товара) представляют собой независимые нормально распределенные случайные величины мы можем найти зависимость математического ожидания спроса на товары $\mu\{y/\bar{x}\}$ от времени наблюдений x . Такая зависимость называется регрессионной зависимостью. Пример кривой регрессии $y(x)$ приведен на рис.4.3.

На рис. 4.3 для каждого значения $X = x_k$ показана плотность распределения $f(y/x_k)$ случайной величины спроса y .

Ясно, что кривая регрессии должна проходить вблизи данных наблюдений. Точнее, значения спроса $\hat{y}_i$, находимого по модели при условии, что входная координата принимала значение x_i (i – порядковый номер периода наблюдения), должны быть близки к значениям сбыта y_i , полученным из

наблюдений при тех же значениях x .

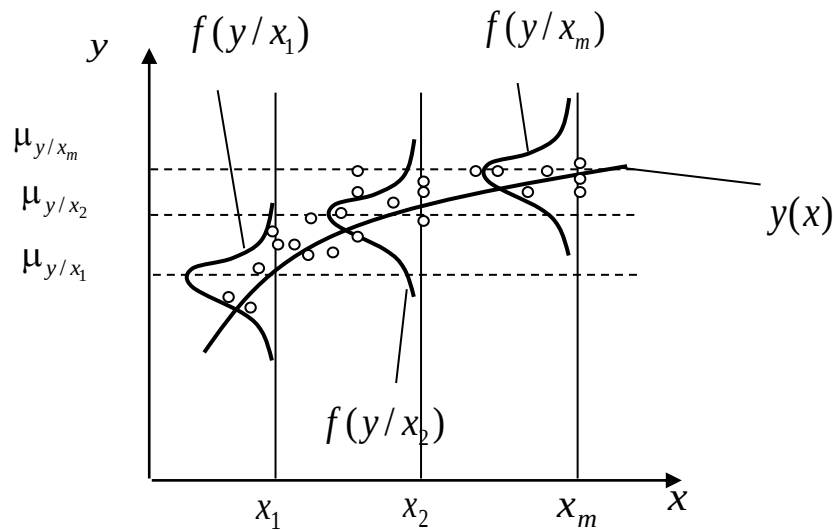


Рис. 4.3. Плотность распределения вероятности и кривая регрессии

Для описания спроса товаров с широкой номенклатурой, насчитывающей несколько тысяч наименований, рассматривались известные представления: линейные, полиномиальные, степенные и экспоненциальные.

В разрабатываемой СППР для прогнозирования спроса на «несезонные» товары была выбрана линейная модель вида

$$y = a_0 + a_1 x, \quad (4.1)$$

для которой расчет коэффициентов проводится по формулам, полученных методом наименьших квадратов:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n t_i^2 - \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n y_i t_i}{n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}, \quad (4.2)$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i t_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n t_i}{n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}, \quad (4.3)$$

где y_i - фактические данные сбыта товара, t_i - временные периоды времени, n

– количество наблюдений, $i = \overline{1, n}$.

Уравнение (4.1) позволяет вычислять прогнозируемый спрос в течение k -го периода, $k = 1, 2, \dots$ используя данные наблюдений за периоды $0, -1, \dots, -n$.

Средняя относительная ошибка прогнозной модели рассчитывается по формуле:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{y_i} \cdot 100, \quad (4.4)$$

где $\hat{y}_i$ – значения сбыта, полученные по прогнозной модели.

На рис. 4.4 представлены данные сбыта лекарственного средства «Цитрамон» и значения, вычисленные по прогнозной модели (4.1).

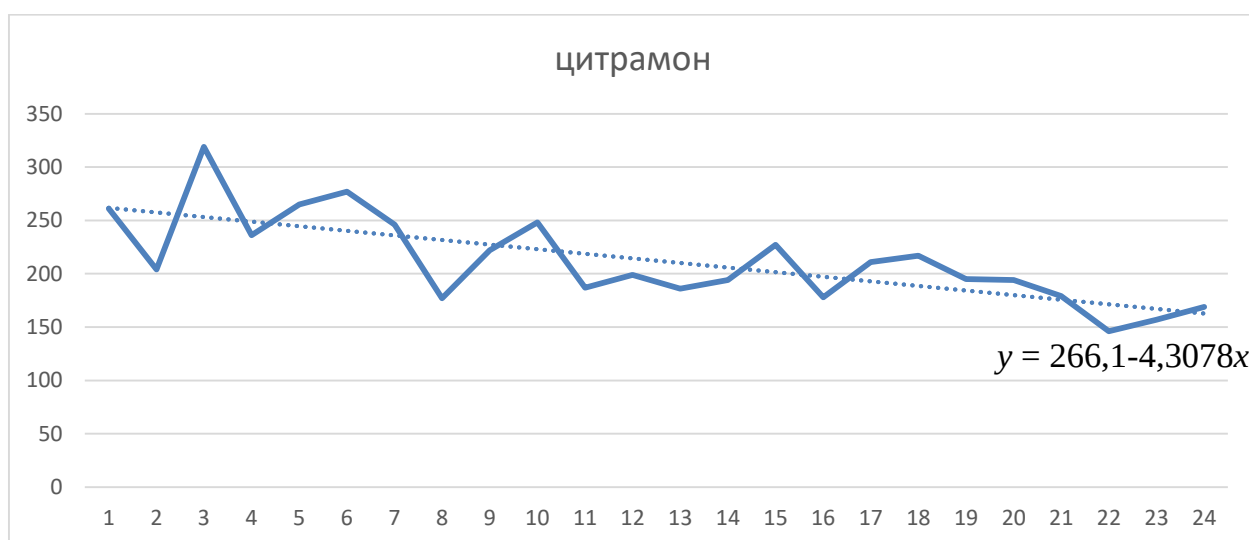


Рис. 4.4. Данные реализации лекарственного средства «Цитрамон»

Средняя относительная ошибка аппроксимации линейной моделью данных продаж лекарственного средства «Цитрамон» составила 10,43 %.

Линейные прогнозные модели, построенные для 50 «несезонных» лекарственных средств из группы A и B , случайным образом выбранных из ассортимента муниципального унитарного предприятия Ангарского городского округа «Аптека № 28», показали хорошую аппроксимацию данных наблюде-

ний. Это подтверждалось расчетами средней относительной ошибки модели по формуле (4.4). Так, численные значения относительной ошибки для линейной модели не превышали 20 %.

Часто на практике величина сбыта зависит от времени года. Так, например, естественно ожидать рост продаж зимой, и, наоборот спад продаж летом противовирусных, противокашлевых, иммуностимулирующих препаратов. Поэтому учет сезонного фактора также влияет на выбор модели прогнозирования.

Наиболее эффективные способы прогнозирования основаны на распространении данных о предыдущем сбыте на ближайшее будущее с использованием модели временного ряда (ряд значения сбыта за последовательные одинаковые промежутки времени). При этом предполагается что временной ряд сбыта состоит из следующих составляющих:

1. Средний сбыт за единицу времени в некоторый момент.
2. Несезонное изменение среднего сбыта (тренд) в последовательных промежутках времени.
3. Сезонные колебания сбыта относительно линии тренда.
4. Случайные колебания относительно модели, учитывающей тренд и сезонные колебания.

Использование модели «временного ряда» в качестве схемы прогнозирования несложно. Если из данных о предыдущем сбыте можно выделить тренд и сезонную составляющую и распространить их на будущее, то источником ошибок прогнозирования останутся лишь случайные колебания спроса. Основная задача состоит в том, чтобы выделить эти составляющие из имеющихся данных о предыдущем сбыте. Кроме того, желательно, чтобы вычисления были по возможности простыми и достаточно точными.

Обычно тренд аппроксимируют уравнением прямой $Y = a + bx$, с помощью метода наименьших квадратов, где Y – величина спроса, предсказанная с помощью линий регрессии для любого времени x .

