

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Сибирский федеральный университет»

На правах рукописи

**Иванов Виктор Андреевич**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГО-  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ В УЗЛАХ ТРЕНИЯ**

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ»

**Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук**

Научный руководитель:  
д-р физ.-мат. наук,  
профессор Еркаев Н. В.

Красноярск – 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ГЛАВА 1. ИСТОРИЯ ВОПРОСА И РАЗВИТИЕ ПОДХОДОВ .....	10
1.1 Анализ существующих результатов и подходов .....	10
1.2 Общее описание предлагаемого метода .....	18
ГЛАВА 2. МЕТОДЫ И ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПРОГИБА ПОВЕРХНОСТЕЙ.....	24
2.1 Аналитический метод .....	24
2.2 Численный метод .....	27
2.3 Тестовые расчеты .....	28
2.4 Расчеты прогибов цилиндрических слоев и сравнение с аналитическими оценками .....	30
2.5 Влияние шага сетки на точность расчета цилиндрического слоя.....	34
2.6 Влияние сетки на расчет деформаций пластины .....	36
2.7 Методика определения функции податливости .....	39
Выводы .....	42
Список принятых обозначений.....	42
ГЛАВА 3. УПРУГО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ КОНТАКТ РОЛИКА С ПЛАСТИНОЙ.....	44
3.1 Постановка задачи.....	44
3.2 Аналитическое решение при постоянной вязкости.....	47
3.3 Аналитическое решение с учетом изменения вязкости.....	61
3.4 Расчет деформаций контактирующих тел и функции податливости ....	63
3.5 Итерационная формула. Пример расчета .....	67
3.6 Анализ влияния деформаций и зависимости вязкости от давления.....	74
Выводы .....	77
Список принятых обозначений.....	78

ГЛАВА 4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДШИПНИК СКОЛЬЖЕНИЯ: МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ .....	80
4.1 Постановка задачи.....	80
4.2 Расчет давления без учета прогиба .....	82
4.3 Расчет упругих деформаций .....	84
4.4 Трехмерные расчеты ANSYS.....	88
4.5 Тепловой расчет .....	91
4.6 Самосогласованное стационарное решение.....	93
4.7 Программный комплекс расчета давления в смазочном слое.....	95
Выводы .....	104
Список принятых обозначений.....	105
ГЛАВА 5. АПРОБАЦИЯ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА НА РЕАЛЬНОМ ОБЪЕКТЕ .....	107
5.1 Описание конструктивной схемы.....	107
5.2 Расчет силовых показателей в передачах.....	109
5.3 Исследование работы подшипников в установившемся режиме .....	113
5.4 Исследование работы подшипников в условиях ударных нагрузок ...	116
Список принятых обозначений.....	122
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	124
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	126
ПРИЛОЖЕНИЕ А: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.....	137
ПРИЛОЖЕНИЕ Б: Акт о внедрении результатов диссертационной работы	138

## **ВВЕДЕНИЕ**

Данная работа посвящена математическому моделированию упруго-гидродинамического взаимодействия тел при наличии тонкого слоя смазочного материала, разделяющего рабочие поверхности. Рассматриваются как стационарные, так и нестационарные аспекты такого взаимодействия. Разрабатываемый подход опирается на совместное решение уравнений гидродинамики смазочного материала и механики деформируемых тел. Важным усложняющим фактором является необходимость учета нелинейной зависимости коэффициента вязкости от термодинамических параметров.

### **Актуальность темы**

Задачи упруго-гидродинамического контакта возникают при проектировании различных узлов трения, и в особенности – подшипников качения и скольжения, которые эксплуатируются в очень широком диапазоне условий и нагрузок. К этим узлам часто предъявляются повышенные технические требования, и при их конструировании возникает необходимость в использовании современных методов математического моделирования. Поэтому разработка и совершенствование математических моделей узлов трения является актуальной и важной задачей. Несмотря на то, что контактной гидродинамике около 80 лет, до сегодняшнего момента не известны полные решения для многих тяжело нагруженных режимов упруго-гидродинамического контакта. В настоящее время широкое применение получили различные мульти-дисциплинарные программные комплексы. Однако, применение таких комплексов для расчета нестационарных упруго-гидродинамических задач наталкивается на значительные трудности, связанные с наличием очень тонких слоев, огромных перепадов давления и жесткостью нестационарных задач, требующих выбора очень мелких шагов по времени и пространству. В этом случае, для решения конкретных инженерных задач имеет смысл сочетать аналитические методы с ограниченным численным

моделированием, что позволяет существенно снижать вычислительные затраты. Такой подход «гибридного» моделирования применяется в данной работе.

### **Цель и задачи работы**

Разработать математическую модель и метод расчета самосогласованных распределений давления и деформаций рабочих поверхностей в зонах гидродинамического контакта узлов трения при больших нагрузках с учетом тепловыделения и нелинейной зависимости вязкости смазочного материала от давления и температуры, а так же реализовать метод в виде комплекса программ.

1) Разработать метод расчета функции податливости, характеризующей упругие свойства контактирующих поверхностей;

2) Построить алгоритм расчета распределения давления в области смазочного слоя с учетом деформации контактирующих тел и переменной вязкости слоя, зависящей от давления и температуры.

3) На основе численной модели выполнить исследования эффектов, связанных с нелинейной зависимостью коэффициента вязкости от давления, а также прогибом поверхностей в зоне гидродинамического контакта.

4) Определить зависимости несущей способности и коэффициента демпфирования смазочного слоя от минимальной толщины смазочного слоя.

5) Получить уравнения и исследовать решения, описывающие переходные нестационарные режимы упруго-гидродинамического контакта.

### **Научная новизна работы**

Впервые разработан численный метод определения функций податливости контактирующих тел с использованием разложения Фурье и коэффициентов регуляризации. Найденные функции податливости не зависят от конкретного распределения давления в смазочном слое и используются для итерационного расчета характеристик смазочного слоя и деформаций поверхностей при различных нагрузках. Построен итерационный алгоритм с использованием функции податливости, который обеспечивает достаточно быструю сходимость и показывает высокую эффективность при вычислении самосогласованных поверхностных деформаций и распределений давления в зоне контакта.

Данный метод применен для определения зависимости несущей способности и коэффициента демпфирования смазочного слоя от толщины смазочного слоя. С использованием найденных функций изучен переходной процесс установления стационарного режима.

Впервые получено асимптотическое решение задачи нестационарного упруго-гидродинамического контакта движущегося ролика с пластиной конечной толщины с учетом деформации тел и зависимости коэффициента вязкости от давления.

Впервые найдено критическое значение пьезокоэффициента, при котором эффект возрастания давления, обусловленный увеличением вязкости, компенсируется влиянием прогиба упругой поверхности.

#### **Положения, выносимые на защиту**

Построена новая математическая модель нестационарного упруго-гидродинамического контакта, использующая разбиение исходной общей задачи на более простые последовательно решаемые задачи.

Предложен новый численный метод расчета упруго-гидродинамического контакта, основанный на введении функции податливости, зависящей только от геометрических размеров и упругих свойств контактирующих материалов и являющейся ключевым элементом при расчете самосогласованных распределений давлений и деформаций в зоне упруго-гидродинамического контакта.

Разработана программа, позволяющая эффективно вычислять распределение давления в смазочном слое с учетом кавитации, переменной вязкости, волнистости и деформаций контактирующих поверхностей.

Показано, что релаксация давления в ходе нестационарного переходного процесса определяется коэффициентом демпфирования смазочного слоя, который находится из решения квазистационарной задачи с использованием функции податливости.

Получены уравнения нестационарного переходного процесса в зоне контакта, которые являются «жесткими» и содержат сингулярные малые параметры, характеризующие «быстрые» и «медленные» стадии релаксации

давления в смазочном слое. Построено асимптотическое нестационарное решение, позволяющее аналитически описать процесс релаксации максимального давления в слое при любых резких изменениях общей нагрузки.

### **Степень достоверности результатов**

При моделировании проводилось тестирование численных алгоритмов сравнением с точными и приближенными аналитическими методами расчета деформаций упругих цилиндрических оболочек. Тесты показали хорошую сходимость расчетов. Также проводился анализ влияния шага сетки на точность расчета для используемого программного комплекса. Тестирование численной модели гидродинамического контакта ролика с пластиной показало, что максимум давления в смазочном слое и значение несущей способности хорошо согласуются с формулами П. Л. Капицы, полученными в стационарном случае при отсутствии деформаций поверхностей. Результаты расчетов распределения давления в смазочном слое для подшипника скольжения сравнивались с опубликованными работами других авторов, выполненными на основе других численных методов и программных пакетов. Все тесты и сравнения показали хорошую точность используемых в диссертационной работе методов, что позволяет считать полученные на их основе результаты достоверными.

### **Личный вклад автора**

Автор лично проводил все аналитические и численные расчеты, а также принимал непосредственное участие в анализе и обработке данных, интерпретации результатов, подготовке статей и их представлении на различных конференциях.

### **Практическая значимость**

В диссертационной работе развита методика, позволяющая разделять исходную задачу упруго-гидродинамического взаимодействия тел в узле трения на более простые задачи, решаемые отдельно: а) расчет деформаций контактирующих тел; б) расчет давления в смазочном слое в зоне контакта. Ключевую роль в данной методике играет функция податливости, посредством которой учитывается влияние деформаций на течение в смазочном слое.

Применение данного подхода позволяет существенно ускорить расчеты конкретных инженерных задач, снизить требования к используемой компьютерной технике и снизить затраты на вычислительные ресурсы. Результаты диссертации использованы филиалом ООО «Русская инжиниринговая компания» для оптимизации работы и продления срока службы редукторов, применяющихся при производстве анодной массы.

### **Апробация работы**

Основные положения диссертационной работы, разработанные модели, методы расчета узлов трения были представлены и обсуждались на следующих международных и всероссийских конференциях:

VII, VIII, IX Международные конференции, посвященные памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. «Решетневские чтения», г. Красноярск. 2013, 2014, 2016.

VIII, IX, X, XI, Всероссийские научно-технические конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием. «Молодежь и наука». Г. Красноярск. 2012, 2013, 2014, 2015.

Так же промежуточные результаты докладывались на семинаре ANDRITZ HYDRO GmbH in Weiz, Austria. 2015.

### **Публикации**

Всего по теме диссертации опубликовано 14 научных работ, в том числе: 8 статей в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК РФ; 5 публикаций в материалах международных и российских конференций; получено 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ.

### **Структура и объем диссертации**

Работа состоит из введения, пяти глав, выводов, списка литературы из 110 наименований. Объем диссертации составляет 138 страниц. Работа содержит 63 рисунка и 6 таблиц.

## **Краткое содержание работы**

В **первой главе** обоснована актуальность темы диссертации, дан краткий литературный обзор, описано текущее состояние контактной гидродинамики и изложен предлагаемый метод упруго-гидродинамического расчета узлов трения.

Во **второй главе** рассмотрены существующие приближенные и точные аналитические решения задачи прогиба поверхности, а также выполнено сравнение аналитических решений с расчетом на основе программного комплекса ANSYS. Получена оценка погрешности численного метода и определены пределы использования приближенной формулы Винклера. Проведены тестовые расчеты прогиба для плоских и цилиндрических тел конечной длины при различных нагрузках и геометрических параметрах. Определено влияние торцевых эффектов на расчет прогиба центрального сечения цилиндрического тела. Введено понятие функции податливости и на ее основе описан метод решения упруго-гидродинамической задачи.

В **третьей главе** рассмотрена математическая модель упруго-гидродинамического контакта ролика с пластиной при наличии смазочного слоя. Найдено самосогласованное решение. Определены несущая способность и демпфирующий коэффициент, зависящие от толщины смазочного слоя.

В **четвертой главе** рассмотрена математическая модель подшипника скольжения с учетом переменной вязкости масла в смазочном слое смазки, а также деформаций тел в зоне контакта. Определены функции податливости для двумерного и трехмерного случая, даны их сравнительные характеристики.

В **пятой главе** разработанный метод применен к реальным объектам. Рассчитаны максимальные давления в зоне контакта при нестационарных режимах работы узла трения.

## ГЛАВА 1. ИСТОРИЯ ВОПРОСА И РАЗВИТИЕ ПОДХОДОВ

### 1.1 Анализ существующих результатов и подходов

Выход из строя узлов трения является основной механической причиной поломки техники. Отказ одного, даже незначительного узла ведет к остановке всего механизма, а следовательно – к его простоя и большим экономическим затратам. Поэтому повышение надежности и ресурса узлов трения является важной и актуальной задачей.

Основными узлами трения служат подшипники качения и скольжения. Подшипником (от слова шип) называют изделие, являющееся частью опоры или упора, которое поддерживает вал, ось или иную подвижную конструкцию с заданной жёсткостью. Подшипник фиксирует положение в пространстве, обеспечивает вращение, качение с наименьшим сопротивлением, воспринимает и передаёт нагрузку от подвижного узла на другие части конструкции. Изобрел подшипник в 1829 году чешский лесник Йозеф Рассел.

Подшипник скольжения – опора или направляющая механизма или машины, в которой трение происходит при скольжении сопряжённых поверхностей. Радиальный подшипник скольжения представляет собой корпус, имеющий цилиндрическое отверстие, в которое вставляется рабочий элемент – вкладыш, или втулка из антифрикционного материала и смазывающее устройство. Между валом и отверстием втулки подшипника имеется зазор, заполненный смазочным материалом, который позволяет свободно вращаться валу. Они обладают высокой несущей способностью, выдерживают высокую скорость вращения и хорошо воспринимают динамические нагрузки. Подшипник скольжения в паре с правильно выбранным смазочным материалом обеспечивает очень низкий коэффициент трения (менее 0,01) [38, 40, 41, 50, 51].

Подшипником качения называют устройство, работающее по принципу трения качения. Подшипник качения состоит из двух колец, тел качения

(различной формы) и сепаратора (некоторые типы подшипников могут быть без сепаратора), отделяющего тела качения друг от друга, удерживающего на равном расстоянии и направляющего их движение. По наружной поверхности внутреннего кольца и внутренней поверхности наружного кольца (на торцевых поверхностях колец упорных подшипников качения) выполняют желоба – дорожки качения, по которым при работе подшипника катятся тела качения.

Современные подшипники работают в широком диапазоне условий эксплуатации, к ним предъявляются совершенно разные технические требования, такие как: надежность, долговечность, компактность, высокая грузоподъемность, экологичность, минимальная стоимость при изготовлении, стабильность при различных режимах эксплуатации. Кроме того непрерывное развитие техники постоянно требует ужесточения этих требований. Очевидно, прогресс в разработке узлов трения невозможен без глубоких теоретических, экспериментальных, конструкторских и изобретательских разработок и исследований, способных его обеспечить.

В узлах трения при контакте поверхностей, разделенных смазочным слоем, происходят сложные физико-механические процессы, изучением которых занимается контактная гидродинамика, являющаяся базой для расчета большого класса различных узлов трения. Контактная гидродинамика имеет дело с течением тонкого слоя смазочного материала между контактирующими телами при различных нагрузках и температурных режимах. Малые изменения геометрии контактирующих поверхностей, состава смазочного материала, а также нагрузки приводят к очень большим изменениям процессов, происходящих в контакте трущихся поверхностей. Большое разнообразие и взаимное влияние процессов, происходящих в узлах трения, требуют одновременного решения большого количества задач, затрудняющих развитие контактной гидродинамики.

Одним из важных шагов по изучению и моделированию узлов трения стала гидродинамическая теория смазки. Эта теория необходима для рационального проектирования подшипников, которые в современных быстроходных машинах играют исключительно важную роль. Поэтому понятно, что этому вопросу были

посвящены работы самых выдающихся ученых и инженеров. Гидродинамическая теория в большей степени посвящена подшипникам скольжения, на основе которых она развивалась. Известно [22, 32, 35, 39, 41], что в современных условиях смазывания механизмов гидродинамический режим является наиболее предпочтительным, так как в этом случае потери мощности на трение значительно снижаются. Но несмотря на большой опыт применения работающих в гидродинамическом режиме узлов трения, расчеты таких опор по-прежнему сопряжены с трудностями. Затруднения возникают из-за большого количества переменных факторов, и неоднозначных граничных условий.

Основы гидродинамической теории смазки были заложены в работах Петрова, Зоммерфельда, Рейнольдса, Жуковского и Чаплыгина. В основу теории были положены известные уравнения Навье-Стокса, описывающие течение вязкой жидкости [64]. Для расчета давления в смазочном слое подшипника Рейнольдс ввел ряд допущений, справедливых для тонких слоев и позволяющих существенно упростить уравнения Навье-Стокса. В результате были получены так называемые уравнения «Рейнольдса» [57].

Значительная часть работы Н. П. Петрова посвящена доказательству самой возможности применения упомянутых уравнений к вопросу о движении жидкости. Принимая поверхности шипа и подшипника за соосные круглые цилиндры и допуская возможность скольжения жидкости на обеих поверхностях, Н. П. Петров получил известную формулу для силы трения [61, 62]. Для проверки своей теории Н. П. Петров произвел обширные опыты, опубликованные в «Известиях Петербургского технологического института» за 1885 г., в сильной мере способствовавшие выяснению вопроса. В ряде опытов с вагонной осью среднее гидродинамическое давление в смазывающей жидкости достигало 90 атмосфер. Этими опытами при употреблении разнообразных смазывающих жидкостей, при изменении окружной скорости шипа в весьма широких пределах, при различных температурах окружающей среды, теория Н. П. Петрова получила удовлетворительное подтверждение. Присоединив сюда гипотезу об охлаждении шипа пропорционально разности температур смазывающего слоя и окружающей

температуры и пользуясь так называемыми графиками абсолютной вязкости, Н. П. Петров получил возможность графически выразить зависимость между многими величинами, характеризующими работоспособность подшипников скольжения. Чрезвычайно простое построение Н. П. Петрова дает возможность определения изменения величины силы трения шипа в зависимости от изменения скорости, от вязкости смазывающей жидкости, от нагрузки, поддерживаемой шипом, и от изменения внешней температуры. Главными недостатками теории Петрова были: отсутствие возможности определения величины гидродинамического давления в различных частях смазывающего слоя, предположение о совпадении осей цилиндрических поверхностей шипа и подшипника и, наконец, допущение существования смазочного слоя во всем пространстве между поверхностями шипа и подшипника, тогда как в действительности в большинстве практических случаев дуга охвата шипа подшипником не достигает и половины цилиндра.