На рис. 4.4 показаны данные сбыта аскорбиновой кислоты и модель тренда, описывающего основную тенденцию в сбыте за период с января 2014 по декабрь 2015 гг. в муниципальном унитарном предприятии Ангарского городского округа «Аптека № 28».⁴



Рис. 4.4. Сбыт аскорбиновой кислоты и модель тренда продаж

Удалим из временного ряда сбыта тренд, а оставшуюся непрерывную функцию, состоящую лишь из сезонной и случайной составляющих, аппроксимируем с помощью методов гармонического анализа периодических функций, которые основаны на том, что любую непрерывную функцию можно представить линейной комбинацией косинусов и синусов.

Если функция $y(x)$ является непрерывной функцией с периодом T , тогда функцию $y(x)$ можно представить рядом Фурье вида

$$y(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right], \quad 0 \leq x \leq T, \quad (4.1)$$

где k – порядковый номер гармоники. Коэффициенты разложения определяются формулами:

⁴ Данные взяты из табл. 2.1 настоящей диссертации. Месяцы пронумерованы с 1 по 23 (1 обозначает январь 2014 года, а 23 – декабрь 2015 года).

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(x) dx; \quad (4.2)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) dx; \quad (4.3)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) dx. \quad (4.4)$$

Аргументы тригонометрических функций $\cos$ и $\sin$ можно трактовать как частоты ω_k , определяемые соответствующим номером гармоники, т.е.

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T} k.$$

Под аппроксимацией функции $y(x)$ рядом Фурье понимают новую функцию $\hat{y}(x)$, полученную суммированием конечного числа членов ряда (4.1), число которых обозначим K_0 , т.е.

$$\hat{y}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{K_0} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right]. \quad (4.5)$$

Поскольку при построении моделей спроса мы имеем дело с дискретными значениями сбыта, т.е. значениями переменных, измеренных в отдельные моменты времени, применим методы гармонического анализа с использованием рядов Фурье для дискретных значений переменных.

В этом случае интегралы в выражениях (4.2) – (4.4) заменяются квадратурными формулами:

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad (4.6)$$

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right); \quad (4.7)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x_i\right), \quad (4.8)$$

где n – число измерений переменной во временной ряду; y_i – дискретные

значения переменной в моменты времени x_i .

Две последние формулы принимают вид:

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cos\left(\frac{2\pi k}{n} i\right); \quad (4.9)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin\left(\frac{2\pi k}{n} i\right), \quad (4.10)$$

поскольку $x_i = i\Delta, i = \overline{0, n}$, так как период времени T равен $\Delta \cdot n$, где Δ – интервал между измерениями.

Величины $S_k = a_k^2 + b_k^2$ характеризуют вклад k -й гармоники в функцию $y(x)$. Зависимость величины S_k от номера гармоники k характеризует спектральный состав (или спектр) функции $y(x)$. Большие значения величины S_k определяют частоты на которых сосредоточена основная «энергия» функция $y(x)$.

Опытные данные сбыта, расчетные значения сбыта по модели тренда, опытные данные за вычетом тренда и значение коэффициентов ряда Фурье для ряда гармоник приведены в табл. 4.2.

Из сумм, приведенных в последней строке табл.4.2, согласно выражениям (4.6) и (4.9), (4.10) имеем:

$$a_0 = \frac{1}{23} \sum_{i=1}^{23} y_i = \frac{0,1172}{23} = 0,00509;$$

$$a_1 = \frac{2}{23} \sum_{i=1}^{23} y_i \cos\left(\frac{2\pi}{23} i\right) = \frac{2}{23}(-85,093) = -7,3993$$

$$b_1 = \frac{2}{23} \sum_{i=1}^{23} y_i \sin\left(\frac{2\pi}{23} i\right) = \frac{2}{23}(-73,949) = -6,4303;$$

$$a_2 = \frac{2}{23} \sum_{i=1}^{23} y_i \cos\left(\frac{2\pi}{23} 2i\right) = \frac{2}{23}712,678 = 61,972;$$

Таблица 4.2

Опытные данные сбыва аскорбиновой кислоты и значения коэффициентов ряда Фурье

Ме- сяц, x	Факти- ческий сбыт	Сбыт по модели тренда	Сезонная и случайные компонен- ты, y	$y \cos\left(\frac{\pi}{23}x\right)$	$y \sin\left(\frac{\pi}{23}x\right)$	$y \cos\left(\frac{\pi}{23}2x\right)$	$y \sin\left(\frac{\pi}{23}2x\right)$	$y \cos\left(\frac{\pi}{23}3x\right)$	$y \sin\left(\frac{\pi}{23}3x\right)$	$y \cos\left(\frac{\pi}{23}4x\right)$	$y \sin\left(\frac{\pi}{23}4x\right)$	Расчет- ные зна- чения сбыва
1	186	173,03	12,96	12,48	3,49	11,07	6,73	8,84	9,47	5,96	11,50	228,16
2	296	172,52	123,47	105,49	64,15	56,80	109,63	-8,42	123,18	-71,20	100,87	218,52
3	168	172,01	-4,01	-2,73	-2,93	0,27	-4,00	3,11	-2,53	3,97	0,54	197,22
4	125	171,49	-46,49	-21,39	-41,28	26,81	-37,98	46,06	6,33	15,57	43,81	159,80
5	138	170,98	-32,98	-6,71	-32,29	30,25	-13,14	19,02	26,94	-22,51	24,10	115,16
6	108	170,47	-62,47	4,26	-62,32	61,89	8,50	-12,71	61,16	-60,15	-16,85	85,71
7	74	169,96	-95,96	32,13	-90,41	74,43	60,55	-81,99	49,85	-19,52	-93,95	90,11
8	101	169,44	-68,44	39,47	-55,91	22,92	64,49	-65,90	-18,46	53,09	-43,19	125,80
9	209	168,93	40,06	-31,07	25,28	8,15	-39,22	18,43	35,57	-36,74	-15,96	170,14
10	180	168,42	11,57	-10,61	4,61	7,90	-8,46	-3,87	10,90	-0,79	-11,55	200,26
11	207	167,90	39,09	-38,72	5,32	37,64	-10,54	-35,85	15,57	33,39	-20,31	211,73
12	240	167,39	72,60	-71,92	-9,88	69,91	19,58	-66,59	-28,92	62,03	37,72	217,03
13	200	166,88	33,11	-30,37	-13,19	22,60	24,20	-11,09	-31,20	-2,25	33,03	226,38
14	246	166,37	79,62	-61,76	-50,25	16,20	77,96	36,63	-70,70	-73,03	31,72	232,44
15	218	165,85	52,14	-30,06	-42,594	-17,46	49,13	50,20	-14,06	-40,44	-32,90	216,53
16	165	165,34	-0,34	0,11	0,32	0,26	-0,21	-0,29	-0,17	-0,07	0,33	170,78
17	109	164,83	-55,83	3,81	55,70	55,31	-7,60	-11,35	-54,66	-53,76	15,06	112,61
18	93	164,31	-71,31	-14,51	69,82	65,41	28,41	41,12	-58,26	-48,67	-52,12	74,90
19	70	163,80	-93,80	-43,15	83,28	54,09	76,63	92,93	-12,77	31,41	-88,39	79,83
20	91	163,29	-72,29	-49,34	52,83	4,93	72,12	56,07	45,62	71,62	-9,84	121,19
21	223	162,78	60,21	51,45	-31,28	27,70	-53,46	-4,10	-60,07	-34,72	-49,19	171,57
22	186	162,26	23,73	22,85	-6,40	20,27	-12,33	16,19	-17,34	10,91	-21,07	205,95
23	217	161,75	55,24	55,24	-1,4E-14	55,24	-2,7E-14	55,24	-4,1E-14	55,24	-5,4E-14	218,15
			-0,1172	-85,093	-73,949	712,678	411,005	141,691	15,444	-120,686	-156,619	

$$b_2 = \frac{2}{23} \sum_{i=1}^{23} y_i \sin\left(\frac{2\pi}{23} 2i\right) = \frac{2}{23} 411,005 = 35,793;$$

$$a_3 = \frac{2}{23} \sum_{i=1}^{23} y_i \cos\left(\frac{2\pi}{23} 3i\right) = \frac{2}{23} 141,691 = 12,321;$$

$$b_3 = \frac{2}{23} \sum_{i=1}^{23} y_i \sin\left(\frac{2\pi}{23} 3i\right) = \frac{2}{23} 15,444 = 1,343;$$

$$a_4 = \frac{2}{23} \sum_{i=1}^{23} y_i \cos\left(\frac{2\pi}{23} 4i\right) = \frac{2}{23} (-120,686) = -10,494;$$

$$b_4 = \frac{2}{23} \sum_{i=1}^{23} y_i \sin\left(\frac{2\pi}{23} 4i\right) = \frac{2}{23} (-156,619) = -13,619.$$