Совершенно независимо от работ Петрова появились результаты профессора Манчестерского университета Осборна Рейнольдса, который в своих предшествовавших исследованиях точно установил условия существования ламинарного режима, при котором применимы уравнения Навье-Стокса, и, кроме того, отсутствует скольжение на границе между твердым телом и вязкой жидкостью. К своим теоретическим исследованиям Рейнольдс был побужден желанием дать объяснение весьма обстоятельным опытам над трением в хорошо смазанных подшипниках, которые были тогда произведены английским инженером Бошан Тоуэром и указали на ряд закономерностей [105]. Руководясь своими предыдущими экспериментами и теоретическими работами о движении вязких жидкостей, Рейнольдс принимает, что жидкость в смазочном слое движется ламинарно, вследствие чего возможно применение уравнений Навье-Стокса. Убедившись из простых соображений, что шип может поддерживать нагрузку только при эксцентричном положении оси шипа в теле подшипника, Рейнольдс положил это обстоятельство в основу своего исследования. Вследствие этого ему и удалось пойти в теоретическом отношении много дальше Петрова и

дать чрезвычайно обстоятельный и глубокий анализ движения вязкой жидкости в канале, образованном двумя цилиндрическими поверхностями, оси которых параллельны, но не совпадают, причем внутренняя поверхность (шип) вращается равномерно. Рейнольдс не смог точно проинтегрировать полученные им дифференциальные уравнения [99] движения жидкости и воспользовался приближенным методом разложения функций, подлежащих интегрированию, в ряды синусов и косинусов кратных дуг. В работе Рейнольдса не делается предположения о полном охвате шипа подшипником, но имеется гипотеза о том, что равнодействующая нагрузка делит пополам смачиваемую дугу охвата. Очевидно, что анализ Рейнольдса распространяется на случай полного охвата шипа подшипником. Последующие работы [37] Жуковского и Чаплыгина всецело исходят из установленных Рейнольдсом уравнений, но отличаются методами математической трактовки этих уравнений. Вот почему нельзя не признать Рейнольдса наряду с Петровым творцом гидродинамической теории, причем его работы имели доминирующее значение при разработке этого вопроса.

Как было уже указано, математический анализ самого Рейнольдса был ограничен определенным пределом отношения эксцентриситета к разности радиусов, а также отличался большой сложностью вычислений. Эти пробелы теории Рейнольдса были искусно устранены в известной работе профессора Зоммерфельда [104], который в двух случаях (когда поверхность подшипника является цилиндром и полуцилиндром) довольно простым путем получил приближенные формулы расчета подшипника. Одним из главных условий применимости метода Зоммерфельда является заполнение смазочным веществом всего пространства между шипом и подшипником. Зоммерфельду удалось установить ряд интересных результатов, находящих опытное подтверждение и имеющих обширное техническое применение.

Во второй своей статье Зоммерфельд показал, как применить так называемый принцип механического подобия к гидродинамической теории смазки [102]. Он показал, что здесь основную роль играет особый параметр, называемый ныне числом Зоммерфельда, который представляет собой

безразмерную комбинацию физических величин, характеризующих явление смазки. Эти соображения были подтверждены опытами Штрибека и других исследователей.

Вскоре после появления работы Зоммерфельда появилось математическое исследование профессоров Жуковского и Чаплыгина («О трении смазочного слоя между шипом и подшипником»), которым удалось выполнить точное интегрирование уравнений Рейнольдса для случая полного охвата шипа подшипника, причем в предельном случае очень тонкого смазочного слоя получаются формулы Зоммерфельда.

В тяжело нагруженных узлах машин, работающих со смазкой в условиях точечного или линейного контактов, таких как подшипники качения и зубчатые передачи, могут возникнуть условия, при которых трение и толщина пленки между двумя телами, находящимися в относительном движении, определяются не только вязкостью смазки, но и упругими свойствами этих тел. Более того, уже нельзя пренебречь зависимостью вязкости от давления и локальной температуры. Это происходит, когда деформация поверхности, вызванная большой нагрузкой, сравнима с толщиной гидродинамической пленки. В данном случае чисто гидродинамическая теория смазки неприменима для описания поведения контакта, так как деформация поверхности в ней не рассматривается. Это доказал Мартин в 1916 году, применив гидродинамическую теорию смазки к зубцам шестерен [94]. В этом случае необходимо учитывать упругие деформации поверхностей в зоне контакта.

Теория смазки, учитывающая деформации поверхностей в зоне контакта, называется упруго-гидродинамической. Упруго-гидродинамическая теория смазки как наука образовалась благодаря работам А.М. Эртеля [72], А.Н. Грубина [33], А.И. Петрусевича [63] и затем получила дальнейшее развитие в работах П.Л. Капицы [45], Д.С. Коднира [48], К. Джонсона [34, 87], Б. Хемрока [85], А.Н. Бурмистрова [49], Хиггинсона [79], Д. Даусона [79, 85], К. Херребруха [68], В.П. Ковалева [28, 49], М.А. Галахова [27, 28, 29, 30, 31], И.И. Кудиша [52, 53], Гринвуда [83], П.П. Усова [31], Биссета [75, 76]. Но, к сожалению, до

сегодняшнего момента не известны полные решения для многих тяжело нагруженных режимов упруго-гидродинамического контакта трущихся поверхностей.

В 1882 году Генрих Герц (1857-1894) опубликовал работу «О контакте упругих тел» [86], которая послужила толчком к развитию теории упругости и методов решения контактных задач. В этом направлении также работали такие исследователи, как И.Я. Штаерман [70, 71], Г. Лундберг [93], М.А. Галахов [30, 31, 27, 6, 5], Сивашинский [103], Л.А. Галин [26], Калкер [88, 89, 96], Кэннел [54], В.М. Александров [1, 2, 3, 4, 59], К. Джонсон [34], А.Н. Бурмистров [19, 20, 21, 30], И.И. Аргатов [7, 59].

В силу сложности проблемы, многие авторы предлагали приближенные аналитические методы для определения деформаций поверхностей. Так, широкое распространение получила известная формула Винклера, предполагающая пропорциональную связь прогиба с давлением и применяемая для приближенного расчета деформации тонких упругих слоев небольшой толщины, граничащих с телами существенно большей твердости. Такие слои, называемые вкладышами, широко применяются в промышленных подшипниках скольжения. Деформация поверхности тонкого вкладыша зависит от малого параметра  $g$ , равного отношению толщины вкладыша  $R_2 - R_1$  к радиусу кривизны  $R_0$ . Как показано в работе Галахова М. А. [28], в первом порядке разложения по параметру  $g$  имеет место прямо пропорциональная зависимость между давлением в жидкой пленке смазочного материала и деформацией поверхности вкладыша. Асимметричная задача о деформации цилиндрической слоя под действием постоянного перепада давления рассмотрена в книге Ландау и Лифшица [55]. В цилиндрической системе координат получены деформации и напряжения, которые можно использовать в качестве теста для численных моделей.

Изотермическая задача упруго-гидродинамической смазки впервые была решена А.М. Эртелем в 1939 г. Используя подходы Рейнольдса и Герца, Эртелю и его последователям удалось объединить основные действующие факторы рассмотренных уравнений в формулу для определения толщины упруго-

гидродинамического смазочного слоя. Эта величина является определяющей при идентификации режима смазки, и поэтому широко используется конструкторами при расчетах узлов трения, работающих в режиме упруго-гидродинамической смазки.

Анализ системы уравнений и большого объема экспериментальных данных подтверждает важность комбинированного учета гидродинамического и деформационного эффектов для тяжело-нагруженных узлов трения. Действительно, смазка вовлекается в зазор между тяжело-нагруженными телами, движущимися друг относительно друга. Как и при гидродинамической смазке, толщина смазочной пленки и давление смазки определяются расклинивающим действием. Сильное сдавливание смазочной пленки приводит к значительному повышению давления, которое вызывает упругие деформации сопрягаемых тел и приводит к перераспределению нагрузки на большую площадь.

Современные инженерные методики расчета узлов трения, в основном, основаны на простейших геометрических и механических моделях и используют различные эмпирические зависимости, которые применимы только к малому количеству задач. Поэтому этих методик совершенно недостаточно для расчета многих ныне используемых узлов трения. Так же быстрое развитие механизмов и завышенные требования к их точности, экстремальные условия эксплуатации делают большинство базовых методик расчета не применимыми.

Решением данной проблемы может стать использование системного подхода и математического моделирования узлов трения. Беспорточный А.И. и Галахов М.А. в работе [9] подробно рассматривают математическое моделирование в триботехнике. Дальнейшие работы Беспорточного [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] сконцентрированы на применении математического моделирования для расчетов упругого гидродинамического контакта цилиндра и полупространства.

Математическое описание может выполняться как по упрощенной схеме с учетом небольшого количества параметров, так и с поэтапным учетом всех реальных факторов, действующих на узел. Эффективность математического

моделирования можно существенно повысить с помощью различных программных комплексов, таких как ANSYS, COMSOL, Solid Edge, COSMOS. Однако для моделирования задач в программных комплексах инженеру зачастую требуется большое количество времени и очень мощные вычислительные машины, которые даже в современном мире не всегда доступны. В этом случае для решения конкретных задач имеет смысл по возможности сочетать аналитические решения с ограниченным численным моделированием в программных комплексах и тем самым получить решение с приемлемой точностью и наименьшим временными затратами. Такой подход «гибридного» моделирования применяется в данной работе.

## 1.2 Общее описание предлагаемого метода

Контактные задачи упруго-гидродинамического взаимодействия двух тел являются довольно сложными в решении, так как требуют одновременного учета множества факторов, таких как: деформация упругих поверхностей, переменная вязкость жидкого слоя, зависящая от давления (пьезоэффект вязкости) и температуры, кавитация, наличие проскальзывания между контактирующими телами, нестационарные нагрузки. Наибольшую сложность в решение упруго-гидродинамической задачи вносит деформация упругой поверхности, так как при больших нагрузках деформация существенно влияет на величину геометрического зазора в жидком слое. Одним из перспективных путей упрощения общей упруго-гидродинамической задачи является разбиение ее на последовательно решаемые более простые задачи: гидродинамическую задачу, связанную с определением давления в жидком слое, и контактную задачу, основанную на определении упругой деформации.

Связь упругой деформации и давления в общем виде можно представить в следующем виде:

$$\delta(x) = \int_{\Omega} P(x')K(x-x')d\Omega, \quad (1.1)$$

где  $\delta$  и  $P$  – прогиб поверхности и соответствующее давление,  $\Omega$  – площадка контакта. Функцию  $K(x-x')$ , являющуюся ядром линейного функционала, будем называть функцией податливости.

Функция податливости  $K(x-x')$  является ключевым элементом в данном методе решения упруго-гидродинамической задачи. Важно отметить, что эту функцию можно определить независимо от решения гидродинамической задачи. Так, задавая некоторое распределение давления на границе тел, можно определить соответствующую функцию прогиба  $\delta$  в результате решения задачи упругости для тел контакта. Далее, при известных функциях  $\delta$  и  $P$  равенство (1.1) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно функции  $K(x-x')$ , которое можно решать путем разложения по некоторому ортогональному базису:

$$K(x-x') = \sum_{k=0}^n [M_k \Phi_k(x-x') + N_k \Psi_k(x-x')], \quad (1.2)$$

где  $M_k$  и  $N_k$  – коэффициенты ортогонального разложения. В большинстве случаев область  $\Omega$  можно считать прямоугольной и выбирать тригонометрические функции в качестве базисных, для которых справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \Phi_k(x-x') &= \Phi_k(x)\Psi_k(x') - \Psi_k(x)\Phi_k(x'), \\ \Psi_k(x-x') &= \Psi_k(x)\Psi_k(x') + \Phi_k(x)\Phi_k(x'). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \|\Phi_k\|^2 [M_k (P \cdot \Phi_k) + N_k (P \cdot \Psi_k)] &= (\delta \cdot \Phi_k), \\ \|\Psi_k\|^2 [M_k (P \cdot \Psi_k) - N_k (P \cdot \Phi_k)] &= (\delta \cdot \Psi_k). \end{aligned} \quad (1.4)$$

где:

$$\|\Phi_k\|^2 = \|\Psi_k\|^2 = (\Phi_k \cdot \Phi_k) = (\Psi_k \cdot \Psi_k). \quad (1.5)$$

В результате решения системы (1.4) вычисляются коэффициенты ортогонального разложения  $M_k$  и  $N_k$ , тем самым определяется функция податливости (1.2). Важно отметить, что восстановление функции податливости является «некорректной задачей» [67], в которой мелкомасштабные погрешности в исходных данных вызывают значительные отклонения в итоговых результатах. Поэтому для сглаживания функции податливости необходимо применять регуляризацию [44].

В общем случае течение вязкой жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса. Однако в случае тонких жидких слоев инерционные члены становятся пренебрежимо малыми, что позволяет перейти к более простым уравнениям Стокса

$$\nabla P = \mu \Delta \vec{V}, \quad \operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (1.6)$$

где  $V$ ,  $P$  – скорость и давление в жидком слое,  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости жидкости.

Запишем уравнение (1.6) в проекциях на оси координат:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \Delta V_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \Delta V_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \mu \Delta V_z, \quad (1.7)$$

здесь скорость по нормали  $z$  намного меньше скоростей вдоль и поперек слоя  $V_z \ll V_{x,y}$ , следовательно ей можно пренебречь  $V_z = 0$ , тогда уравнение (1.7) примет следующий вид:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0. \quad (1.8)$$

Запишем граничные условия для уравнения (1.8)

$$k_{1,2} \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + (\vec{V} - \vec{V}_{1,2}) = 0, \quad (1.9)$$

здесь  $z$  меняется от 0 до  $h$ .  $k_1$  и  $k_2$  – параметры, учитывающие проскальзывание на границах движущихся тел и жидкого слоя.

Интегрируя уравнение (1.8), определяем компоненты скорости с учетом граничных условий. Полагая  $V_x(0) = V_{1x}$ ,  $V_x(h) = V_{2x}$ ,  $V_y(0) = V_{y1}$ ,  $V_y(h) = V_{y2}$  получаем выражения для компонент скорости:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left[ \frac{-(k_1 + z) \left( k_2 + \frac{h}{2} \right) h}{k_1 + k_2 + h} + \frac{z^2}{2} \right] + \frac{(V_{2x} - V_{1x})(z + k_1)}{k_1 + k_2 + h} + V_{1x}, \\ V_y &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \left[ \frac{-(k_1 + z) \left( k_2 + \frac{h}{2} \right) h}{k_1 + k_2 + h} + \frac{z^2}{2} \right] + \frac{(V_{2y} - V_{1y})(z + k_1)}{k_1 + k_2 + h} + V_{1y}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Далее используем уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (1.11)$$

Подставляя уравнение (1.10) в уравнение (1.11) и интегрируя от 0 до  $h$ , получаем:

$$\operatorname{div}[S(h)\nabla P] = \frac{1}{2}\nabla(\vec{V}\Gamma(h)) + \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (1.12)$$

где  $h$  – толщина жидкого слоя,  $V$  – сумма скоростей тел в точке контакта

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2.$$

В итоге задача гидродинамики тонкого слоя сводится к определению давления из решения уравнения (1.12).

При этом толщина жидкого слоя  $h$  учитывает как геометрический зазор между контактирующими телами  $h_g$ , так и деформацию упругой  $\delta$  поверхности вызванной избыточным давлением в слое.

$$\begin{aligned} h &= h_g(x, x_c) + \delta(P) = h_g(x, x_c) + \int P(x')K(x-x')dx', \quad P > 0; \\ \vec{V}\nabla h &= 0, \quad P \leq 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $x_c$  – координата центра масс.

Заметим, что уравнение (1.13) учитывает эффект кавитации (вспенивания) для отрицательного давления.

При отсутствии проскальзывания между контактирующими телами функции  $S(h)$  и  $\Gamma(h)$  в уравнении (1.12) имеют вид:

$$S = \frac{h^3}{12\mu}, \quad \Gamma(h) = h. \quad (1.14)$$

При частичном или полном проскальзывании между контактирующими телами функции  $S(h)$  и  $\Gamma(h)$  принимают следующий вид:

$$S = \frac{h^2[h(4k_1 + 4k_2 + h) + 12k_1k_2]}{12\mu(k_1 + k_2 + h)}, \quad \Gamma(h) = \frac{h(h + 2k_1)}{k_1 + k_2 + h}. \quad (1.15)$$

Важно отметить, что вязкость смазочного слоя  $\mu$  сильно зависит от таких факторов, как температура  $T$  и давление  $P$ . Существуют множество эмпирических моделей изменения вязкости жидкого слоя, однако наиболее точной из них является формула Петрусевича, которая описывает зависимость вязкости от температуры и давления:

$$\mu(P, T) = \mu_0 \exp(\alpha P - \Omega_0 T), \quad (1.16)$$

где  $\alpha$  – пьезокоэффициент, характеризующий изменение вязкости в зависимости от давления,  $\mu_0$  – динамическая вязкость при  $P = 0$ ,  $\Omega_0$  – так называемый коэффициент крутизны вискограммы.

Распределение температуры внутри тел определяется следующим уравнением:

$$\operatorname{div}[\chi \nabla T] = 0, \quad (1.17)$$

где  $\chi$  – коэффициент теплопроводности.

При этом на внешней границе задается условие  $T = T_0$ , где  $T_0$  – температура окружающей среды. А в зоне контакта поток тепла приравнивается к мощности тепловыделения  $Q$ :

$$Q = -\chi \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (1.18)$$

где  $n$  – нормаль по отношению к жидкому слою.

Мощность тепловыделения зависит от градиента давления в жидком слое:

$$Q = S(h)(\nabla P)^2 + \frac{\mu}{\Gamma(h)} V^2. \quad (1.19)$$

Распределение температуры внутри тела можно представить в интегральном виде

$$T = T_0 + \int_{\Omega} G(x', x - x') Q(x') d\Omega, \quad (1.20)$$

где  $G$  – функция Грина для заданного тела, которая не зависит от источников тепла в жидком слое. Для плоских тел круговой или прямоугольной формы функция Грина может быть построена в аналитическом виде в случае однородной теплопроводности.

При резких изменениях внешней нагрузки  $F$  возникают возмущения скорости центра масс, вызывающие нестационарные изменения толщины жидкого слоя и распределения давления в зоне контакта.

Это приводит к изменению силовой реакции жидкого слоя на внешнюю нагрузку, связанной с давлением уравнением

$$\vec{W} = \int P \vec{N} dx'. \quad (1.21)$$

При малых возмущениях скорости центра масс уравнение (1.21) можно представить в виде разложения:

$$\vec{W} = \vec{W}_0(\vec{x}_c) - \tilde{\lambda} \dot{\vec{x}}_c, \quad (1.22)$$

здесь левая часть уравнения учитывает стационарную несущую способность  $W_0$ , а правая – возмущение скорости центра масс, тензорный коэффициент  $\lambda$  представляет собой матрицу коэффициентов демпфирования слоя. Данные коэффициенты определяют релаксацию давления в смазочном слое при нестационарных переходных процессах. Найденные функции стационарной несущей способности и коэффициентов демпфирования позволяют записать уравнение динамики тела в следующем виде:

$$M\ddot{\vec{x}}_c + \tilde{\lambda} \dot{\vec{x}}_c - \vec{W}_0(\vec{x}_c) = -F. \quad (1.23)$$

Выше изложенный метод позволяет находить самосогласованное нестационарное решение задачи упруго-гидродинамического взаимодействия тел с любыми геометрическими параметрами и учетом их деформации.

## ГЛАВА 2. МЕТОДЫ И ТЕСТОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПРОГИБА ПОВЕРХНОСТЕЙ

### 2.1 Аналитический метод

Известный аналитический метод расчета деформации упругого слоя основан на гипотезе Винклера, которая предполагает линейную зависимость деформации поверхности от давления. Рассмотрим тонкий цилиндрический слой, считая, что его наружная поверхность сцеплена с абсолютно жестким корпусом. Покажем, что в первом порядке по  $\psi/R_1$  ( $\psi$  – толщина слоя,  $R_1$  – радиус внутренней поверхности) имеет место соотношение

$$\delta = D \cdot P, \quad (2.1)$$

где  $\delta$  – прогиб,  $P$  – давление,  $D$  – коэффициент податливости.

$$D = \frac{\Psi (1+m)(1-2m)}{E (1-m)}, \quad (2.2)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $m$  – коэффициент Пуассона.

Поскольку по условию перемещения  $u_r$ ,  $u_z$ ,  $u_\varphi$  равны нулю при  $r = R_2$  ( $R_2 = R_1 + \psi$ ) – внешний радиус цилиндрического слоя, то в окрестности  $r = R_2$

$$\begin{aligned} u_r &= (r - R_2)u_{r,0}(z, \varphi) + o(r - R_2), \\ u_z &= (r - R_2)u_{z,0}(z, \varphi) + o(r - R_2), \\ u_\varphi &= (r - R_2)u_{\varphi,0}(z, \varphi) + o(r - R_2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $u_{r,0}$ ,  $u_{z,0}$ ,  $u_{\varphi,0}$  – коэффициенты при  $(r - R_2)$ , – стандартные математические

обозначения для порядков малости величин:  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{O(r)}{r} = const$ ,  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{o(r)}{r} = 0$ .

Из (2.3) получаем для компонент тензора деформации слоя в окрестности  $r - R_2$

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = u_{r,0}(z, \varphi) + O(r - R_2), \\ u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin z} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \frac{u_r}{r} + \text{ctg}(z) \frac{u_z}{r} = O(r - R_2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$u_{zz} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} = O(r - R_2).$$

Отсюда следует, что в окрестности  $r - R_2$ :

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1+m} u_{rr} + \frac{mE}{(1+m)(1-2m)} (u_{rr} + u_{\varphi\varphi} + u_{zz}) = \frac{(1-m)E}{(1+m)(1-2m)} (u_{r,0} + O(r - R_2)), \quad (2.5)$$

а упругое перемещение точек, расположенных на поверхности  $r = R_2$ , будет

$$\delta = \int_0^{-g} \frac{\partial u_r}{\partial r} dr = -g u_{r,0}(z, \varphi) + O(g^2).$$

Подставляя сюда  $u_{r,0}(z, \varphi)$  из (2.4) и заменяя  $\sigma_{rr}$  на  $-P$ , получаем, что в первом приближении по  $\psi/R_1$  выполняется (2.1).

В случае постоянного давления существует точное аналитическое решение [55] задачи о деформации цилиндрического слоя (внутренний и наружный радиусы  $R_1$  и  $R_2$ ), внутри которой действует постоянное давление  $P$ . При этом наружное давление предполагается равным нулю. В общем случае равновесная деформация определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$(1 - 2\sigma)\Delta \vec{u} + \text{grad div } \vec{u}. \quad (2.6)$$

Это уравнение можно переписать в виде:

$$2(1 - 2\sigma)\text{grad div } \vec{u} - (1 - 2\sigma)\text{rot rot } \vec{u} = 0. \quad (2.7)$$

Предполагая осевую симметрию, вводим цилиндрические координаты с осью  $z$  по оси трубы. При однородном вдоль трубы давлении деформация представляет собой чисто радиальные смещения. Поэтому  $\text{rot } \vec{u} = 0$  и уравнение (2.7) приобретает вид:

$$\nabla \text{div } \vec{u} = 0. \quad (2.8)$$

Отсюда

$$\text{div } \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} = \text{const} \equiv 2a, \quad (2.9)$$

или

$$u = ar + \frac{b}{r}. \quad (2.10)$$

Отличные от нуля компоненты тензора деформации:

$$u_{rr} = \frac{du}{dr} = a - \frac{b}{r^2}, \quad (2.11)$$

$$u_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^2}, \quad (2.12)$$

из условий  $\sigma_{rr} = 0$  при  $r = R_2$  и  $\sigma_{rr} = -P$  при  $r = R_1$  находим:

$$a = \frac{PR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+m)(1-2m)}{E}, \quad (2.13)$$

$$b = \frac{PR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+m)(1-2m)}{E}. \quad (2.14)$$

Распределение напряжений по толщине трубы дается формулами:

$$\sigma_{rr} = \frac{PR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right), \quad (2.15)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{PR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( 1 + \frac{R_2^2}{r^2} \right), \quad (2.16)$$

$$\sigma_{zz} = 2m \frac{PR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (2.17)$$

Далее рассмотрим другой вариант граничных условий, когда упругий цилиндрический слой окружен бесконечно жесткой оболочкой. В этом случае деформация на внешней границе равна нулю.

Отсюда  $r = R_2$ :

$$ar + \frac{b}{r} = 0, \quad (2.18)$$

или

$$a = -\frac{b}{R_2}. \quad (2.19)$$

Распределение напряжений по  $r$  определяется формулой:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+m)(1-2m)} \left( (1-m)u_{rr} + mu_{\varphi\varphi} \right). \quad (2.20)$$

Давление равно напряжению с обратным знаком.

Определяя  $u_{rr}$  и  $u_{\varphi\varphi}$  из формул (2.11) и (2.12), получим:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+m)(1-2m)} \left( (1-m) \left( -\frac{b}{R_2^2} - \frac{b}{R_1^2} \right) + m \left( \frac{b}{R_1^2} - \frac{b}{R_2^2} \right) \right) = -P, \quad (2.21)$$

$$-P = \frac{E}{(1+m)(1-2m)} b \left( 2m \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right), \quad (2.22)$$

отсюда

$$b = \frac{-P}{\left( 2m \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right)} \frac{(1+m)(1-2m)}{E}. \quad (2.23)$$

Воспользовавшись уравнением (2.18), найдем неизвестный коэффициент  $a$ :

$$a = \frac{P}{\left( 2m \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right)} \frac{(1+m)(1-2m)}{E \cdot R_2^2}. \quad (2.24)$$

Подставляя выражения (2.23) и (2.24) в уравнение (2.20), находим деформацию поверхности при  $r = R_1$ .

$$\delta = \frac{P}{E} \frac{(1+m)(1-2m)R_1}{\left( 2m \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right)} \left( \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right). \quad (2.25)$$

В случае, когда  $(R_2 - R_1)/R_2 \ll 1$ , формула (2.25) переходит в формулу (2.2).

## 2.2 Численный метод

Численный расчет прогиба поверхности выполняем с помощью программного комплекса ANSYS, основанного на методе конечных элементов [58, 36]. Он работает в среде операционных систем самых распространенных компьютеров – от PC до рабочих станций и суперкомпьютеров. Особенностью данного комплекса является файловая совместимость всех членов семейства ANSYS для всех используемых платформ [46, 8]. Модель, созданная на PC, может использоваться на суперкомпьютере. Это обеспечивает всем пользователям программы удобные возможности для решения широкого круга инженерных задач. Программа ANSYS предлагает непрерывно растущий перечень расчетных средств [69], которые могут учесть разнообразные конструктивные нелинейности.

Пакет ANSYS дает возможность решить самый общий случай контактной задачи для поверхностей, допускает наличие больших (конечных) деформаций и углов поворота, позволяет выполнить интерактивную оптимизацию и анализ влияния электромагнитных полей, получить решение задач гидроаэродинамики и многое другое. Так же в данном программном пакете реализовано параметрическое моделирование, адаптивное перестроение сетки, использование  $p$ -элементов и обширные возможности создания макрокоманд. Средства твердотельного моделирования включают в себя представление геометрии, основанное на использовании сплайновой технологии NURBS, геометрических примитивов и операций булевой алгебры.

### 2.3 Тестовые расчеты

Тестовые расчеты проводятся для выяснения погрешности пакета ANSYS и приближенной формулы (2.2) относительно точного расчета, формулы (2.25). На рисунке 2.1 показана расчетная модель. Рассматриваем цилиндрический слой с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним радиусом  $R_2$ . Для тестовых расчетов принимаем, что материал поверхности выполнен из стали, которая имеет следующие механические характеристики:  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па,  $m = 0.3$ .

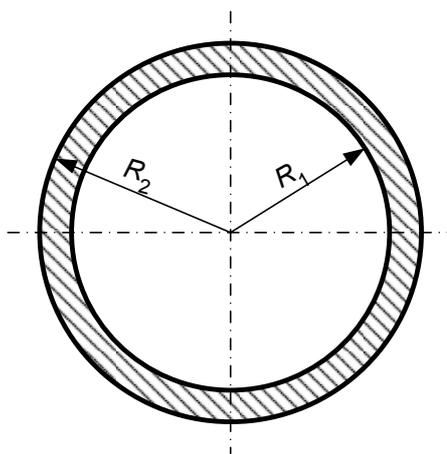


Рисунок 2.1 – Схема модели;

$R_1$  – внутренний радиус,  $R_2$  – внешний радиус.

В тестовой задаче задаем постоянное распределение давления на внутренней границе слоя и нулевые перемещения точек внешней границы. В этом случае соотношение между давлением и перемещением точек внутренней поверхности определяется точной формулой (2.25). Геометрические параметры цилиндрического слоя:  $R_1 = 0.05$  м;  $R_2 = 0.055$  м.

Используем расчетную сетку, разбивающую слой на три конечных элемента по толщине и сто двадцать элементов по углу (рисунок 2.2).

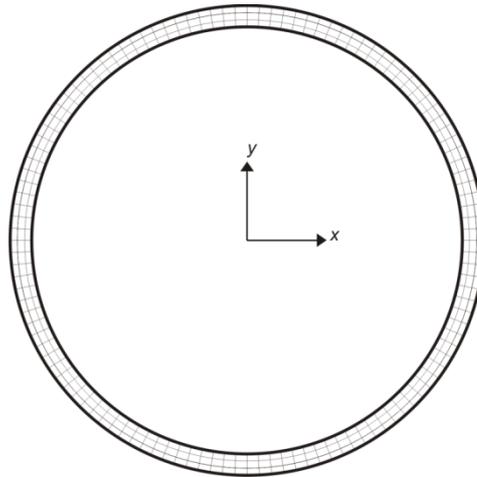


Рисунок 2.2 – Сетка расчетной модели.

На каждом элементе сетки на внутренней границе задано давление  $P = 3000$  Н.

Применяем комплекс ANSYS 3D для модели расчета деформаций цилиндрического слоя с различными осевыми длинами, равными  $2R_1$  и  $6R_1$ . При этом будем сравнивать численные значения прогиба внутренней поверхности в центральном сечении с аналитическими формулами.

В результате моделирования ANSYS получаем следующие результаты: прогиб по двумерной модели ANSYS равен  $8.47 \cdot 10^{-11}$  м. Прогиб по трехмерной модели ANSYS равен  $6.52 \cdot 10^{-11}$  и  $6.80 \cdot 10^{-11}$  м для длин цилиндрических оболочек  $2R_1$  и  $6R_1$  соответственно. Прогиб по приближенной формуле (2.2) составляет  $7.08 \cdot 10^{-11}$  м, а по точной формуле (2.25) – равен  $7.01 \cdot 10^{-11}$  м. Таким образом, расхождение между формулой Винклера (2.2) и решением (2.25) составляет 1.5%.

Двухмерный пакет ANSYS показал результат, завышенный на 18% по сравнению с формулой (2.25). При этом трехмерный пакет ANSYS показал значения прогибов, меньшие на 7% и 3% по сравнению с формулой (2.25) для длин  $2R_1$  и  $6R_1$ , соответственно. Различие значений прогибов в центральном сечении для цилиндрических оболочек с различной длиной объясняется влиянием краевых эффектов. Чем меньше длина цилиндрической оболочки, тем сильнее краевые граничные условия влияют на расчет прогиба. С увеличением длины цилиндра численное решение ANSYS-3D стремится к точному аналитическому решению.

#### **2.4 Расчеты прогибов цилиндрических слоев и сравнение с аналитическими оценками**

В данном разделе рассмотрим деформацию двухслойной конструкции из различных материалов (рисунок 2.3). Внутренний тонкий слой из бронзы окружен внешним толстым слоем из стали. Граничные условия: перемещения по внешнему радиусу стальной оболочки полагаем равными нулю.

Геометрические параметры:

$$R_1 = 0.03 \text{ м}; R_2 = 0.035 \text{ м}, R_3 = 0.1 \text{ м};$$

$$L = 0.06 \text{ м} - \text{длина цилиндра};$$

Характеристики материалов:

$$E_{\text{Бр}} = 1.08 \cdot 10^{11} \text{ Па} - \text{модуль упругости бронзы};$$

$$E_{\text{Ст}} = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па} - \text{модуль упругости стали};$$

$$m_{\text{Бр}} = 0.34 - \text{коэффициент Пуассона бронзы};$$

$$m_{\text{Ст}} = 0.3 - \text{коэффициент Пуассона стали}.$$

Сетка модели разбита на девять элементов по длине, на четыре элемента по толщине стальной оболочки, на один элемент по толщине бронзовой оболочки и на сто элементов по углу (рисунок 2.3). В данном случае нагрузка обеспечивается заданным распределением давления на внутренней поверхности, представленным на рисунке 2.4.

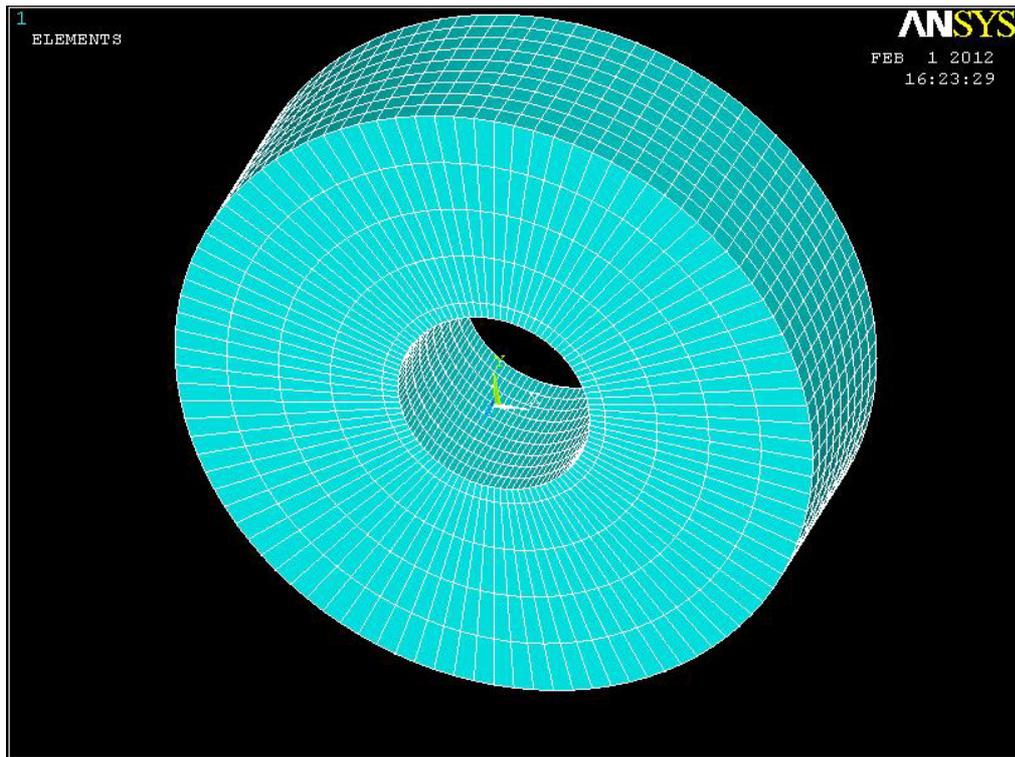


Рисунок 2.3 – Расчетная сетка объемной модели.