Легко подсчитать, что нулевая гармоника ($S_0 = a_0^2 = 2,59657E-05$) не оказывает никакого влияния на функцию, а вторая гармоника вносит самый высокий вклад, $S_2 = a_2^2 + b_2^2 = 5117,85$. Спектр остальных рассчитанных гармоник составляет соответственно: $S_1 = a_1^2 + b_1^2 = 96,10$, $S_3 = a_3^2 + b_3^2 = 153,61$ и $S_4 = a_4^2 + b_4^2 = 295,61$.

Поэтому, для описания сезонной составляющей примем функцию $\hat{y}(x)$, содержащую только значимые гармоники с номерами 1, 2, 3 и 4:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{23} x\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{23} x\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{23} 2x\right) + b_2 \sin\left(\frac{2\pi}{23} 2x\right) + \\ & + a_3 \cos\left(\frac{2\pi}{23} 3x\right) + b_3 \sin\left(\frac{2\pi}{23} 3x\right) + a_4 \cos\left(\frac{2\pi}{23} 4x\right) + b_4 \sin\left(\frac{2\pi}{23} 4x\right). \end{aligned}$$

Окончательно модель временного ряда сбыва аскорбиновой кислоты примет вид:

$$\begin{aligned} \hat{y} = & 173,55 - 0,51x - 7,39 \cos\left(\frac{2\pi x}{23}\right) - 6,43 \sin\left(\frac{2\pi x}{23}\right) + 61,97 \cos\left(\frac{4\pi x}{23}\right) + \\ & + 35,79 \sin\left(\frac{4\pi x}{23}\right) + 12,31 \cos\left(\frac{6\pi x}{23}\right) + 1,34 \sin\left(\frac{6\pi x}{23}\right) - 10,49 \cos\left(\frac{8\pi x}{23}\right) - 13,61 \sin\left(\frac{8\pi x}{23}\right). \end{aligned}$$

На рис. 4.5 показаны данные о сбыте и расчетные по модели значе-

ния сбыта аскорбиновой кислоты, в том числе прогнозные значения сбыта на следующий календарный год.

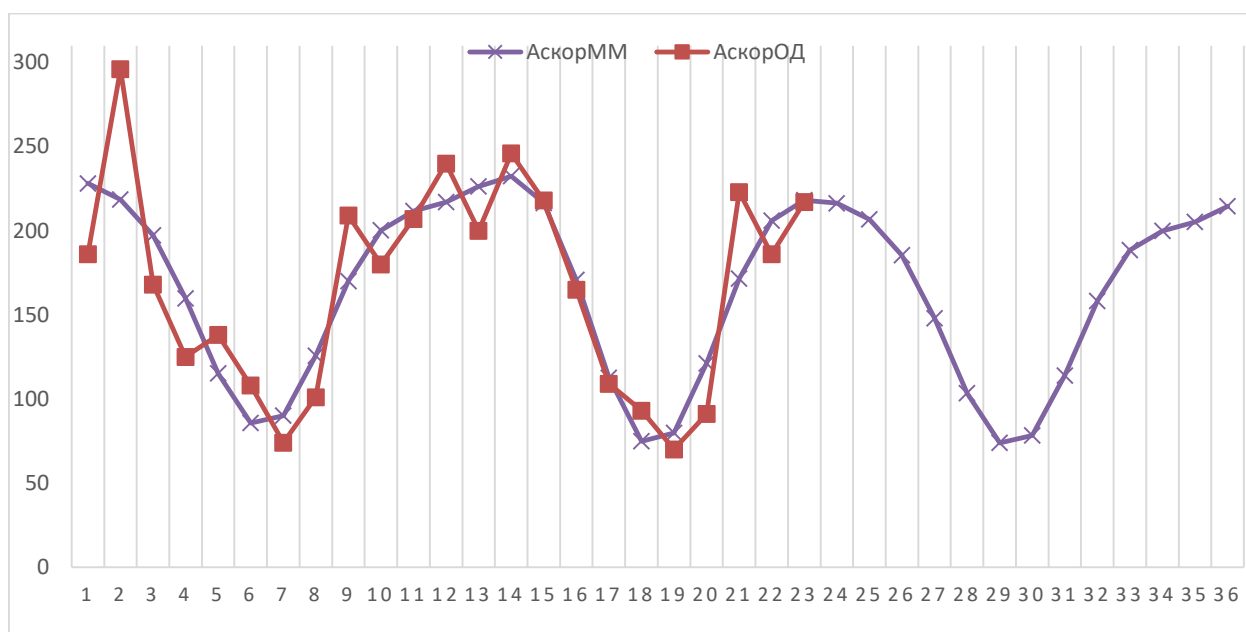


Рис.4.5. Опытные данные и расчетные по модели значения сбыта аскорбиновой кислоты

Средняя относительная ошибка аппроксимации полученной моделью данных продаж аскорбиновой кислоты составила 8,72 %.

Удовлетворительное совпадение расчетных величин с опытными данными достигнуто при использовании четырех гармоник. Однако во многих случаях может оказаться необходимым применение значительно большего числа гармоник.

Очевидно, что разложение функций на гармонические составляющие, вычисление спектра гармоник достаточно трудоемкая процедура. Поэтому такие расчеты следует проводить на ЭВМ.

Выбор временного интервала (объем статистики) для прогнозирования спроса остается за ЛПР. Из практики известно, чем длиннее временной ряд, тем больше вероятность совпадения прогноза с фактическими данными, однако при большом количестве номенклатурных позиций, а также до-

статочном малом жизненном цикле современных товаров часто приходится делать прогнозы по данным с короткой предысторией.

Для выделения из номенклатурного списка сезонных и несезонных товаров использовался коэффициент корреляции между годовыми циклами.

По статистическим данным продаж каждого товара определялся коэффициент корреляции R_j между 12-ти месячными циклами [101]:

$$R_j = \frac{1/12 \sum_{i=1}^{12} (y_i^* - \bar{y}^*)(y_i - \bar{y})}{\sqrt{1/12 \sum_{i=1}^{12} (y_i^* - \bar{y}^*)^2 \cdot 1/12 \sum_{i=1}^{12} (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (4.11)$$

где y_i – численные значения месячных продаж в одном из 12-ти месячном цикле; y_i^* – численные значения месячных продаж в другом 12-ти месячном цикле; $j = \overline{1, k}$, где k – количество годовых циклов.

Окончательно коэффициент сезонности находится как

$$R = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k R_j. \quad (4.12)$$

Чтобы установить критерий сезонности для всех лекарственных средств проводилась статистическая обработка 60 наименований ЛС.

В табл. 4.3 и 4.4. приведены значения коэффициентов сезонности для ряда лекарственных средств с предположительной сезонной и несезонной вариативностью соответственно.

Как видно из таб. 4.3 численные значения коэффициентов сезонности для лекарственных средств, отнесенных к сезонной категории колебались от 0,48 до 0,83.