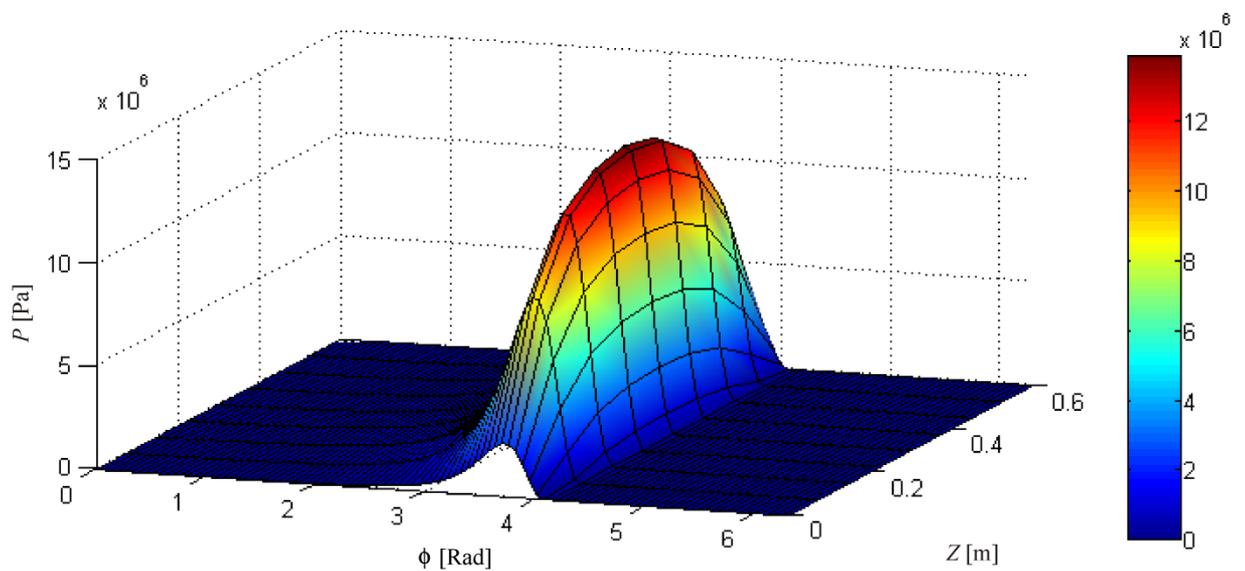


Рисунок 2.4 – Распределение давления.

Результаты моделирования в программном комплексе ANSYS сравним с приближенной формулой (2.2) для бронзового цилиндрического слоя, имеющего на внешней границе нулевые перемещения.

После моделирования для лучшей визуализации по полученным данным построим поверхность прогиба (рисунок 2.5). Так же построим графики прогибов по длине слоя (рисунок 2.6). Из рисунка 2.6б видно, что формула Винклера не учитывает нелокальную связь материала, так как в области нулевых давлений она не показывает деформацию, в то время как моделирование в ANSYS показало наличие прогиба.

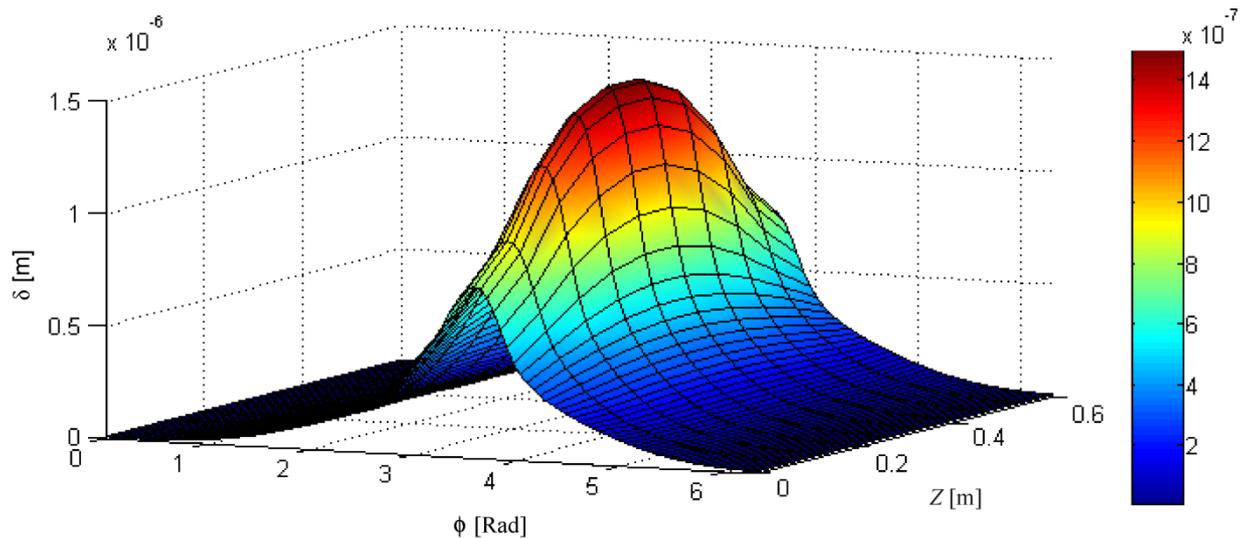


Рисунок 2.5 – 3-D функция прогиба.

Из сравнения прогиба центрального сечения объемной цилиндрической оболочки и прогиба плоского цилиндрического слоя видно, что при одном и том же распределении давления прогиб в объемной цилиндрической оболочке намного меньше, так как в нем присутствует нелокальная связь в материале не только по углу, но и по длине втулки. Так же рисунок 2.6 показывает, что формула (2.2) не применима для двухслойных конструкций.

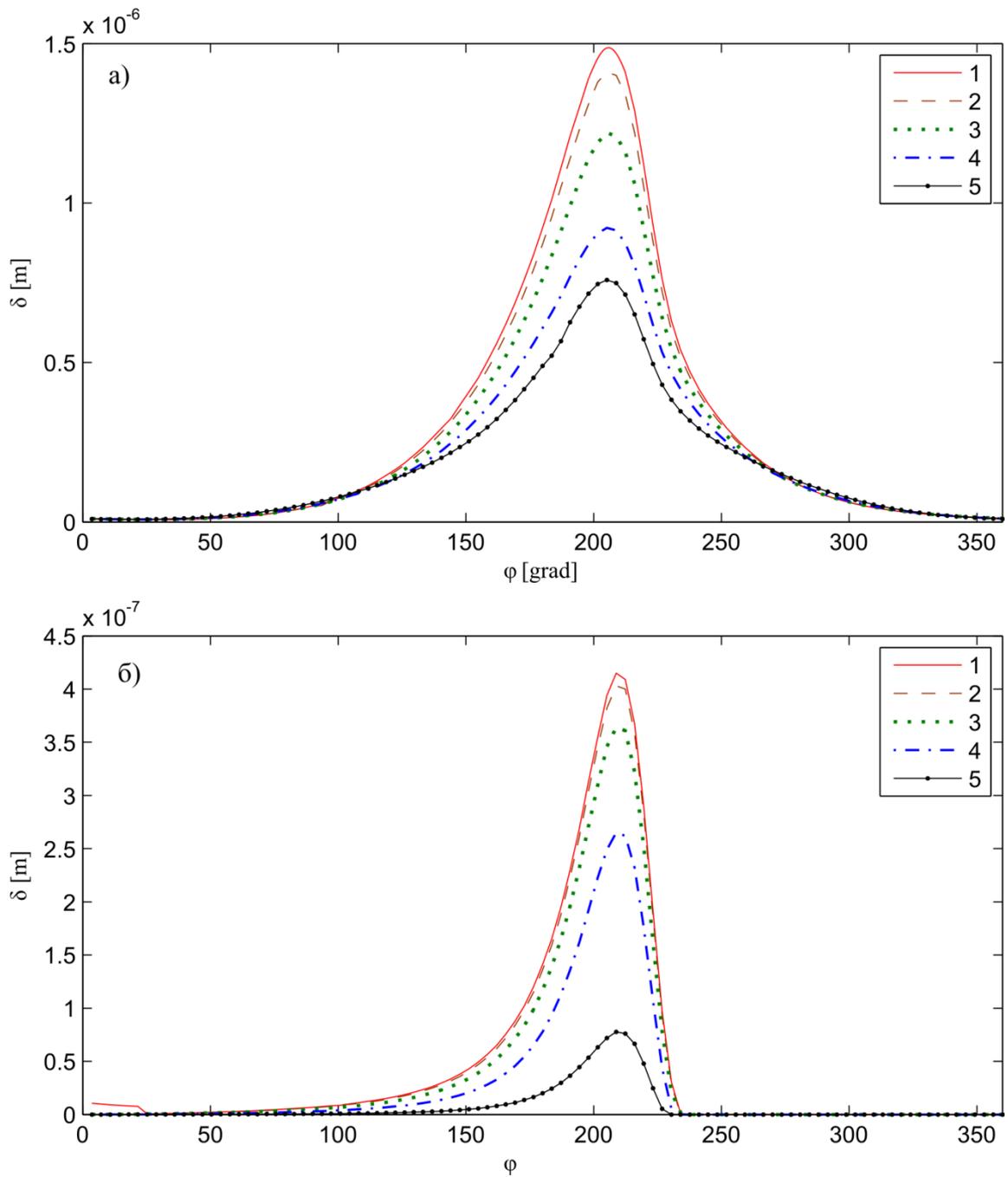


Рисунок 2.6 – Функция прогиба внутренней поверхности в различных сечениях;

а) – Прогибы, полученные при моделировании в ANSYS;

б) – Прогибы, рассчитанные по формуле (2.2);

1 – Деформация в центральном сечении ( $Z = 0.03$  м);

2 – Деформация в сечениях при  $Z = 0.0225$  и  $Z = 0.0375$  м;

3 – Деформация в сечениях при  $Z = 0.015$  и  $Z = 0.045$  м;

4 – Деформация в сечениях при  $Z = 0.0075$  и  $Z = 0.0525$  м;

5 – Деформация на краевых сечениях ( $Z = 0.00$  и  $Z = 0.06$  м).

## 2.5 Влияние шага сетки на точность расчета цилиндрического слоя

Для моделирования рассмотрим три варианта расчетной сетки с различным числом угловых сегментов в азимутальном направлении: 100, 72 и 40. При этом во всех случаях количество слоев поперек бронзового цилиндрического слоя и стального внешнего слоя примем постоянными, 5 и 9 соответственно (рисунок 2.7).

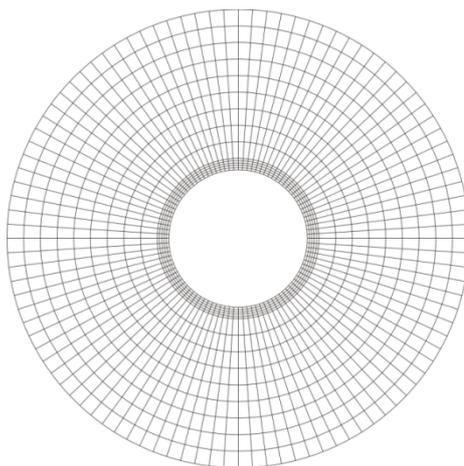


Рисунок 2.7 – Схема расчетной сетки для двумерной модели ANSYS.

Рассмотрим одинаковое распределение давления по разным расчетным сеткам. Из рисунка 2.8. видно, что распределение давления для сеток с 72 и 100 угловыми элементами полностью идентичны. Распределение функции давление по сетке с 40 угловыми элементами в своем пике из-за малого количества расчетных точек более острое. В связи с этим прогиб бронзового цилиндрического слоя в точке максимального давления на 1% меньше, чем прогиб для распределения этого же давления по другим сеткам. Так же функция прогиба бронзового цилиндрического слоя для 40 угловых элементов имеет более острый пик и не большое, малозаметное отклонение на участке  $3.4 \leq \varphi \leq 3.7$  радиан, по сравнению с функциями прогиба построенными на 72 и 100 элементных элементах (рисунок 2.9). Функции прогиба бронзового цилиндрического слоя построенные на сетках с 72 и 100 угловыми элементами полностью идентичны.

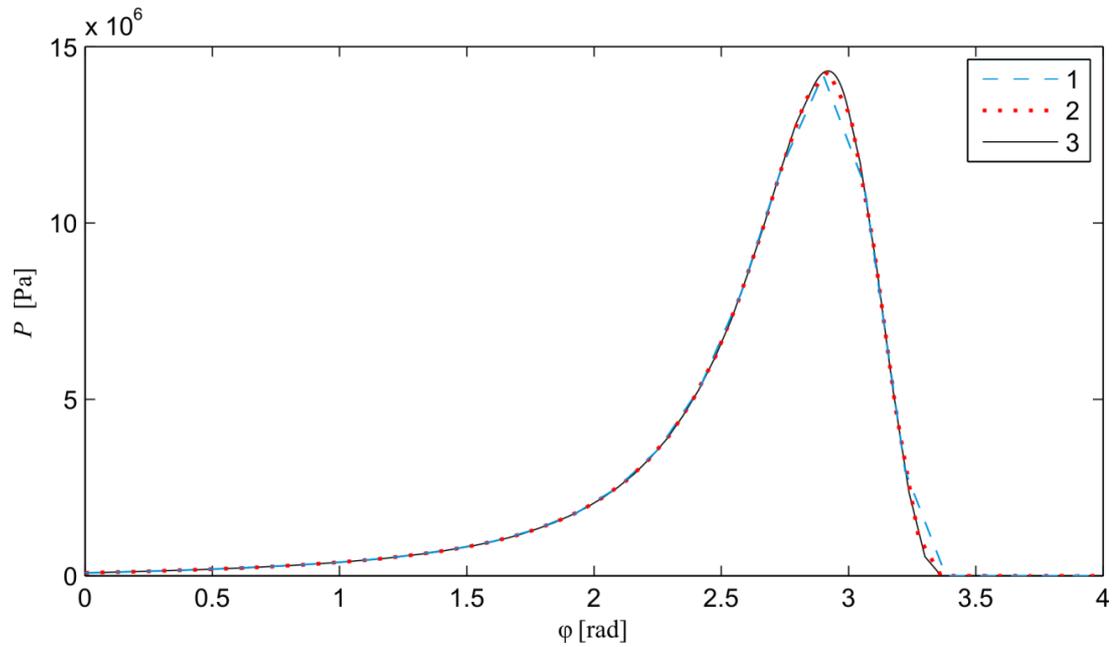


Рисунок 2.8 – Распределение давлений по разным расчетным сеткам;  
 1 – сетка с 40 угловыми сегментами в азимутальном направлении;  
 2 – сетка с 72 угловыми сегментами в азимутальном направлении;  
 3 – сетка с 100 угловыми сегментами в азимутальном направлении.

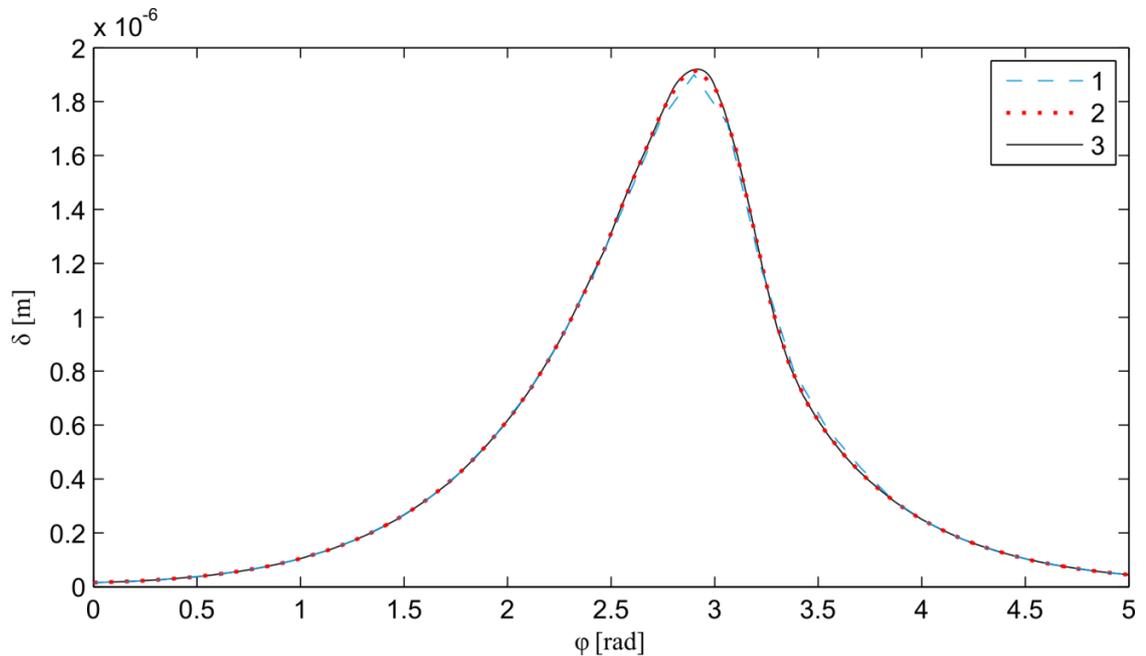


Рисунок 2.9 – Прогиб бронзового цилиндрического слоя при разных расчетных сетках; 1 – сетка с 40 угловыми сегментами в азимутальном направлении;  
 2 – сетка с 72 угловыми сегментами в азимутальном направлении;  
 3 – сетка с 100 угловыми сегментами в азимутальном направлении.

Из результатов моделирования видно, что сетка с 72 угловыми элементами в азимутальном направлении дает достаточно точный расчет прогиба, как и более мелко разбитые расчетные сетки, но в то же время немного срезает плавный пик давления, как в случае с сеткой, содержащей сотню элементарных элементов.

## **2.6 Влияние сетки на расчет деформаций пластины**

Рассмотрим влияние шага сетки на точность расчета для пластины. Для этого зададим одно и то же распределение давления по пластинам с разным количеством элементарных конечных элементов и посмотрим на них значения деформаций.

При моделировании упругой пластины нужно учесть, что в зоне максимальной нагрузки сетка должна быть упорядоченной и достаточно мелкой для более точного расчета.

В программном комплексе ANSYS для моделирования деформаций была построена расчетная модель упругой пластины (упругий параллелепипед размерами  $L_x \times L_y \times L_z = 0.2 \times 0.05 \times 0.2$  м). Вся расчетная область разбивалась на 40 элементов по длине, 10 элементов по высоте и 4 элемента по ширине (крупная сетка). В зоне действия нагрузки делалось дополнительное, более мелкое разбиение области на 150, 90, 60 ячеек вдоль пятна контакта для большей точности расчетов, как показано на рисунке 2.10. При этом нагрузка задается на 50, 30, 20 точек, соответственно.

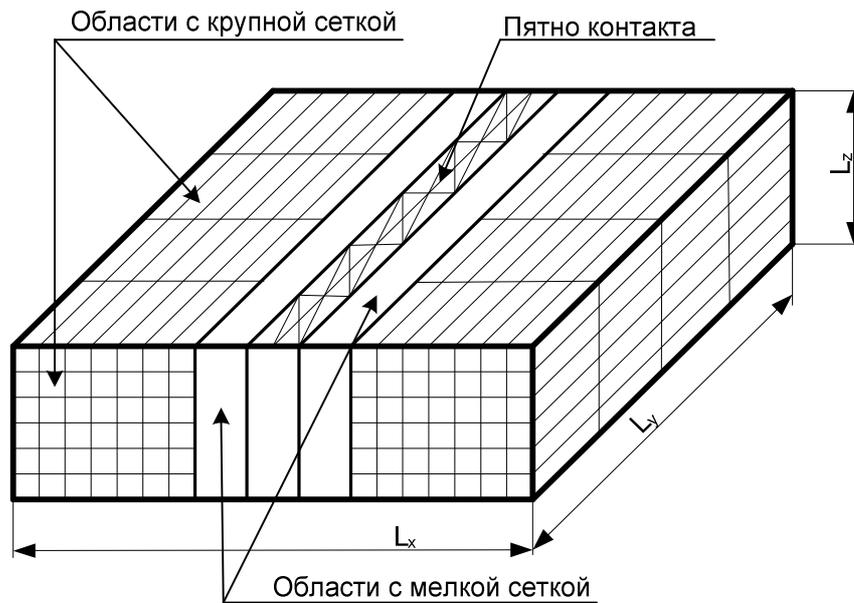


Рисунок 2.10 – Схема расчетной сетки, используемой в ANSYS.

Из результатов расчета давления, как в пятне контакта, так и в остальных узлах видно, что при разбиении пятна контакта на 20 конечных элементов пик функции выглядит сильно срезанным, а сама функция на входной границе ( $-0.5 \leq x/R_0 \leq 0.75$ ) - практически линейной (рисунок 2.11 линия 1). При разбиении пятна контакта на 30 и 50 узлов функции распределения давления практически не отличаются и выглядят более сглаженными по сравнению со случаем разбиения пятна контакта на 20 элементарных узлов (рисунок 2.11 линии 1 и 2).

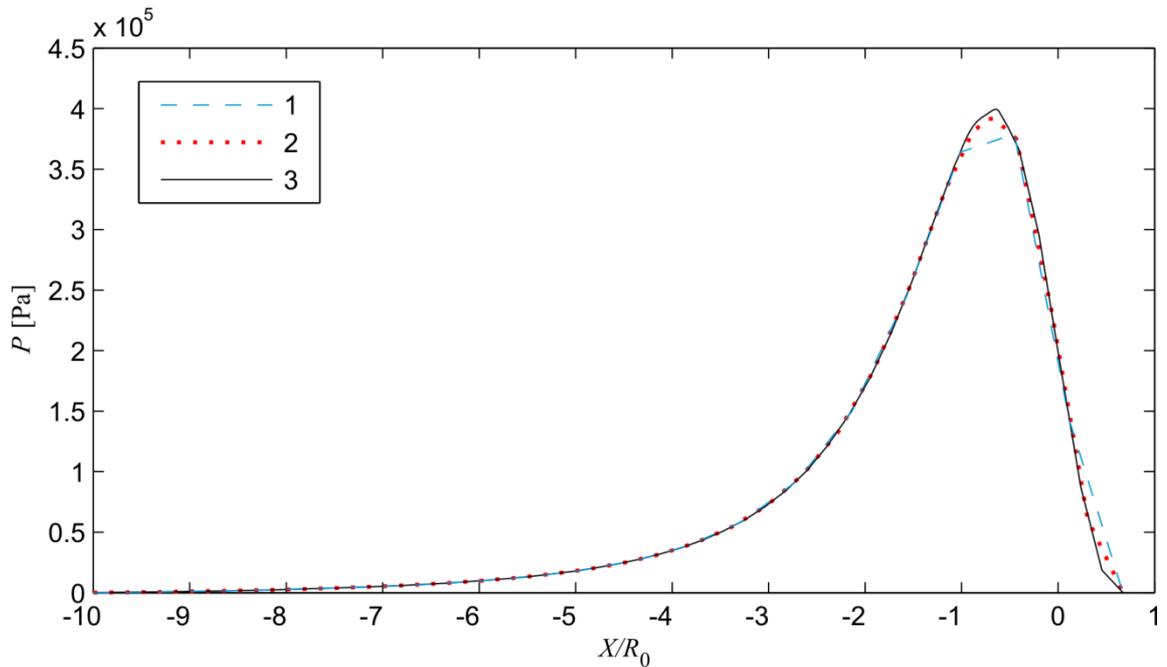


Рисунок 2.11 – Распределение давления для разных расчетных сеток;  
 1 – сетка с 20 элементарными конечными элементами в пятне контакта;  
 2 – сетка с 30 элементарными конечными элементами в пятне контакта;  
 3 – сетка с 50 элементарными конечными элементами в пятне контакта.

Далее рассмотрим деформацию упругой пластины при моделировании на разных расчетных сетках. Из рисунка 2.12 видно, что при разбиении области деформации на 60 конечных элементов максимальный прогиб поверхности получается заниженным на 3.4% и 2.8%, по сравнению результатами, полученными на расчетных сетках с разбиением на 150 и 90 узлов. Распределения прогиба для расчетных сеток с 150 и 90 узлами практически не различаются, отклонение между ними составляет менее 1%.

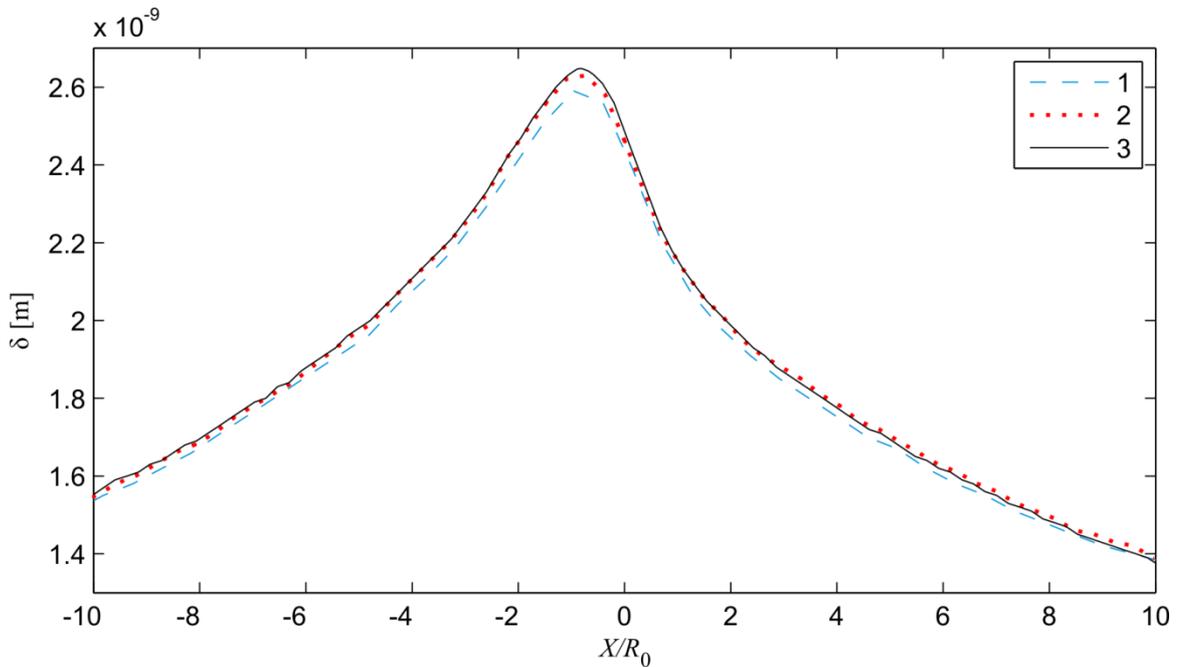


Рисунок 2.12 – Прогиб упругой пластины при разных расчетных сетках;  
 1 – сетка с 60 элементарными конечными элементами в зоне деформации;  
 2 – сетка с 90 элементарными конечными элементами в зоне деформации;  
 3 – сетка с 150 элементарными конечными элементами в зоне деформации.

Из выше описанных результатов видно, что расчетная сетка с 90 конечными элементами дает достаточно хорошую точность и при этом является менее трудоемкой при моделировании деформации упругой пластины.

## 2.7 Методика определения функции податливости

В данной работе расчетный комплекс ANSYS используется для определения прогибов поверхностей от заданных распределений давлений. На основе этих прогибов определяется функция податливости, которая не зависит от конкретного распределения давления, но зависит от геометрических характеристик деформируемого тела и физических свойств его материала.

Зависимость упругого прогиба цилиндрической поверхности от распределения давления может быть представлена в следующей интегральной форме:

$$\delta(\varphi) = \int_0^{2\pi} P(\varphi') K(\varphi - \varphi') d\varphi', \quad (2.26)$$

где  $\delta$  и  $P$  – прогиб поверхности и давление, зависящие от азимутального угла. Функцию  $K(\varphi - \varphi')$ , являющуюся ядром линейного функционала, будем называть функцией податливости.

Методика построения функции податливости основана на предварительном расчете прогиба по заданному распределению давления с использованием пакета ANSYS. Поскольку сама функция податливости не зависит от давления, то выбор конкретного распределения давления не играет принципиального значения. Примеры расчетов деформаций в ANSYS для заданных распределений давления вдоль цилиндрических слоев и пластин представлены выше, в разделах 2.4 - 2.6 данной главы.

После того, как в результате численного счета найдена функция прогиба, соответствующая приложенному давлению, можно определить искомую функцию податливости методом разложения Фурье:

$$K(\varphi) = \sum_{k=0}^n [M_k \cos(k\varphi) + N_k \sin(k\varphi)]. \quad (2.27)$$

Умножая уравнение (2.27) на гармонические функции и интегрируя по углу в интервале от 0 до  $2\pi$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно Фурье коэффициентов  $M_k$  и  $N_k$ .

$$\begin{aligned} M_k \int_0^{2\pi} P(\varphi') \sin(k\varphi') d\varphi' + N_k \int_0^{2\pi} P(\varphi') \cos(k\varphi') d\varphi' &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\varphi') \sin(k\varphi') \cdot dx', \quad k=1, 2, 3, \dots \\ M_k \int_0^{2\pi} P(\varphi') \cos(k\varphi') d\varphi' - N_k \int_0^{2\pi} P(\varphi') \sin(k\varphi') d\varphi' &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\varphi') \cos(k\varphi') \cdot dx', \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (2.28) \\ M_0 \int_0^{2\pi} P(\varphi') d\varphi' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\varphi') dx'. \end{aligned}$$

Используя известное распределение давления в смазочном слое и функцию прогиба поверхности, рассчитанную пакетом ANSYS, находим решение системы (2.28).

$$M_k = \frac{1}{\pi} \frac{X_k C_k + Y_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2}, \quad N_k = \frac{1}{\pi} \frac{Y_k C_k - X_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2}, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

$$M_0 = \frac{D_0}{2\pi Y_0}, \quad (2.29)$$

где:

$$\begin{aligned} X_k &= \int_0^{2\pi} P(\varphi') \sin(k\varphi') \cdot d\varphi', & Y_k &= \int_0^{2\pi} P(\varphi') \cos(k\varphi') \cdot d\varphi', \\ C_k &= \int_0^{2\pi} \delta(\varphi') \sin(k\varphi') \cdot d\varphi', & D_k &= \int_0^{2\pi} \delta(\varphi') \cos(k\varphi') \cdot d\varphi'. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Здесь давление и прогиб поверхности являются функциями угла, которые были определены методом сплайновой интерполяции дискретных узловых значений  $P_i$  и  $\delta_i$ . Подставляя найденные Фурье коэффициенты  $M_k$  и  $N_k$  (2.29) в уравнение (2.27), получаем готовую функцию податливости:

$$K(\varphi - \varphi') = \frac{D_0}{2\pi Y_0} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{X_k C_k + Y_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2} \cos(k(\varphi - \varphi')) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{Y_k C_k - X_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2} \sin(k(\varphi - \varphi')). \quad (2.31)$$

Выше описана методика определения функции податливости для цилиндрической оболочки. Для нахождения функции податливости для пластины заменим азимутальную координату линейной в системе (2.28) и применим такое же разложение Фурье, как описано выше. В результате получим функцию податливости для пластины следующего вида:

$$K(x - x') = \frac{1}{l} \frac{D_0}{Y_0} + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{X_k C_k + Y_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2} \cos\left(x \frac{2\pi}{l} k\right) + \frac{2}{l} \frac{Y_k C_k - X_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2} \sum_{k=1}^{k=n} \sin\left(x \frac{2\pi}{l} k\right). \quad (2.32)$$

$$Y_k = \int_{-l/2}^{l/2} P(x) \cos\left(k \frac{2\pi}{l} x\right) \cdot dx, \quad X_k = \int_{-l/2}^{l/2} P(x) \sin\left(k \frac{2\pi}{l} x\right) \cdot dx,$$

$$C_k = \int_{-l/2}^{l/2} \delta(x) \sin\left(k \frac{2\pi}{l} x\right) \cdot dx, \quad D_k = \int_{-l/2}^{l/2} \delta(x) \cos\left(k \frac{2\pi}{l} x\right) \cdot dx.$$

где  $l$  – длина зоны контакта.

Найденные функции податливости не зависят от конкретного распределения давления в смазочном слое и могут эффективно применяться для решения динамических задач, в которых деформации поверхностей связаны с нестационарными вариациями давления.

## **Выводы**

Пакет ANSYS-3D в сравнении с точным решением (2.48) показал хорошую точность и сходимость при увеличении осевой длины цилиндрического слоя.

Сравнение прогиба центрального сечения объемного цилиндрического слоя и прогиба плоского слоя показало, что при одном и том же распределении давления прогиб в объемном слое намного меньше, так как в нем присутствует нелокальная связь в материале не только по углу, но и по длине слоя.

Гипотеза Винклера является слишком упрощенной, пригодна только для расчета тонких слоев и неприменима для расчета двуслойных конструкций.

Расчет функции прогиба позволяет определить функцию податливости, которая является ядром линейного функционала, осуществляющего связь давления и прогиба. Функция податливости, не зависящая от давления, является ключевым инструментом для моделирования деформаций поверхностей в задачах с нестационарными вариациями давления.

## **Список принятых обозначений**

$D$  – Коэффициент податливости;

$E$  – Модуль Юнга;

$F$  – внешняя нагрузка;

$h$  – Толщина смазочного слоя;

$h_g$  – Геометрический зазор;

$K(x-x')$  – функция податливости;

$T$  – Температура;

$k_1$  и  $k_2$  – Параметры, проскальзывание на границах движущихся тел и жидкого слоя;

$m$  – Коэффициент Пуассона;

$M_k$  и  $N_k$  – коэффициенты ортогонального разложения;

$P$  – Давление;

$Q$  – Мощность тепловыделения;

$R_1, R_2$  – Радиусы внутренней и внешней поверхности цилиндрического слоя;

$u_r, u_z, u_\varphi$  – Перемещения в сферической системе координат;

$u_{rr}, u_{zz}, u_{\varphi\varphi}$  – Компоненты тензора деформаций;

$W$  – Несущая способность жидкого слоя;

$\alpha$  – Пьезокоэффициент вязкости;

$\delta$  – Прогиб, деформация на внутренней границе цилиндрического слоя;

$\mu$  – Динамическая вязкость масла;

$\sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{rr}, \sigma_{zz}$  – Распределение напряжений в сферической системе координат;

$\chi$  – Коэффициент теплопроводности;

$\psi$  – Толщина цилиндрического слоя;

$\Omega$  – Площадка контакта;

$\omega$  – Угловая скорость вала.

## ГЛАВА 3. УПРУГО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ КОНТАКТ РОЛИКА С ПЛАСТИНОЙ

### 3.1 Постановка задачи

Задача упруго-гидродинамического контакта ролика с поверхностью в стационарном случае рассматривалась во многих публикациях [18, 31, 45, 47, 56, 65] и достаточно хорошо изучена. Впервые эта задача была рассмотрена Капицей П. Л., который получил аналитическое стационарное решение для распределения давления в слое при отсутствии деформаций поверхностей контакта [45]. В работах [18, 56] рассмотрены асимптотические методы решения стационарной задачи с учетом прогиба опорной поверхности в случае очень больших нагрузок. В то же время нестационарные аспекты гидродинамического контакта ролика с опорной поверхностью остаются в значительной мере неисследованными. Эта тема важна и актуальна, так как именно нестационарный контакт свойственен роликоподшипникам, работающим при переменных нагрузках. При такой работе подшипников происходят быстрые изменения зазоров между контактирующими телами, которые приводят к резкому росту пиковых значений давления в смазочном слое. Решение этой задачи необходимо для расчета и проектирования роликовых подшипников качения, в которых возникают упругие деформации рабочей поверхности, контактирующей с роликом.

Рассмотрим задачу контактного взаимодействия цилиндрического ролика с движущейся пластиной, покрытой слоем смазочного материала (рисунок 3.1).