Границы доверительного интервала для сезонных ЛС были представлены в виде $\bar{x} + \Delta x$, где $\Delta x = t(\alpha, f) \cdot \sigma$. Тогда при $\alpha = 0,05$ к сезонным ЛС могли быть отнесены средства с $R \geq 0,42$.

Таблица 4.3

Значения коэффициентов сезонности для некоторых сезонных ЛС,
реализуемых в МУП АГО «Аптека № 28»

№ п/п	Наименование лекар- ственного средства	Фармакотерапевтическая группа	Коэффициент сезонности
1	Ремантадин	Противовирусное средство	0,83
2	Аспирин	Нестероидное противос- палительное средство	0,82
3	Коделак	Противокашлевое средство	0,81
4	Пиносол	Противоконгестивное средство	0,80
5	Витрум	Витаминовое средство	0,79
6	Фервекс	Жаропонижающее средство	0,76
7	Эреспал	Бронхолитическое средство	0,73
8	Биопарокс	Антибиотик полипептидный	0,72
9	Пектусин	Отхаркивающее средство	0,65
10	Арбидол	Противовирусное средство	0,62
11	Бромгексин	Отхаркивающее средство	0,61
12	Парацетомол	Анальгетическое средство	0,60
13	Каметон	Антисептическое средство	0,57
14	Центрум	Витаминовое средство	0,55
15	Мезим форте	Пищеварительное фер- ментное средство	0,22
Статистические данные по выборке ($n = 30$)		$\bar{x}$ $t(\alpha, f)$ σ Δx	0,65 2,09 0,11 0,23

Таблица 4.4

Значения коэффициентов сезонности для некоторых несезонных ЛС,
реализуемых в МУП АГО «Аптека № 28»

№ п/п	Наименование лекар- ственного средства	Фармакотерапевтическая группа	Коэффициент сезонности
1	Амбросан	Муколитическое средство	0,41
2	Супрастин	H1-гистаминовых рецеп- торов антагонист	0,26
3	Пирацетам	Ноотропное средство	0,20
4	Трихопол	Противомикробное и противопротозойное средство	0,19
5	Эссливер форте	Гепатопротекторное средство	0,15
6	Мирамистин	Противомикробное и противопротозойное средство	0,14
7	Эссенциале форте	Гепатопротекторное средство	0,12
8	Престариум	АПФ блокатор	0,11
9	Полижинакс	Антибиотик комбиниру- ванный	0,10
10	Хондроксид	Регенерации тканей сти- мулятор	0,09
11	Уголь активированный	Энтеросорбирующее средство	0,06
12	Пенталгин	Анальгетическое средство	-0,03
13	Сульфацил натрия	Противомикробное средство	-0,05
14	Арифон	Диуретическое средство	-0,17
15	Сорбифер дурулес	Гемопоза стимулятор	-0,21
Статистические данные по выборке ($n = 30$)		$\bar{x}$	0,07
		$t(\alpha, f)$	2,03
		σ	0,16
		Δx	0,33

Из таб. 4.4 видно, что минимальное численное значение коэффициента сезонности для лекарственных средств, отнесенных к несезонной категории составило -0,21, а максимальное – 0,43.

Границы доверительного интервала для несезонных ЛС были представлены в виде $\bar{x} + \Delta x$, где $\Delta x = t(\alpha, f) \cdot \sigma$. Так, при $\alpha = 0,05$ к несезонным ЛС могут быть отнесены средства с $R \geq 0,40$.

Сравнительный анализ двух таблиц позволил установить численное значение критерия сезонности для исследованной выборки на уровне, равном 0,41.

Для того, чтобы установить критерий сезонности для всех наименований лекарственных средств, определялась средняя ошибка выборки ε :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,33}{\sqrt{60}} = 0,042. \quad (4.13)$$

Тогда при $\alpha = 0,05$

$$R - t(\alpha, f) \cdot \varepsilon \leq R \leq R + t(\alpha, f) \cdot \varepsilon. \quad (4.14)$$

или в окончательном виде

$$0,33 \leq R \leq 0,49. \quad (4.15)$$

Неравенство (4.15) означает, что с вероятностью 95 % все наименования лекарственных средств с коэффициентом сезонности, большим, чем 0,49 можно отнести к сезонным товарам, а с коэффициентом, меньшим 0,33 – к несезонным товарам.

В том случае, когда нет достаточно полной информации о прошлых значениях сбыта (в том числе, когда на рынок выводятся новые товары для которых нет предыстории сбыта), характеристики спроса задаются ЛПР. Наиболее целесообразным инструментом прогнозирования спроса на новые товары представляется экспертно-статистический подход в основе которого проводится сравнение нового товара с имеющимися аналогами. Суть метода аналогов заключается в том, что к решению проблемы прогнозирования подключаются эксперты и участие экспертов в ее решении

базируется на выделении ими аналогов для прогнозируемого процесса из числа ранее наблюдавшихся объектов. Предполагается, что по ранее наблюдавшимся процессам имеется достаточно представительная статистическая информация, которая может быть использована наряду с весьма ограниченной информацией, касающейся непосредственно прогнозируемого процесса.

4.2.3. Распределение времени поставок пополнения запасов

Если статистической информации о сбыте товаров, как правило, предостаточно, то информация об интенсивности пополнения запасов и времени выполнении заказов, чаще всего отсутствуют.

Во многом это связано с тем, что время выполнения заказа складывается из многих составляющих, учет которых затруднителен:

- времени на формирование и размещение у поставщика заказа на пополнение, с момента обнаружения необходимости в пополнении;
- времени, необходимого поставщику для того, чтобы подготовить поставку и отгрузить в адрес торгового предприятия;
- времени, необходимого для транспортировки товара до склада магазина;
- времени, необходимого для того, чтобы выгрузить товар, принять его на склад и подготовить к продаже или использованию;
- времени на выполнение формальных процедур, типа таможенной очистки и сертификации, если торговое предприятие работает с иностранным поставщиком.

В этом случае можно грубо оценить максимальное и минимальное времена поставок, а для вычисления показателя интенсивности пополнения запасов того или иного товара использовать среднее значение времени

поставки. Обзор работ показывает, что предположение о постоянстве времени поставки дает достаточно хорошие результаты в условиях отсутствия данных [112].

4.3. Информационно-логическая модель задачи управления ассортиментом и товарными запасами

Предложенный в диссертационной работе подход к управлению ассортиментом и товарными запасами может быть продемонстрирован с помощью информационно-логической модели поддержки принятия решений, которая графически отображает логическую структуру решения исследуемой задачи (рис.4.6).

Информационно-логическая модель иллюстрирует все модули поддержки принятия решений, а также их взаимоотношения между собой.

В общем виде, информационно-логическая модель управления ассортиментом и товарными запасами состоит из шести основных модулей.

К основным модулям относятся:

- модуль подготовки и первичной обработки данных наблюдений;
- модуль определения прогноза спроса на товар;
- модуль определения оптимального ассортимента товаров;
- модуль определения оптимальной стратегии управления товарными запасами;
- модуль товарного *ABC*-анализа;
- модуль оценки экономической эффективности.

План-график продаж создается на основе информации о заказах и спросе потребителей, состоянии ресурсов торгового предприятия, контрактах на поставку товаров и выполнение услуг внешними партнерами.



Рис.4.6. Информационно-логическая модель поддержки принятия решений при управлении ассортиментом и запасами

Кроме того, в план-график вносятся корректирующие воздействия по принципу обратной связи, зависящие от рассогласований между текущими и прогнозируемыми показателями в управлении ассортиментом и товарными запасами.

План-график является динамичным и периодически обновляемым. Плановый горизонт может изменяться в широких пределах – от нескольких недель до года и более. На основании план-графика устанавливается плановая номенклатура товаров.

Модуль подготовки и первичной обработки данных предназначен для подготовки исходных данных для последующих расчетов. На этом этапе проводится фильтрация статистических данных и исключение аномальных значений, а также пополнение исходных временных рядов недостающими данными.