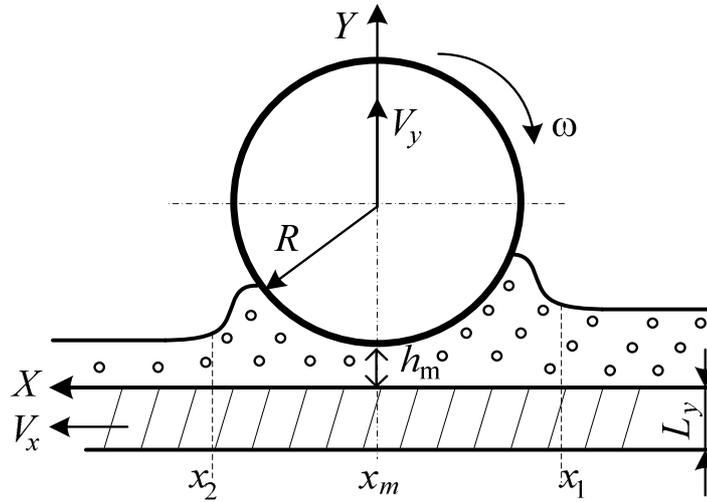


Рисунок 3.1 – Схема расположения ролика, пластины и слоя жидкого смазочного материала.

Распределение давления определяется уравнением общим Рейнольдса:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 6\mu V \frac{\partial h}{\partial x} + 6\mu h \frac{\partial V}{\partial x} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.1)$$

где  $P$  – давление в смазочном слое,  $V$  – скорость движения пластины,  $\mu$  – динамическая вязкость масла при нормальном давлении,  $h$  – толщина смазочного слоя, зависящая от деформации поверхностей. Ось  $x$  ориентирована в направлении движения пластины.

Для расчета зоны контакта используют интегральное уравнение связи давления  $P$  и деформации  $\delta$ :

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x') K(x-x') dx' . \quad (3.2)$$

Здесь  $K(x-x')$  – функция податливости, характеризующая влияние давления в точке  $x'$  на прогиб в точке  $x$ .

Обычно предполагают логарифмический характер зависимости функции податливости от координат [29, 31]:

$$K(x-x') = \frac{2(1-m^2)}{\pi E} \text{Ln} \left( \frac{2L}{|x-x'|} \right), \quad (3.3)$$

где  $m$  и  $E$  – коэффициент Пуассона и модуль упругости материала. Однако сложность заключается в том, что эта логарифмическая функция теоретически обоснована лишь для контакта ролика с упругим полупространством и при этом зависит от неопределенного параметра размерности длины. В реальности ролик контактирует с упругим телом конечных размеров, и функция податливости должна зависеть от геометрических характеристик контактирующих тел. В этом случае отсутствуют аналитические решения для функции податливости и необходимо привлекать численные методы решения задачи. Целью данной главы является разработка методики построения функции податливости для случая контакта ролика конечной длины с упругим слоем конечной толщины при наличии смазки.

Предлагаемый метод расчета может использоваться для проектирования подшипников качения. Так как радиус ролика очень мал по сравнению с радиусом кольца  $R_1 \gg R$ , по которому он катится, то можно приближенно принять внешнее кольцо подшипника плоской пластиной [109]. Также контактно-гидродинамический расчет деталей машин требует знания вязкости применяемых масел при высоких давлениях и температурах. Сейчас уже стало очевидным, что зависимость вязкости масла от температуры, и особенно от давления, в значительной степени определяет работоспособность смазанных деталей. Вследствие значительных методических трудностей зависимость вязкости от давления менее изучено, чем зависимость вязкости от температуры. Бриджмен провел обширные исследования о влиянии давления на вязкость жидкостей при давлениях до 12 000 кг/см<sup>2</sup>. Во всех случаях (за исключением воды) он обнаружил, что с увеличением давления вязкость резко возрастает. Зависимость коэффициента вязкости от давления принято характеризовать пьезокоэффициентом вязкости:

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dP} . \quad (3.4)$$

Пьезокоэффициент вязкости в широком диапазоне давлений не остается постоянным. Вязкость смазочных масел очень сильно возрастает с повышением

давления. Так, при давлении 1000 атмосфер она возрастает в 8–40 раз. При давлениях в несколько тысяч  $\text{кг/см}^2$  многие вязкие масла превращаются в мажеобразные вещества.

Для определения вязкости жидкости при любой произвольной температуре  $T$  с достаточной точностью используется формула Рейнольдса-Филонова:

$$\mu = \mu_0 \exp(-\Omega_0 T), \quad (3.5)$$

где  $\mu_0$  – вязкость при известной температуре  $T_0$ ,  $\Omega_0$  – коэффициент крутизны вискограммы, который определяется по формуле:

$$\Omega_0 = \frac{1}{T_0 - T_1} \ln \frac{\mu_1}{\mu_0}. \quad (3.6)$$

Так же Петрусевичем получена формула вязкости, которая учитывает изменения вязкости в зависимости от температуры и давления:

$$\mu(P, T) = \mu_0 \exp(\alpha P - \Omega_0 T), \quad (3.7)$$

где  $\alpha$  – пьезокэффициент вязкости,  $\mu_0$  – динамическая вязкость при  $P = 0$ ,  $P$  – давление в смазочном слое,  $T$  – температура смазочного слоя.

В данной работе изменение вязкости смазочного слоя учтены с помощью известного закона Баруса. Отметим, что вязкость множества масел весьма хорошо подчиняется этому закону, который хорошо выполняется вплоть до давлений порядка  $12000 \text{ кгс/см}^2$ .

$$\mu(P) = \mu_0 \exp(\alpha P). \quad (3.8)$$

где  $\mu_0$  – динамическая вязкость масла при нормальном давлении.

### 3.2 Аналитическое решение при постоянной вязкости

**Расчет давления в смазочном слое.** Рассмотрим идеализированную модель контакта [43] ролика с пластиной без учета деформаций при постоянном коэффициенте вязкости в смазочном слое [7, 26]. В этом случае распределение давления определяется из уравнения Рейнольдса:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 6\mu V \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2}{V} \frac{\partial h}{\partial t} \right). \quad (3.9)$$

В предположении, что площадка контакта цилиндра и плоскости мала по сравнению с радиусом кривизны  $R$ , имеем следующее выражение для толщины слоя смазочного материала [31]:

$$h = h_m + (x - x_m)^2 / 2R, \quad (3.10)$$

где  $h_m$  – минимальная толщина смазочного слоя,  $x_m$  – координата точки минимального зазора.

Граничные условия в рассматриваемом случае имеют следующий вид [31]:

$$P(x_1) = P(x_2) = \frac{dP}{dx}(x_2) = 0, \quad (3.11)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – входная и выходная границы смазочного слоя.

Для удобства решения задачи вводим безразмерные переменные:

$$\tilde{x} = (x - x_m) / \sqrt{h_m R}, \quad H = h / h_m, \quad q = P / P_0, \quad P_0 = 6\mu V \sqrt{R} / h_m^{1.5}, \quad \nu = \frac{V_y}{V} \sqrt{\frac{R}{h_m}}, \quad (3.12)$$

преобразуем исходное уравнение Рейнольдса (3.9) к более простому виду:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( H(\tilde{x})^3 \frac{\partial q}{\partial \tilde{x}} \right) = \frac{\partial H(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} + 2\nu, \quad (3.13)$$

$$H(\tilde{x}) = 1 + \tilde{x}^2 / 2.$$

Положения входной и выходной границ будем характеризовать безразмерными параметрами  $a$  и  $c$ . Значение параметра  $a$  зависит от количества смазки. В случае обильной смазки полагаем  $a = -\infty$  [29, 31, 65].

Интегрируя уравнение (3.13) и используя нулевое граничное условие (3.11) для производной функции давления при  $x=c$ , получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial q}{\partial \tilde{x}} = \frac{H(\tilde{x}) - H(c)}{H(\tilde{x})^3} + \frac{2\nu(\tilde{x} - c)}{H(\tilde{x})^3} = \frac{(\tilde{x}^2 - c^2) / 2}{(1 + \tilde{x}^2 / 2)^3} + \frac{2\nu(c - \tilde{x})}{(1 + \tilde{x}^2 / 2)^3}. \quad (3.14)$$

Решение уравнения (3.14) зависит от безразмерного параметра  $\nu$ , который связан с нормальной скоростью перемещения ролика. Интегрируя уравнение (3.14) для различных значений  $\nu$ , находим распределение давления в смазочном слое с учетом нормальной скорости ролика (рисунок 3.2).

$$q(x) = q_0(x) - 2\nu q_1(x), \quad (3.15)$$

$$q_0(x) = \frac{1}{2} \left[ \left( \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 1 - \frac{3}{2}c^2 \right) - (2 + c^2) \cdot \left( \frac{x}{(2+x^2)^2} \right) + \left( \frac{x}{2+x^2} \right) \left( 1 - \frac{3}{2}c^2 \right) \frac{1}{2} \right]$$

$$q_1(x) = \frac{2}{(x^2 + 2)^2} + \frac{1}{16} \frac{cx}{(x^2 + 2)^2} + \frac{1}{32} \frac{cx}{x^2 + 2} + \frac{1}{64} c \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Где неизвестным параметр  $c$  определяется из граничного условия  $q(c) = 0$ .

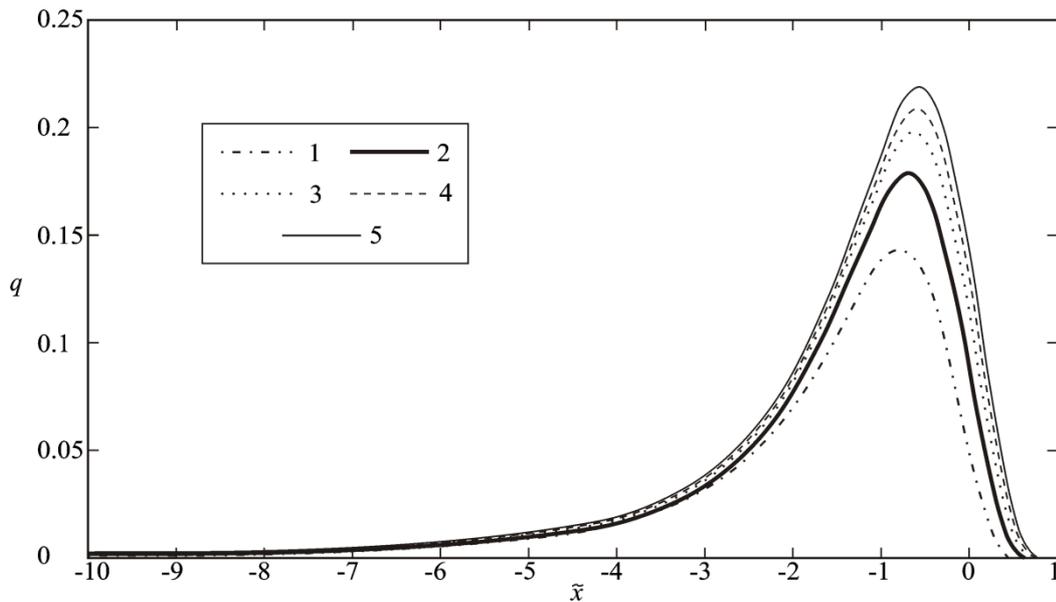


Рисунок 3.2 – Безразмерное распределение давления в смазочном слое при разных  $\nu$ ;

1)  $\nu = +0,1$ ; 2)  $\nu = +0,05$ ; 3)  $\nu = 0$ ; 4)  $\nu = -0,05$ ; 5)  $\nu = -0,1$ .

При  $\nu = 0$ , максимум уравнения 3.15 с учетом нормировок 3.12 равен решению П. Л. Капицы для максимального давления в смазочном слое [45]:

$$P_{\max} = \frac{1.52 \cdot V \cdot \mu}{\sqrt{h^3 \cdot 1/2R}}.$$

**Определение коэффициента демпфирования смазочного слоя.** По найденным распределениям давления определяем значения безразмерной несущей способности, являющейся функцией параметра  $\nu$ :

$$W'(\nu) = \int_a^c q(x) dx = \int_a^c q_0(x) dx - 2\nu \int_a^c q_1(x) dx \equiv W'_0 - W'_1 \nu, \quad (3.16)$$

где  $W'$  – безразмерная несущая способность.

Значение уравнения (3.16) с учетом нормировок (3.12) при  $v = 0$ , для ролика равняется максимальной подъемной силе, при постоянной вязкости и определяется по формуле:

$$W = \frac{2.45 \cdot V \cdot \mu}{h^3 \cdot 2R}.$$

На рисунке 3.3 показаны зависимости безразмерных значений максимального давления в зоне контакта и несущей способности от нормальной компоненты скорости. При отрицательных скоростях, отвечающих сближению поверхностей и сдавливанию смазочной пленки, имеет место значительное увеличение максимального давления и несущей способности. Однако, в случае положительной скорости, соответствующей расширению смазочного слоя, происходит уменьшение давления. При малых скоростях несущую способность можно аппроксимировать линейной функцией следующего вида

$$W' = W'_0 - W'_1 v, \quad (3.17)$$

где постоянные коэффициенты  $W'_0$  и  $W'_1$  равны 0.401 и 1.125, соответственно.

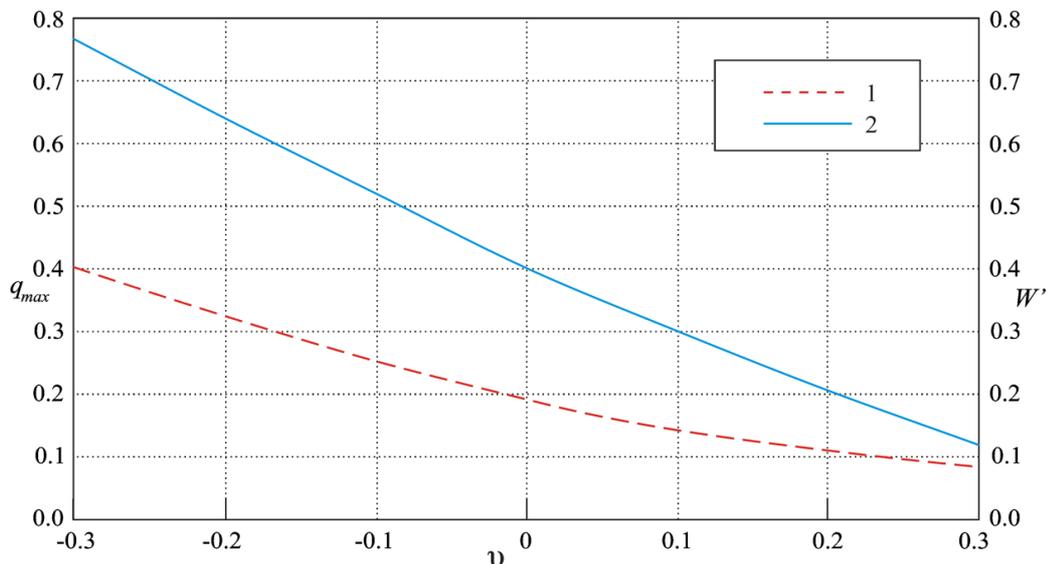


Рисунок 3.3 – Зависимость давления и несущей способности в смазочном слое от нормальной скорости  $v$ ; 1 – максимальное безразмерное давление  $q_{max}$ ; 2 – безразмерная несущая способность  $W'$ .

Для перехода к размерному виду используем зависимость:

$$W = P_0(Rh_m)^{1/2}W'. \quad (3.18)$$

С учетом соотношений (3.12) и (3.18), преобразуем выражение (3.17) к размерному виду:

$$W = W'_0 \frac{6\mu VR}{h_m} - W'_1 \frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}} V_y. \quad (3.19)$$

Здесь первое слагаемое выражает зависимость стационарной несущей способности от зазора при нулевой нормальной скорости, а второе слагаемое учитывает влияние нормальной компоненты скорости. Коэффициент перед скоростью будем называть коэффициентом демпфирования  $\lambda$ :

$$\lambda = W'_1 \frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}}. \quad (3.20)$$

**Исследования нестационарного процесса.** Для исследования нестационарного процесса запишем уравнение перемещение ролика по нормали к поверхности:

$$M \frac{d^2 h_m}{dt^2} + \lambda(h_m) \frac{dh_m}{dt} - W_0(h_m) = -F, \quad (3.21)$$

где  $M$  – масса ролика,  $F$  – внешняя нагрузка.

С учетом зависимостей (3.19) и (3.20) уравнение (3.21) принимает следующий вид:

$$M \frac{d^2 h_m}{dt^2} + W'_1 \frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}} \frac{dh_m}{dt} - W'_0 \frac{6\mu VR}{h_m} = -F, \quad (3.22)$$

Полагая равными нулю производные по времени, определяем равновесное значение зазора:

$$h_0 = \frac{6\mu VRW'_0}{F}. \quad (3.23)$$

Принимая  $h_0$  в качестве базового зазора, вводим безразмерные переменные:

$$h_m = h'h_0, \quad t = t't_0, \quad t_0 = \frac{W'_1 \sqrt{Rh_0}}{VW'_0}. \quad (3.24)$$

Используя нормировки (3.24), приводим уравнение динамики к безразмерному виду:

$$\varepsilon \ddot{h}' + \frac{1}{h'^{3/2}} \dot{h}' - \frac{1}{h'} + 1 = 0, \quad (3.25)$$

$$\varepsilon = \frac{MV^2 W_0'^2}{W_1'^2 FR}.$$

Уравнение (3.25) определяет зависимость зазора от времени в процессе установления стационарного режима. Характерное время переходного процесса определяется параметром  $t_0$ .

Зададим начальные условия при  $t = 0$ .

$$h(0) = h_m / h_0 \equiv h_0^*, \quad \dot{h}(0) = 0.$$

В большинстве случаев параметр  $\varepsilon$  при старшей производной варьируется в диапазоне 0.01 – 0.000001 и является малым, в этом случае уравнение называется «жестким» [66], его решение может приближенно представлено в виде асимптотического разложения по сингулярному малому параметру [23, 24, 25]:

$$h' = \bar{h}(t', \varepsilon) + \tilde{h}(\tau, \varepsilon), \quad \tau = t' / \varepsilon,$$

где первое слагаемое

$$\bar{h}(t', \varepsilon) = \bar{h}_0(t') + \varepsilon \bar{h}_1(t') + \dots + \varepsilon^k \bar{h}_k(t') + \dots$$

является регулярной частью асимптотики, а второе слагаемое

$$\tilde{h}(\tau, \varepsilon) = \tilde{h}_0(\tau) + \varepsilon \tilde{h}_1(\tau) + \dots + \varepsilon^k \tilde{h}_k(\tau) + \dots$$

представляет собой сингулярную часть асимптотики, называемую также в литературе погранслошной асимптотикой. На пограничные функции накладываются дополнительные граничные условия затухания

$$\tilde{h}_k(\tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Для первых членов асимптотики имеем выражения

$$\begin{cases} h' = \bar{h}_0(t) + \varepsilon \bar{h}_1(t) + \varepsilon \tilde{h}_1(\tau) + \varepsilon^2 \tilde{h}_2(\tau), \\ \dot{h}' = \dot{\bar{h}}_0(t) + \dot{\tilde{h}}_1(\tau) + \varepsilon \dot{\bar{h}}_1(t) + \varepsilon \dot{\tilde{h}}_2(\tau), \\ \ddot{h}' = \frac{1}{\varepsilon} \ddot{\tilde{h}}_1(\tau) + \ddot{\bar{h}}_0(t) + \ddot{\tilde{h}}_2(\tau) + \varepsilon \ddot{\bar{h}}_1(t). \end{cases} \quad (3.26)$$

Уравнения на функции регулярной и погранслошной частей асимптотики можно получить путем подстановки выражения (3.26) в уравнение колебаний (3.25) и группировки отдельно регулярных и погранслошных членов по степеням малого параметра. Полагая равными нулю сгруппированные при степенях малого параметра выражения, получаем следующую систему уравнений

$$\frac{1}{\bar{h}_0^{3/2}} \frac{d\bar{h}_0}{dt'} - \frac{1}{\bar{h}_0} + 1 = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{d\bar{h}_1}{dt'} + \frac{\bar{h}_1}{2\sqrt{\bar{h}_0}} (3\bar{h}_0 - 1) = -\ddot{\bar{h}}_0, \quad (3.28)$$

$$\frac{d^2\tilde{h}_1}{d\tau^2} + \frac{1}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}} \frac{d\tilde{h}_1}{d\tau} = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{d^2\tilde{h}_2}{d\tau^2} + \frac{1}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}} \frac{d\tilde{h}_2}{d\tau} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{h}_1}{(\bar{h}_0^*)^2} \left[ \frac{\dot{\tilde{h}}_1}{\sqrt{\bar{h}_0^*}} + \frac{1}{3} (1 - 3\bar{h}_0^*) \right]. \quad (3.30)$$

Интегрируя уравнение (3.27), получаем:

$$\bar{h}_0(t') = \left( \frac{e^t \left| \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0^*} - 1} \right| + 1}{e^t \left| \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0^*} - 1} \right| - 1} \right)^2. \quad (3.31)$$

Функция (3.31) удовлетворяет начальному условию  $h(0)$ , но дает ненулевую начальную скорость:

$$\dot{\bar{h}}_0(0) = \left( \frac{1}{\bar{h}_0^*} - 1 \right) (\bar{h}_0^*)^{3/2}. \quad (3.32)$$

Для компенсации этой скорости далее вводится погранслошное решение.

Далее переходим к определению второго члена регулярной части асимптотики. Для этого преобразуем уравнение (3.28) к виду:

$$-\frac{1}{h_0^2} \bar{h}_1 + \frac{3}{2} \frac{1}{h_0^{5/2}} \bar{h}_1 \dot{\bar{h}}_0 - \frac{1}{h_0^{3/2}} \dot{\bar{h}}_1 = \ddot{\bar{h}}_0, \quad (3.33)$$

где:

$$\dot{\bar{h}}_0 = (1 - \bar{h}_0)\sqrt{\bar{h}_0}. \quad (3.34)$$

Подставляя (3.34) в (3.33) и выполняя алгебраические преобразования, получаем:

$$\dot{\bar{h}}_1 + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_0}}(3\bar{h}_0 - 1)\bar{h}_1 = -\ddot{\bar{h}}_0\bar{h}_0^{3/2}. \quad (3.35)$$

Введем замену:

$$\dot{\bar{h}}_1 = \frac{d\bar{h}_1}{dt'} = \frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0} \frac{d\bar{h}_0}{dt'} = \frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0} \dot{\bar{h}}_0, \quad \ddot{\bar{h}}_0 = \frac{d\dot{\bar{h}}_0}{d\bar{h}_0} \dot{\bar{h}}_0 = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\bar{h}}_0^2}{d\bar{h}_0}. \quad (3.36)$$

Подставляя (3.36) в (3.35), получим следующее выражение:

$$\frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0} \dot{\bar{h}}_0 + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_0}}(3\bar{h}_0 - 1)\bar{h}_1 = -\frac{d\dot{\bar{h}}_0}{d\bar{h}_0} \dot{\bar{h}}_0 \bar{h}_0^{3/2} = -\frac{1}{2} \frac{d\dot{\bar{h}}_0^2}{d\bar{h}_0} \bar{h}_0^{3/2}. \quad (3.37)$$

Следовательно:

$$\frac{d}{d\bar{h}_0} \dot{\bar{h}}_0^2 = (1 - \bar{h}_0)(1 - 2\bar{h}_0). \quad (3.38)$$

Выражение (3.37) с учетом (3.38) примет вид:

$$\frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0} \sqrt{\bar{h}_0}(1 - \bar{h}_0) + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_0}}(3\bar{h}_0 - 1)\bar{h}_1 = -\frac{1}{2}(1 - \bar{h}_0)(1 - 2\bar{h}_0)\bar{h}_0^{3/2}. \quad (3.39)$$

Разделив уравнение (3.39) на коэффициент при старшей производной, получим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{d\bar{h}_1}{d\bar{h}_0} + \frac{1}{2\bar{h}_0} \frac{(3\bar{h}_0 - 1)}{(1 - \bar{h}_0)} \bar{h}_1 = -\frac{1}{2}(1 - 2\bar{h}_0)\bar{h}_0. \quad (3.40)$$

Общим решением уравнения (3.40) является функция:

$$\bar{h}_1 = \bar{G}(\bar{h}_0) \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0} \frac{(3s - 1)}{s(1 - s)} ds \right]. \quad (3.41)$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0} \frac{(3s - 1)}{s(1 - s)} ds &= \int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0} \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{1 - s} \right) ds = \left[ \frac{1}{2} \ln s + \ln(1 - s) \right] \Big|_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0} = \\ &= \ln \left[ (1 - s)\sqrt{s} \right] \Big|_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0} = \ln \left[ \frac{(1 - \bar{h}_0)\sqrt{\bar{h}_0}}{(1 - \bar{h}_0^*)\sqrt{\bar{h}_0^*}} \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Тогда уравнение (3.41) с учетом (3.42) примет вид:

$$\bar{h}_1 = \bar{G}(\bar{h}_0) \frac{(1 - \bar{h}_0) \sqrt{\bar{h}_0}}{(1 - \bar{h}_0^*) \sqrt{\bar{h}_0^*}} = G(\bar{h}_0) (1 - \bar{h}_0) \sqrt{\bar{h}_0}, \quad (3.43)$$

где  $G$  – неизвестная функция, определяющаяся интегрированием следующего уравнения:

$$\frac{dG(\bar{h}_0)}{d\bar{h}_0} = -\frac{1}{2} \frac{(1 - 2\bar{h}_0) \sqrt{\bar{h}_0}}{(1 - \bar{h}_0)}. \quad (3.44)$$

Вычисляя интеграл, находим:

$$G(\bar{h}_0) = -\frac{1}{2} \int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0} \frac{(1 - 2s) \sqrt{s}}{(1 - s)} ds + C_0 = -\int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0} \sqrt{s} ds + \frac{1}{2} \int_{\bar{h}_0^*}^{\bar{h}_0} \frac{\sqrt{s}}{1 - s} ds + C_0. \quad (3.45)$$

В подынтегральном выражении второго слагаемого уравнения (3.45) применяем замену переменных  $u = s^{1/2}$  и выполняем алгебраические преобразования

$$\int \frac{\sqrt{s}}{1 - s} ds = 2 \int \frac{u^2}{1 - u^2} du = \int \frac{1}{u + 1} du - \int \frac{1}{u - 1} du - 2 \int du. \quad (3.46)$$

Интегрируя (3.46) и производя обратную замену переменных, получим выражение:

$$G(\bar{h}_0) = -\frac{2}{3} \bar{h}_0^{3/2} + \frac{2}{3} (\bar{h}_0^*)^{3/2} + \sqrt{\bar{h}_0} - \sqrt{\bar{h}_0^*} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\bar{h}_0} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0} - 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0^*} - 1} + C_0. \quad (3.47)$$

С учетом уравнения (3.47) уравнение (3.43) примет вид:

$$\bar{h}_1 = (1 - \bar{h}_0) \sqrt{\bar{h}_0} \left( -\frac{2}{3} \bar{h}_0^{3/2} + \frac{2}{3} (\bar{h}_0^*)^{3/2} + \sqrt{\bar{h}_0} - \sqrt{\bar{h}_0^*} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\bar{h}_0} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0} - 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0^*} - 1} + C_0 \right). \quad (3.48)$$

Далее интегрируя уравнение (3.29) с учетом условия затухания при  $\tau \rightarrow \infty$ , получаем выражение

$$\frac{d\tilde{h}_1}{d\tau} = C_1 \exp(-\tau / (\bar{h}_0^*)^{3/2}). \quad (3.49)$$

Постоянная интегрирования  $C_1$  определяется из условия нулевой начальной скорости для полного решения, представляющего собой сумму регулярной и

погранслошной асимптотик. Так как первый член регулярной асимптотики дает ненулевое начальное значение скорости

$$\frac{d\bar{h}_0}{dt} = \left(1 - \frac{1}{\bar{h}_0^*}\right) (\bar{h}_0^*)^{3/2}, \quad (3.50)$$

то подбираем постоянную  $C_1$  таким образом, чтобы погранслошное решение компенсировало значение (3.32) при  $\tau = 0$

$$C_1 = \left(\frac{1}{\bar{h}_0^*} - 1\right) (\bar{h}_0^*)^{3/2}. \quad (3.51)$$

Подставляя найденное значение в выражение (3.50) и повторно интегрируя, находим выражение погранслошной части асимптотики

$$\tilde{h}_1 = -(\bar{h}_0^* - 1) (\bar{h}_0^*)^2 \exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right) + C_2. \quad (3.52)$$

Константа  $C_2$  подбирается таким образом, чтобы решение удовлетворяло нулевому граничному условию при  $\tau \rightarrow \infty$  ( $C_2=0$ ).

Найденная погранслошная функция дает ненулевое возмущение порядка  $\varepsilon$  в начальный момент времени, которое можно скомпенсировать подбором постоянной интегрирования  $C_0$  в выражении второго члена регулярной асимптотики.

$$C_0 = (1 - \bar{h}_0(t)) \sqrt{\bar{h}_0(t)} \frac{(\bar{h}_0^*)^{3/2} |\bar{h}_0^* - 1|}{(1 - \bar{h}_0^*)}. \quad (3.53)$$

В результате итоговое выражение принимает вид:

$$\begin{aligned} \bar{h}_1 = (\bar{h}_0(t) - 1) \sqrt{\bar{h}_0(t)} & \left( \frac{2}{3} (\bar{h}_0(t))^{3/2} - \frac{2}{3} (\bar{h}_0^*)^{3/2} - \sqrt{\bar{h}_0(t)} + \sqrt{\bar{h}_0^*} + \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{\bar{h}_0(t)} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0(t)} - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{\bar{h}_0^*} + 1}{\sqrt{\bar{h}_0^*} - 1} \right) + \\ & + (1 - \bar{h}_0(t)) \sqrt{\bar{h}_0(t)} \frac{(\bar{h}_0^*)^{3/2} |\bar{h}_0^* - 1|}{(1 - \bar{h}_0^*)}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Найденная регулярная часть асимптотики дает ненулевую начальную скорость порядка  $\varepsilon$ , для компенсации которой вводится погранслошная функция второго порядка. Для определения этой функции интегрируем уравнение (3.30) с условием затухания  $\tau \rightarrow \infty$  и получаем выражение:

$$\dot{\tilde{h}}_2 = \exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right) \left[ C_3 + \tilde{A}\tau + \tilde{B}(\bar{h}_0^*)^{3/2} - \tilde{B}(\bar{h}_0^*)^{3/2} \exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right) \right], \quad (3.55)$$

где:

$$\tilde{A} = (1 - \bar{h}_0^*) \left( 2 - \frac{3}{2} \bar{h}_0^* \right), \quad \tilde{B} = (1 - \bar{h}_0^*) \left( -\frac{3}{2} \bar{h}_0^* \right). \quad (3.56)$$

Постоянная интегрирования  $C_3$  определяется из условия нулевой начальной скорости:

$$\dot{\tilde{h}}_1(0) + \frac{d\tilde{h}_2(0)}{d\tau} = 0, \quad (3.57)$$

где:

$$\dot{\tilde{h}}_1(0) = (\bar{h}_0^*)^2 + 2\bar{h}_0^*(\bar{h}_0^* - 1), \quad (3.58)$$

тогда:

$$C_3 = \frac{-\left[(\bar{h}_0^*)^2 + 2\bar{h}_0^*(\bar{h}_0^* - 1)\right]}{\exp\left(-\frac{2\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right)} - \left[ \tilde{A}\tau + \tilde{B}(\bar{h}_0^*)^{3/2} - \tilde{B}(\bar{h}_0^*)^{3/2} \exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right) \right]. \quad (3.59)$$

Интегрируя уравнение (3.55) получим выражение погранслойной функции второго порядка:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_2 = & -(\bar{h}_0^*)^{3/2} \left( C_3 + \tilde{B}(\bar{h}_0^*)^{3/2} \right) \exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right) - \tilde{A}(\bar{h}_0^*)^{3/2} (1 + \tau) \exp\left(-\frac{\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right) + \\ & + \frac{1}{2} \tilde{B}(\bar{h}_0^*)^3 \exp\left(-\frac{2\tau}{(\bar{h}_0^*)^{3/2}}\right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Найденная функция полностью удовлетворяет условию нулевой начальной скорости и дает очень малое возмущение начального условия порядка  $\varepsilon^2$ . В принципе, его можно скомпенсировать учетом дальнейшего регулярного члена асимптотики порядка  $\varepsilon^2$ .

После определения всех функций регулярной и погранслойной частей асимптотики уравнения (3.26), построим график зависимости зазора от времени для различных начальных значений (рисунке 3.4).

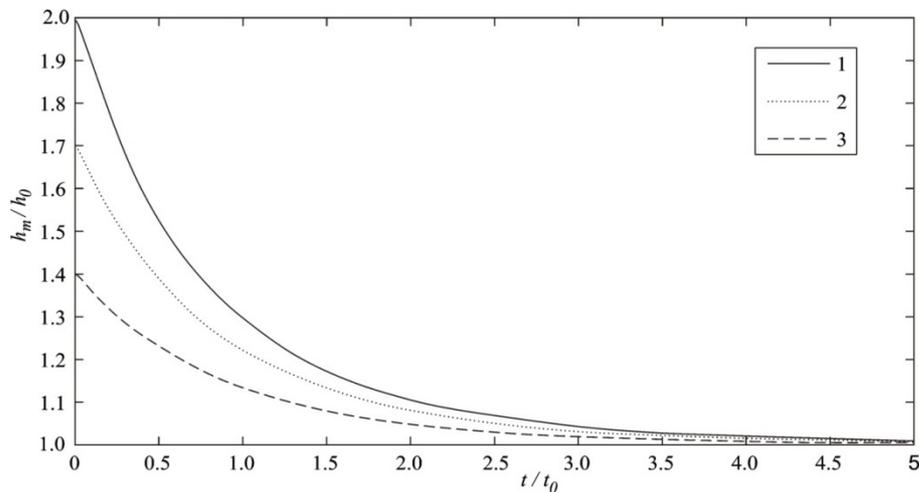


Рисунок 3.4 – Зависимость зазора от времени при  $\varepsilon = 0.01$  для различных начальных условий;

1)  $h'(0) = 2$ ; 2)  $h'(0) = 1.7$ ; 3)  $h'(0) = 1.4$ .

Рисунок 3.4 показывает, что после любого внезапного скачка нагрузки, который характеризуется безразмерным параметром  $h'(0)$ , величина зазора стремится к новому равновесному значению. При этом скорость изменения зазора тем больше, чем больше начальное отклонение зазора от равновесного значения. На рисунке 3.5 представлен график изменения относительной скорости сближения поверхностей между контактирующими телами со временем для начального условия  $h'(0) = 2$ .

Рисунок 3.5 показывает, что увеличение параметра  $\varepsilon$  приводит к более плавному изменению вертикальной скорости ( $dh'/dt'$ ). При этом для очень малых значений  $\varepsilon$  скорость изменения зазора возрастает практически мгновенно, что в свою очередь вызывает резкий и большой скачок давления.