К основополагающим моментам при построении прогнозных моделей для временных рядов продаж относится решение вопросов, связанных с определением основной тенденции развития временных рядов и оценкой сезонности продаж товаров.

В этой связи в модуле подготовки и первичной обработки данных, кроме первичной обработки временных рядов для каждого товара оценивается возможность дальнейшего прогнозирования с помощью оценивания сезонности товаров.

В модуле определения прогноза спроса на товары определяются параметры распределений спроса на товары (математические ожидания и стандартные отклонения). Искомые прогнозные значения параметров распределений находятся по двум видам прогнозных моделей: одна для «сезонных», другая для «несезонных» товаров.

Модуль определения оптимального ассортимента товаров предназначен для нахождения таких наименований товаров из плановой номенклатуры и их объемов при которых ожидаемая прибыль торгового пред-

приятия достигает максимального значения.

Модуль определения оптимальной стратегии управления товарными запасами предназначен для нахождения критических уровней запасов для каждого товара, а также оптимальных размеров партий на пополнение при которых прибыль от реализации товаров максимальна.

Экономический результат от управления ассортиментом и товарными запасами оценивается в модуле оценки экономической эффективности. Выходными переменными данного модуля являются стоимостные показатели, такие как суммарная прибыль и прибыль от продажи отдельных наименований товаров, суммарные издержки и издержки по каждому виду товаров, ожидаемые потери от дефицита товаров, количество остатков товаров.

На основании анализа экономических показателей от реализованного варианта управления ассортиментом и товарными запасами определяются границы групп товаров с помощью *ABC*-анализа, а также вносятся коррективы в план-график функционирования торгового предприятия.

Предлагаемая информационно-логическая модель поддержки принятия решений при управлении ассортиментом и товарными запасами является базовой. Разработанные в данной диссертационной работе математические модели и подходы к оптимизации ассортимента товаров и стратегий пополнения товарных запасов могут стать основой разрабатываемых систем поддержки принятия решений при управлении ассортиментом и товарными запасами.

ВЫВОДЫ:

1. Показано, что одним из определяющих условий при разработке системы управления ассортиментом и товарными запасами является автоматизация процессов поддержки принятия решений, позволяющая минимизировать трудоемкость обработки данных и отрицательное влияние человеческого фактора.

2. Показано, что эффективным инструментом для снижения размерности задачи управления ассортиментом и товарными запасами является *ABC*-анализ, позволяющий разбить все множество товаров на три группы по степени влияния на общий результат и применить разработанные модели управления ассортиментом и товарными запасами для товаров тех групп, которые обеспечивают основную прибыль торговому предприятию.

3. Показано, что для прогнозирования спроса на «сезонные» и «несезонные» товары эффективно использование разных моделей. Так, для товаров, сбыт которых не подвергался значительным сезонным колебаниям, эффективной является линейная модель, описывающая лишь основную тенденцию. Для товаров, сбыт которых значительно меняется во времени и для которых наблюдаются заметные колебания сбыта в зависимости от времени года, эффективной является комбинированная модель, которая кроме основной тенденции, описываемой линейной уравнением, описывает и сезонную составляющую с помощью тригонометрических рядов Фурье.

4. Предложена информационно-логическая модель поддержки принятия решений, которая графически отображает логическую структуру решения задачи управления ассортиментом и товарными запасами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационное исследование позволило решить важную научно-практическую задачу повышения эффективности управления ассортиментом и товарными запасами в розничной торговле с помощью разработанных математических моделей и алгоритмов, их реализующих.

Основные выводы и результаты диссертационного исследования состоят в следующем:

1. Проведен системный анализ задачи управления ассортиментом и товарными запасами в розничной торговле и существующих формализованных методов планирования и управления ассортиментом и товарными запасами. Выявлено отсутствие инструментария решения поставленной задачи в условиях неопределенности спроса на товары, или когда спрос описывается сложными теоретическими и эмпирическими распределениями вероятности, доступного широкому пользователю.

2. Поставлена двухэтапная задача управления ассортиментом и товарными запасами, которая может быть конкретизирована следующим образом: на первом этапе определяются ассортимент и объемы товаров, обеспечивающие максимум прибыли торгового предприятия на горизонте управления, на втором этапе с учетом найденного на предыдущем этапе ассортимента товаров и их объемов находится оптимальная стратегия пополнения запасов на горизонте управления.

3. Разработана математическая модель задачи определения оптимального ассортимента товаров в торговых организациях при случайном спросе на товар, в которой реализована вероятностная оценка эффективности ассортимента товаров и их запасов.

4. Показано, что спрос на товары хорошо описывается нормальным законом распределения вероятностей, поскольку зависит от огромного числа независимых случайных слагаемых с различными законами распре-

деления, суммарное воздействие которых стремится к нормальному закону.

5. Поставленная задача оптимизации ассортимента товаров сформулирована в виде задачи нелинейного программирования с нелинейной сепабельной целевой функцией и линейными ограничениями. Предложен эффективный вычислительный алгоритм, основанный на методе кусочно-линейной аппроксимации нелинейной целевой функции, позволяющий свести задачу нелинейного программирования к задаче линейного программирования, легко реализуемого на ЭВМ.

6. Разработаны две математические модели задачи управления запасами на основе теории массового обслуживания: модель с непрерывным пополнением запасов и модель пополнения запасов партиями.

Модель с непрерывным пополнением запасов может найти эффективное применение для нахождения оптимальной стратегии пополнения запасов в торговых организациях, когда невыгодно заказывать товар крупными партиями, а выгоднее штучное пополнение, но с широким ассортиментом. Модель пополнения запасов партиями пригодна для широкого круга задач управления запасами, в которых приходится иметь дело с групповыми поставками.

7. Для системы с непрерывным пополнением товарных запасов найдены точные аналитические выражения для расчета вероятностей дефицита товаров и среднего числа товаров в системе массового обслуживания. Для системы с пополнением запасов партиями найдены приближенные выражения для расчета вероятностей дефицита товаров и среднего числа товаров в системе обслуживания.

Полученные аналитические и приближенные выражения для вычисления параметров системы управления товарными запасами позволили сформировать критерии оптимальности, поставить задачи управления товарными запасами и найти оптимальные стратегии управления.

8. Разработаны модели и алгоритмы поддержки принятия решений при управлении ассортиментом и товарными запасами, включающие методы снижения размерности задачи управления ассортиментом и товарными запасами, оценки сезонности товаров, модели прогнозирования спроса на товары по ретроспективным данным сбыта товаров.

9. Разработана информационно-логическая модель поддержки принятия решений, которая графически отображает логическую структуру решения задачи управления ассортиментом и товарными запасами, и которая может быть положена в основу системы поддержки принятия решений при управления ассортиментом и товарными запасами в торговых организациях.

10. Результаты выполненных исследований положены в основу разработки систем поддержки принятия решений по управлению ассортиментом и товарными запасами больничных аптек лечебных организаций Ангарского городского округа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ, 1998. 1022 с.
2. Алябьева М.В. Оптимизация управления товарными запасами в оптовой торговле: дис. канд. экон. наук: 08.00.05. Белгород, 1997. 175 с.
3. Армстронг Дж. С. Прогнозирование продаж. В кн.: Маркетинг / под ред. М. Бейкера. Спб.: Питер, 2002. С. 351-368.
4. Ансофф И. Стратегическое управление. М.: Экономика, 1989. 519 с.
5. Баль А.В. Методы и модели оптимизации управления товарными запасами в мультиформатных розничных сетях: дис. канд. техн. наук: 05.13.10. Челябинск, 2015. 133 с.
6. Баутов А.Н. Формирование и расчет оптимального ассортимента при случайном спросе // Маркетинг в России и за рубежом. 2007. №3. С.18-32.
7. Беленов О.Н., Бугаева Т.М. Типология методов управления ассортиментом // Маркетинг. 2010. №1(1). С. 69-75.
8. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит, 1960. 400 с.
9. Бритков В. Б. Методическое пособие по курсу «Системы поддержки принятия решений». М.: Ленанд, 2009. 972 с.
10. Бузукова Е. А. Ассортимент розничного магазина: методы анализа и практические советы. СПб.: Питер, 2000. 176 с.
11. Букан Дж., Кенингсберг Э. Научное управление запасами. М.: Наука, 1967. 423 с.
12. Волков А. В. Формирование стратегии управления запасами в логистических системах с использованием методов прогнозирования: дис. канд. экон. наук: 08.00.05. СПб., 2003. 141 с.
13. Вагнер Г. Основы исследования операций. В 3-х томах. М.: Мир, 1972.
14. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. 552 с.

15. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, Физматлит, 1991. 384 с.
16. Гасратов, М. Г. Теоретико-игровые модели управления материальными запасами: автореф. дис. канд. физ-мат. наук: 01.01.09. СПб., 2007. 20 с.
17. Гацан В. В., Антонова Е. В., Долгих В. В., Осыченко В. П., Кудрявцева М., Пудель М. Е. Управление запасами оборотных активов в муниципальных аптеках // Фармация. 1998. №4. С. 47-49.
18. Глембоцкая Г. Т., Теодорович А. А. Анализ ассортимента лекарственных препаратов по скорости их реализации // Фармация. 1993. №3. С. 51-54.
19. Голенко Д.И. Статистические модели в управлении производством. М.: Статистика, 1973. 368 с.
20. Голухов Г. Н., Шиленко Ю. В., Корышев В. И., Рейхарт Д. В. Маркетинг на рынке услуг и товаров медико-производственного комплекса // Экономика здравоохранения. 1998. №7(31). С. 11-20.
21. Гребнев А.И., Полькин А.В., Шпагин А.Ф. АСУ в торговле. М.: Экономика, 1983. 167 с.
22. Громовик Б. П. Управление товарным ассортиментом фармацевтического предприятия с помощью ABC и XYZ-анализа // Еженедельник аптека. 2003. №6(377). С. 25-30.
23. Данциг Д., Вольф Ф. Алгоритмы разложения для задач линейного программирования, 1964, Т.8, № 1. С. 151-160.
24. Дарбинян М.М. Товарные запасы в торговле и их оптимизация. М.: Экономика, 1978. 237 с.
25. Дворядкина Е.Б. Факторы спроса на локальном потребительском рынке товаров и услуг // Известия УрГЭУ. 2014. №1(51). С. 43-48.
26. Джупарова И.А. Разработка экономико-математической модели формирования товаров аптечного ассортимента // Медицина и образование Сибири. 2012. №2. С. 42-49.
27. Дзензелюк Н.С., Каргина А.С. Моделирование систем управления запа-

- сами: Теория и практика // Вестник ЮУрГУ. 2011. №21. С. 32-34.
28. Демченко С.С., Кнопов П.С., Чорней Р.К. Оптимальные стратегии для полумарковской системы запасов // Кибернетика и системный анализ. 2002. Вып. 1. С. 146-160.
29. Дибб С., Симкин Л., Брэдли Дж. Практическое руководство по маркетинговому планированию. СПб: Питер, 2001. 256 с.
30. Дихтль Е., Хершген Х. Практический маркетинг: Учеб. пособие / Под ред. И.С. Минко. М.: Высш. шк.: ИНФРА-М, 1996. 255 с.
31. Дойль П. Маркетинг – менеджмент и стратегии. СПб: «Питер», 2002. 544 с.
32. Ефремов В.С. Стратегия бизнеса. Концепции и методы планирования. М.: Финпресс, 1998. 192 с.
33. Ефремова Т.И. Определение размера дефицита товарно-материальных ценностей в вероятностной модели управления запасами // Организатор производства. 2013. №4. С. 77-84.
34. Зайковская Г.Г. Решение проблемы оптимизации товарного запаса на предприятиях оптовой торговли с применением методов имитационного моделирования // Логистика. 2010. №4. С. 18-20.
35. Зермати П. Практика управления товарными запасами. М.: Экономика, 1982. 112 с.
36. Иванов А.В. Математические методы и инструментальные средства управления товарным ассортиментом на основе авторегрессионной модели расчета рентабельности: дис. канд. экон. наук: 08.00.13. Самара, 2007. 154 с.
37. Ивашкевич В. Ю. Моделирование в управлении материальными оборотными средствами коммерческой организации: дис. канд. экон. наук: 08.00.13. М., 2006. 163 с.
38. Имитационное моделирование в оперативном управлении производством / под ред. Соломатина Н.А. М.: Машиностроение, 1973. 208 с.
39. Исследование операций. В 2-х томах. Под ред. Дж. Моудера, С. Элмагра-

би. М.: Мир, 1981. Т.2. 677 с.

40. Исследования по общей теории систем: Сб. переводов / Под ред. В.Н. Садовского и Э.Г. Юдина. – М.: Прогресс, 1969. 520 с.

41. Истомина А.А., Сумарокова Н.Н., Истомин А.Л. Оптимальное управление закупками в условиях неопределенности / Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. № 3 (47). – Иркутск: ИрГУПС, 2015. – С. 131-137.

42. Истомина А.А., Бадеников В.Я., Истомин А.Л. Задача формирования оптимального ассортимента и товарных запасов в розничной торговле в условиях неопределенности // Вестник АГТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика, № 2. – Астрахань, 2017. – С. 105-116.

43. Истомина А.А., Бадеников В.Я., Истомин А.Л. Оптимизация задачи управления запасами при случайном спросе // Известия Самарского научного центра РАН. Т.19, №1(2), 2017. – С. 406-409.

44. Истомина А.А. Математические модели поддержки принятия решений в управлении ассортиментом и товарными запасами // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. № 2(54). – Иркутск: ИрГУПС, 2017. – С. 126-132.

45. Истомина А.А., Бадеников В.Я., Истомин А.Л. Управление товарными запасами на основе теории массового обслуживания // Вестник СибГУТИ, №3. – Новосибирск, 2017. – С. 94-103.

46. Истомина А.А., Бадеников В.Я., Истомин А.Л. Оценка спроса на лекарственные средства в задаче управления товарными запасами. // Вестник АНГТУ № 10. – Ангарск, 2016. – С. 152-158.

47. Истомина А.А., Бадеников В.Я., Истомин А.Л. Анализ и прогнозирование продаж лекарственных средств в аптечных организациях // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-29: сб. трудов XXIX Междунар. науч. конф.: в 12 т. Т.3. – Саратов, Самара, 2016. – С. 136-139.

48. Истомина А.А., Бадеников В.Я., Истомин А.Л. Постановка задачи оптимизации ассортимента товаров в розничной торговле в условиях неопределенности // Естественные и технические науки в современном мире: сб. трудов XI Междунар. науч.-практ. конф. – М., 2017. – С. 13-17.
49. Истомина А.А., Бадеников В.Я., Истомин А.Л. Модель управления запасами при случайном спросе // Обработка информации и математическое моделирование: Российская научно-техническая конференция – Новосибирск: СибГУТИ, 2017. – С. 233-237.
50. Истомина А.А., Бадеников В.Я., Истомин А.Л. Поддержка принятия решений по управлению запасами в условиях неопределенности // Информационные и математические технологии в науке и управлении, №2. – Иркутск, 2017. – С. 104-112.
51. Калинин Н.В., Хоботов Е.Н. Модели управления многопродуктовыми запасами при постоянном спросе // Автоматика и телемеханика. 2008. №9. С. 156-169.
52. Калинин Н.М. Разработка организационной системы управления запасами в условиях многономенклатурного производства: дис. канд. техн. наук: 05.02.22. М., 2009. 139 с.
53. Карлова М.Ю. Современный научный подход к проблеме управления неоднородными материальными запасами торгового предприятия // Вопросы современной науки и практики: Университет им. В.И. Вернадского. 2011. №2(33). С. 252-257.
54. Каторгин В.Н., Терских В.М. Оценка спроса на автомобильные запчасти на основе модели смеси вероятностных распределений // Вестник ИрГТУ. 2014. №4(87). С. 110-114.
55. Клэнси К., Криг П. Антиинтуитивный маркетинг. СПб.: Питер, 2006. 432 с.
56. Ковалев М. Моделирование рыночных ситуаций и стратегий // Маркетинг. 2003. №1. С. 75-78.

57. Кокс Д.Р., Смит Т. Л. Теория очередей. М.: Мир, 1966. 218 с.
58. Коновалов А.С., Барладян И.И., Токмакова А.Б. Сравнительный анализ эффективности различных методов кластеризации в задачах предпроектного обследования автоматизируемых систем управления снабжения и логистики // Теория активных систем. Тр. Междунар. науч.-практ. конф., 17 – 19 ноября 2009 г. Москва / ИПУ РАН. М., 2009. Т.1. С. 255-259.
59. Королюк В.С. Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
60. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики. М.: Энергоатомиздат, 1987. 496 с.
61. Котикова М.О. Повышение эффективности управления товарными запасами в новых условиях хозяйствования: автореф. дис. канд. экон. наук. М., 1990. 20 с.
62. Кофман А. Методы и модели исследования операций. М.: Мир, 1966. 524 с.
63. Кугач В.В., Мастыков А.Н. Системы управления запасами // Рецепт. 2007. №5(55). С. 13-20.
64. Кугач В.В., Мастыков А.Н. Управление товарными запасами аптечной организации // Рецепт. 2007. №4(54). С. 18-28.
65. Кузнецов Д. Н. Оптимизация затрат в системе управления запасами торгового предприятия в краткосрочной перспективе: дис. канд. экон. наук: 08.00.13. Тамбов, 2007. 193 с.
66. Лампси А.С., Швилкина Л. Б. Управление продажами в период кризиса: обзор состояния рынка фармацевтических препаратов и методы работы в условиях кризиса перепроизводства // Управление продажами. 2001. №2. С. 10-15.
67. Лосев А. И. Оптимизация запаса топлива в распределительной системе АЗС: дис. канд. экон. наук: 08.00.06. СПб., 2000. 138 с.
68. Лоскутова Е. Е., Пак Т. В., Тарасенко М. А. Рациональный ассортимент -

- основа эффективной деятельности аптечной организации // Новая Аптека. 2001. №1. С. 39-44.
69. Лотоцкий В. А., Мандель А.С. Методы и модели управления запасами. М.: Наука, 1991. 188 с.
70. Лукинский В. В. Теория и методология управления запасами в цепях поставок: дис. докт. экон. наук: 08.00.05. СПб., 2008. 291 с.
71. Мак-Дональд М. Стратегическое планирование маркетинга. СПб: Питер, 2000. 320 с.
72. Мандель А.С., Семенов Д.А. Адаптивные алгоритмы оценки параметров оптимальных стратегий управления запасами при ограниченном дефиците // Автоматика и телемеханика. 2008. №6. С 117-128.
73. Мандель А.С. О выборе критериев в задачах управления запасами в условиях неопределенности // В сборн. научн. трудов XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-14). М., С. 4212-4218.
74. Мандель А.С. Задача управления многономенклатурными запасами в условиях неопределенности и нестационарности. Часть 1. Нормативная модель // Проблемы управления. 2011. №6. С. 47-51.
75. Мандель А.С. Управление многономенклатурными запасами в условиях неопределенности и нестационарности. Часть 2. Создание страховых запасов // Проблемы управления. 2012. №1. С. 42-46.
76. Математические методы в планировании отраслей и предприятий / под ред. И.Г. Попова. М.: Экономика, 1981. 336 с.
77. Мельников Р. В. Исследование проблем управления запасами непрерывного продукта в стохастической модели регенерации: дис. канд. физ-мат. наук: 01.01.05. М., 2010. 135 с.
78. Месарович М., Такахара И. Общая теория систем: математические основы. – М.: Мир, 1978. 311 с.
79. Мильнер Б.З, Евенко Л.И., Раппопорт В.С. Системный подход к организации управления. – М.: Экономика, 1983. 224 с.

80. Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. М.: СИНТЕГ, 2007. 668 с.
81. Одинцова Е. В. Формирование ассортиментной политики. Электрон. журн. // Энциклопедия маркетинга. Режим доступа: [url:http://www.marketing.spb.ru/lib-mm/pricing/assortment_policy1.htm](http://www.marketing.spb.ru/lib-mm/pricing/assortment_policy1.htm).
82. Первозванский А. А. Математические методы в управлении производством. М.: Наука, 1975. 615 с.
83. Петренко С.В. Обеспечение оптимального управления запасами торгового предприятия при решении проблемы планирования ассортимента с помощью кластерного подхода // Перспективы науки. 2010. №5(07). С. 120-123.
84. Пинигин Е.Б. Управление запасами на предприятиях оптовой торговли: актуальность, структура, особенности // Прикладная информатика. 2006. №6. С. 19-28.
85. Пинчук Ю. Управление запасами на основе показателей оборачиваемости. Электрон. журн. // Финансовый директор. 2008. №2. С. 39-43. Режим доступа: <http://www.intalev.ua/index.php?id=23954/>.
86. Портер М. Конкурентная стратегия: Методика анализа отраслей и конкурентов. 2-е изд. М.: Альпина Бизнес Букс, 2006. 454 с.
87. Прабху Н. Методы теории массового обслуживания и управления запасами. М.: Машиностроение, 1969. 356 с.
88. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука, Физматлит, 1968. 288 с.
89. Рожков В.Г. Автоматизированная система управления запасами товарно-материальных ценностей в условиях стохастического характера потребления и ограниченного объема складских помещений: дис. канд. техн. наук: 05.13.06. Орел, 2006. 171 с.
90. Рубальский Г. В. Управление запасами при случайном спросе. М.: Сов. радио, 1977. 160 с.
91. Рубальский Г. В. Стохастическая теория управления запасами // Автоматика и телемеханика. 2009. №2. С. 175-186.

92. Рубальский Г. В. Анализ и оптимизация нестационарного режима в вероятностной модели управления запасами // Автоматика и телемеханика. 2011. №3. С. 69-80.
93. Рыжиков, Ю. И. Теория очередей и управление запасами. СПб.: Питер, 2001. 384 с.
94. Рыжиков Ю. И. Управление запасами. М.: Наука, Физматлит, 1969. 344 с.
95. Саати Т. Математические методы исследования операций. М.: Воениздат, 1963. 420 с.
96. Садриев Д.С., Садриев Р.Д. ABC-анализ и оптимизация товарного ассортимента // Маркетинг. 2008. №1. С. 119-125.
97. Сакович В. А. Модели управления запасами. Минск: Наука и техника, 1986. 319 с.
98. Серая О.В., Самородов В.Б., Клименко Т.А. Выбор критерия оптимизации в задаче управления многономенклатурными запасами // Вестник Харьк. нац. автомобил.-дорожн. ун-та. 2009. №45. С. 31-34.
99. Системный анализ в экономике и организации производства. Учебник для студентов вузов / Под ред. С.А. Валугева, В.Н. Волковой. – Л.: Политехника, 1991. 398 с.
100. Смагин В.И. Управление запасами по двум критериям с учетом ограничений // Вестник ТГУ. 2006. № 290. С. 244-246.
101. Статистические методы прогнозирования на основе временных рядов / под ред. Ю.В. Сажина. Саранск: Мордовский ун-т, 2000. 113 с.
102. Степанов А.С. Методологические подходы к оптимизации работы региональных оптовых фармацевтических организаций (на примере Дальнего Востока): дис. докт. фарм. наук. Хабаровск, 2014. 333 с.
103. Стерлингова А.Н. Оптимальный размер заказа, или загадочная формула Вильсона // Логистика и система. 2005. №2. С. 64-69.
104. Тарасов Ю.Н., Дзенелюк Н.С. К обзору современного состояния теории синтеза и практики внедрения систем управления запасами // Вестник ЮУр-

ГУ. 2012. №22. С. 182-184.

105. Таха Х. Введение в исследование операций. 6-е издание: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. 912 с.

106. Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи / Под ред. Волковой В.Н., Воронкова В.А. и др. – М.: Радио и связь, 1983. 248 с.

107. Толстых С.С. Стохастическая модель многоэтапного управления многопродуктовыми запасами // Управление общественными и экономическими системами. 2007. №1. С. 1-6.

108. Уемов А.И. Системный подход и общая теория систем. – М.: Мысль, 1978. 272 с.

109. Фасоляк, Н. Д. Управление производственными запасами. М.: Экономика, 1972. 425 с.

110. Фидаров В.В., Герасимов Б.И., Романов А.П. Формирование товарно-ассортиментной политики организации в условиях неопределенности. Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2004. 82 с.

111. Феклисов, Г. И. Математическое обеспечение управления запасами. М.: Статистика, 1977. 112 с.

112. Хедли Д., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. М.: Наука, 1969. 512 с.

113. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967. 506 с.

114. Хендерсон Б. Товарный портфель (матрица «рост – доля рынка» Бостонской консультационной группы). В кн.: Минцберг Г., Куинн Дж. Б., Гошал С. Стратегический процесс. СПб: Питер, 2001. С. 491-494.

115. Хэнсменн, Ф. Применение математических методов в управлении производством и запасами. М.: Прогресс, 1966. 372 с.

116. Чаусова, Е. В. Динамические модели систем управления запасами с интервальной неопределенностью в данных: дис. канд. физ-мат. наук: 05.13.18. Томск, 2003. 147 с.

117. Чаусова, Е. В. Динамическая сетевая модель управления запасами с интервальной неопределенностью спроса и устареванием запаса в узлах сети // Вестник ТГУ. 2004. №284. С. 103-108.
118. Черчмен У., Акоф Л., Арноф Л. Введение в исследование операций. М.: Наука, 1968. 488 с.
119. Читая Г.О. Снабжение потребителей торговой организацией: взгляд через призму экономико-математического моделирования. Электрон. журн. // Справочник экономиста. 2009. №9. Режим доступа: http://www.profiz.ru/se/9_09/Chit_snabj_potr/.
120. Чуб Б.А. Концепция стратегического управления General Electric. Электрон. журн. // McKinsey. Режим доступа: [url: http://www.iteam.ru/articles.php?pid=1&tid=2&sid=16&id=452](http://www.iteam.ru/articles.php?pid=1&tid=2&sid=16&id=452).
121. Швец А., Швец М. Анализ ассортиментной политики предприятия // Маркетинг. 2007. №2. С. 50-60.
122. Шнурков П.В., Мельников Р.В. Исследование проблемы управления запасом непрерывного продукта при детерминированной задержке поставки // Автоматика и телемеханика. 2008. №10. С. 93-110.
123. Шрайбфедер Дж. Эффективное управление запасами. 2-е изд. М.: Альпина Бизнес Букс, 2006. 304 с.
124. Эльяшевич Е.Г. История развития коммерческой и фармацевтической логистики // Вестник фармации. 2009. №1(43). С. 1-5.
125. Юрова Н.А. Инструменты и методы управления ассортиментом товаров в ритейле. Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, 2010. С. 165 – 170.
126. Abell D.F. Defining the Business: The Starting Point of Strategic Planning.- Englewood Cliffs; London: Prentice-Hall, 1980.
127. Harris, F. Operation and Cost (Factory Management Series) / F. Harris – Chicago: A.W. Shaw Co., 1915.
128. Hichens R.E., Robinson S.J.Q., Wade D.P. The Directional Policy Matrix:

- Tool for strategic Planning. – Long Range Planning, June 1978. Vol. 11. pp. 8-15.
129. Hofer C.W. Conceptual Constructs for Formulating Corporate and Business Strategy. Boston, MA: Boston University. 1977.
130. Mitten L.G., Second O.R. Conference, Armour Research Institute and Illinois Institute of Technology, 1957.
131. Morse P.M. Queues, Inventories and Maintenance. Publications in Operations Research, № 1, Operation Research Society of America, New York, John Willey & Sons, Inc., 1958.
132. Osel R., Wright R. Allocating resources: How to Do It in Multi-Industry Corporations. Handbook of Business Problem Solving. New York: McGraw-Hill, 1980.
133. Raymond F.E. Quantity and Economy in Manufacturing. McGraw-Hill, N.Y., 1931.

ПРИЛОЖЕНИЯ



**МИНИСТЕРСТВО
ЗДРАВООХРАНЕНИЯ
ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ
ОТДЕЛ ПО ОРГАНИЗАЦИИ
МЕДИЦИНСКОЙ И ЛЕКАРСТВЕННОЙ
ПОМОЩИ ПО ГОРОДУ АНГАРСКУ**

ул. Карла Маркса, 41, Ангарск,

Иркутской обл., 665813

тел./факс (3955) 52-30-15.

e-mail: zdrav@angarsk-adm.ru

17.03.2017 № 12-01-08/274

на №

от

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

1. Наименование предложения для внедрения: Оптимизация системы управления товарными запасами аптечной организации (методические рекомендации).

2. Авторы и дата предложения: Истомина Алена Андреевна, инженер ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», Бадеников Виктор Яковлевич, д.т.н., профессор кафедры автоматизации технологических процессов ФГБОУ ВО «Ангарский государственный технический университет», март 2017 года.

3. Место внедрения: Медицинские организации Ангарского городского округа.

4. Эффективность внедрения: Разработанные подходы к оптимизации системы управления товарными запасами позволяют оптимизировать показатели больничных аптек медицинских организаций Ангарского городского округа.

5. Замечания и предложения: Рекомендовать к использованию методические подходы к оптимизации системы управления запасами лекарственных средств в качестве базовых мероприятий для повышения эффективности различных фармацевтических организаций.

Начальник отдела
по организации медицинской
и лекарственной помощи в городе Ангарске
Министерства Здравоохранения
Иркутской области

О.Н. Кошина

УТВЕРЖДАЮ

Ректор ФГБОУ ВО

«Ангарский государственный техниче-
ский университет»

А.В. Бадеников

2017 г.

А К Т

об использовании результатов диссертационной работы
Истоминой Алены Андреевны в учебном процессе

Комиссия в составе: председатель, проректор по научной работе, д.т.н., профессор Бальчугов А.В., члены комиссии: заведующий кафедрой экономики, маркетинга и психологии управления, д.б.н., профессор Дьякович М.П., заведующий кафедрой вычислительных машин и комплексов, к.т.н., доцент, Кривов М.В. составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Истоминой А.А. «Управление ассортиментом и запасами в условиях неопределенности (на примере предприятий розничной торговли)» внедрены в учебный процесс Ангарского государственного технического университета.

1. Вид результатов, внедренных в учебный процесс:

- вероятностная математическая модель нахождения оптимального ассортимента товаров, изделий, запасных частей;
- математическая модель задачи управления запасами, сформулированная в терминах системы массового обслуживания.

2. Область применения:

- основная образовательная программа высшего образования 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, дисциплины «Моделирование», «Методы оптимизации».
- основная образовательная программа высшего образования 38.03.01 Экономика, дисциплина «Математическое моделирование в экономике».

3. Форма внедрения:

- темы в курсе лекций, варианты в задании к лабораторным работам;

4. Эффект от внедрения:

- приобретение новых знаний и развитие компетенций обучающихся в области моделирования экономическими систем и бизнес-процессов.

Председатель комиссии: _____ А.В. Бальчугов

Члены комиссии: _____ М.П. Дьякович

_____ М.В. Кривов