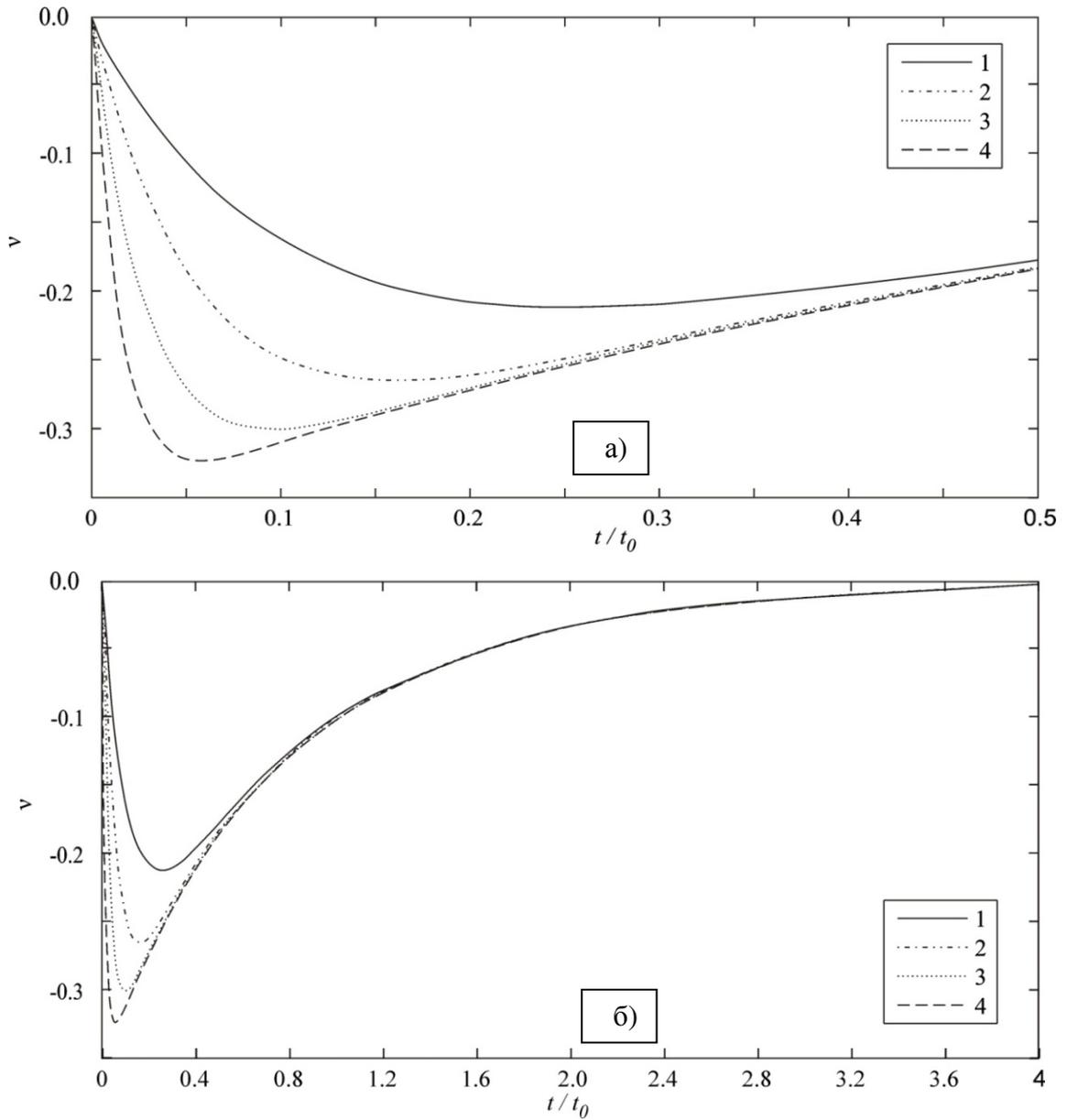


Рисунок 3.5 – Относительная скорость изменения зазора при начальном условии  $h'(0) = 2$  для различных значений малого параметра;  
 1)  $\varepsilon = 0.04$ ; 2)  $\varepsilon = 0.02$ ; 3)  $\varepsilon = 0.01$ ; 4)  $\varepsilon = 0.005$ .

Зная зависимость зазора от времени, построим график изменения максимума давления  $q_{\max}$  (рисунок 3.6).

$$q_{\max} = \max_{\tilde{x}}(q(t', \tilde{x})).$$

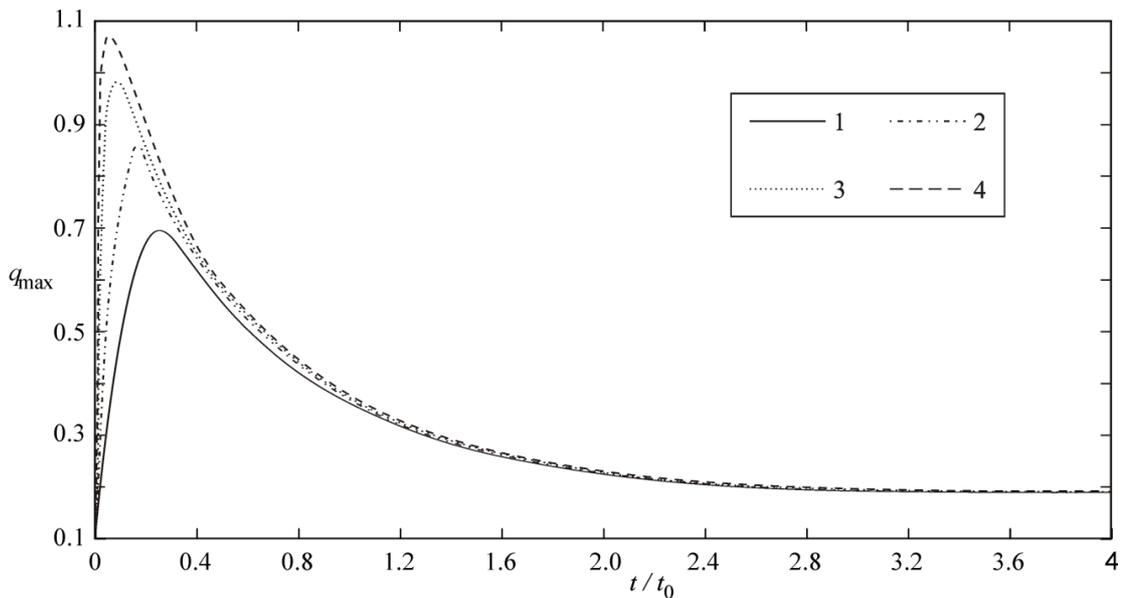


Рисунок 3.6 – Зависимость максимума давления от времени;

1)  $\varepsilon = 0.04$ ; 2)  $\varepsilon = 0.02$ ; 3)  $\varepsilon = 0.01$ ; 4)  $\varepsilon = 0.005$ .

Из рисунка 3.6 видно, что процесс установления можно охарактеризовать двумя временными интервалами. На первом интервале отмечается очень быстрый рост давления. Амплитуда и длительность роста давления определяется параметром  $\varepsilon$ . Чем меньше малый параметр  $\varepsilon$ , тем быстрее увеличивается со временем давление в смазочном слое. На втором временном интервале происходит процесс плавного спада давления к стационарному значению, соответствующему установившемуся состоянию смазочного слоя при постоянной нагрузке.

Далее введем обозначения для абсолютного максимума давления в слое, достигаемого в процессе релаксации

$$Q = \max_{\tilde{x}, t'}(q(\tilde{x}, t')),$$

а так же для максимального давления в равновесном состоянии, достигаемом при  $t' \rightarrow \infty$ .

$$Q_S = \lim_{t' \rightarrow \infty}(q_{\max}(t')).$$

На рисунке 3.7 представлен график зависимости отношения  $Q/Q_S$  от скачка нагрузки в начальный момент времени (отношения действующих сил  $F_1/F_0$ ). Данный график показывает, что чем меньше малый параметр  $\varepsilon$  и чем больше

начальное отклонение от равновесного состояния, тем сильнее выражен нелинейный рост пикового давления.

Рисунки 3.6 и 3.7 показывают, насколько важно учитывать нестационарные переходные процессы в узлах трения. При медленном (квазистационарном) увеличении нагрузки  $F$  максимальное по слою давление увеличивается пропорционально  $F^{3/2}$ . Однако, после внезапного скачка нагрузки в течение переходного процесса максимальное по слою давление кратковременно возрастает значительно сильнее  $[\sim F^{3/2} Q(h_0)/Q_s(h_0)]$ . Например, при увеличении нагрузки в два раза давление в максимуме может возрасти примерно в 17 раз при  $\varepsilon = 0.005$ .

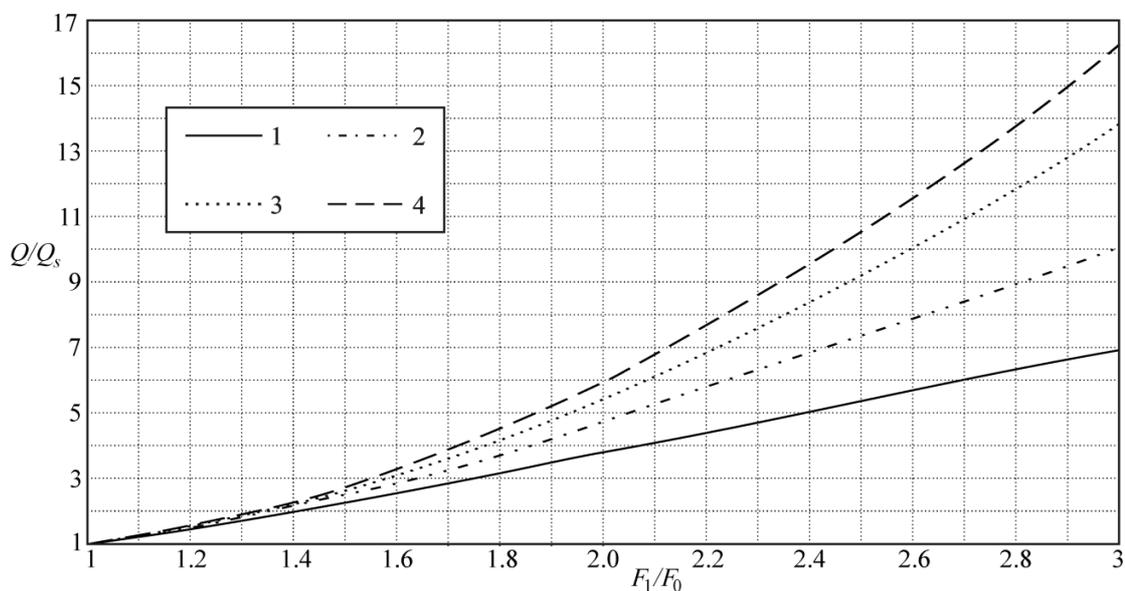


Рисунок 3.7 – Влияние начального условия на изменение пика давления для различных  $\varepsilon$ ;

1)  $\varepsilon = 0.04$ ; 2)  $\varepsilon = 0.02$ ; 3)  $\varepsilon = 0.01$ ; 4)  $\varepsilon = 0.005$ .

### 3.3 Аналитическое решение с учетом изменения вязкости

Теперь рассмотрим решение уравнения Рейнольдса с учетом переменной вязкости смазочного слоя. В этом случае уравнение (3.1) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \exp(-\alpha P) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 6\mu_0 V \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{2}{V} \frac{\partial h}{\partial t} \right), \quad (3.61)$$

где  $\alpha$  – пьезокоэффициент давления [77, 92, 95],  $\mu_0$  – динамическая вязкость масла при нормальном давлении.

Используя граничные условия (3.11) и безразмерные переменные (3.12), преобразуем уравнение (3.61) к более простому виду:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left( H(\tilde{x})^3 \exp(-\tilde{\alpha}q) \frac{\partial q}{\partial \tilde{x}} \right) = \frac{\partial H(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} + 2\nu, \quad (3.62)$$

где  $H(\tilde{x}) = 1 + \tilde{x}^2 / 2$ ;  $\tilde{\alpha} = 6\alpha\mu_0 V \sqrt{R} / h_m^{3/2}$ .

Положения входной и выходной границ будем характеризовать безразмерными параметрами  $a$  и  $c$ :

$$a = \frac{(x_1 - x_m)}{(Rh_m)^{1/2}}, \quad c = \frac{(x_2 - x_m)}{(Rh_m)^{1/2}}. \quad (3.63)$$

Значение параметра  $a$  зависит от количества смазки. В случае обильной смазки полагают  $a = -\infty$  [29, 31, 65].

Для стационарного режима при  $V_y = 0$ , интегрируя уравнение (3.62) и используя нулевое граничное условие (3.11) для производной функции давления при  $x = x_2$ , получаем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\exp(-\tilde{\alpha}q) \frac{\partial q}{\partial \tilde{x}} = \frac{H(\tilde{x}) - H(c)}{H(\tilde{x})^3} = \frac{(\tilde{x}^2 - c^2)/2}{(1 + \tilde{x}^2/2)^3}. \quad (3.64)$$

В результате интегрирования уравнения (3.64) находим функцию, характеризующую распределение давления в смазочном слое и зависящую от параметра  $c$ :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \exp(-\tilde{\alpha}q(x))}{\tilde{\alpha}} = & \left( \arctan\left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 1 - \frac{3}{2}c^2 \right) - \\ & - (2 + c^2) \cdot \left( \frac{\tilde{x}}{(2 + \tilde{x}^2)^2} \right) + \left( \frac{\tilde{x}}{2 + \tilde{x}^2} \right) \left( 1 - \frac{3}{2}c^2 \right) \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Неизвестный параметр  $c$  определяем с помощью граничного условия  $q(c) = 0$ , из которого следует трансцендентное уравнение

$$\left( \arctan\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 1 - \frac{3}{2}c^2 \right) - (2 + c^2) \cdot \left( \frac{c}{(2 + c^2)^2} \right) + \left( \frac{c}{2 + c^2} \right) \left( 1 - \frac{3}{2}c^2 \right) \frac{1}{2} = 0. \quad (3.66)$$

Решая уравнение (3.66) численно методом Ньютона, находим значение искомого параметра:  $c = 0.67155$ . Подставляя найденное значение  $c$  в уравнение (3.65), получаем распределение давления в смазочном слое, удовлетворяющее всем граничным условиям.

### 3.4 Расчет деформаций контактирующих тел и функции податливости

Далее найденное распределение давления используем для определения прогиба упругой поверхности, контактирующей с роликом и деформации самого ролика. Для этого применяем программный комплекс ANSYS, основанный на методе конечных элементов [58]. В нем строится модель пластины и ролика, которые разбиваются сеткой на элементарные конечные элементы. При разбиении на элементы необходимо учитывать, что в зоне контакта сетка должна быть строго упорядоченной и достаточно мелкой для более точного расчета.

На граничных узлах сетки в области контакта задается найденное на первом этапе распределение давления. Далее выполняется расчет в ANSYS, после которого снимаются показания прогибов контактирующих поверхностей, которые используются в дальнейшем для определения функции податливости. Схемы расчетных сеток ролика и пластины представлены на рисунке 3.8.

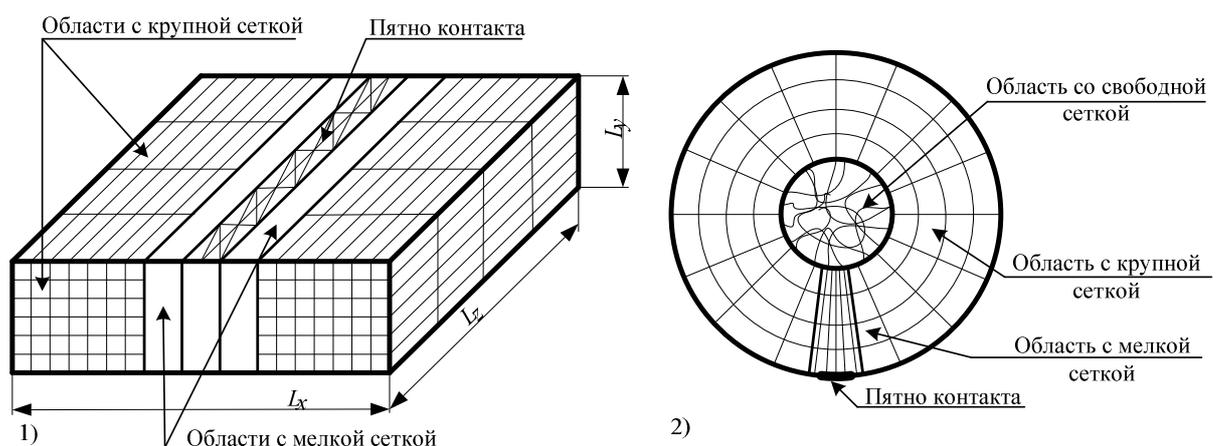


Рисунок 3.8 – Схема расчетной сетки, используемой в ANSYS;

1) для упругой пластины; 2) для упругого ролика.

Рассмотрим контакт жесткого ролика с упругой пластиной при следующих числовых параметрах:  $h_m = 0.00001$  м,  $\mu = 0.024$  Па·с,  $V = 7$  м/с,  $R = 0.005$  м. С помощью функции (3.65) построим распределение давления в смазочном слое (рисунок 3.9).

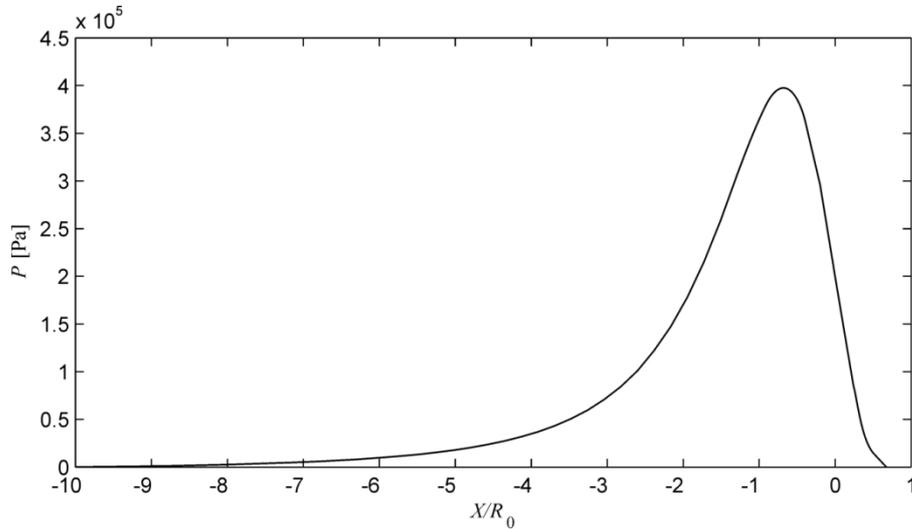


Рисунок 3.9 – Распределение давления в смазочном слое.

Найденное распределение давления в смазочном слое (Рисунок 3.9) применяем для определения прогиба упругой поверхности при моделировании в ANSYS (рисунок 3.10). В программном комплексе ANSYS для моделирования деформаций построена расчетная модель упругой пластины (упругий параллелепипед размерами  $L_x \times L_y \times L_z = 0.2 \times 0.05 \times 0.2$  м). Вся расчетная область разбивается на 40 элементов по длине, 10 элементов по высоте и 4 элемента по ширине (крупная сетка). В зоне действия нагрузки делается дополнительное, более мелкое разбиение области на 90 ячеек вдоль пятна контакта для большей точности расчетов.

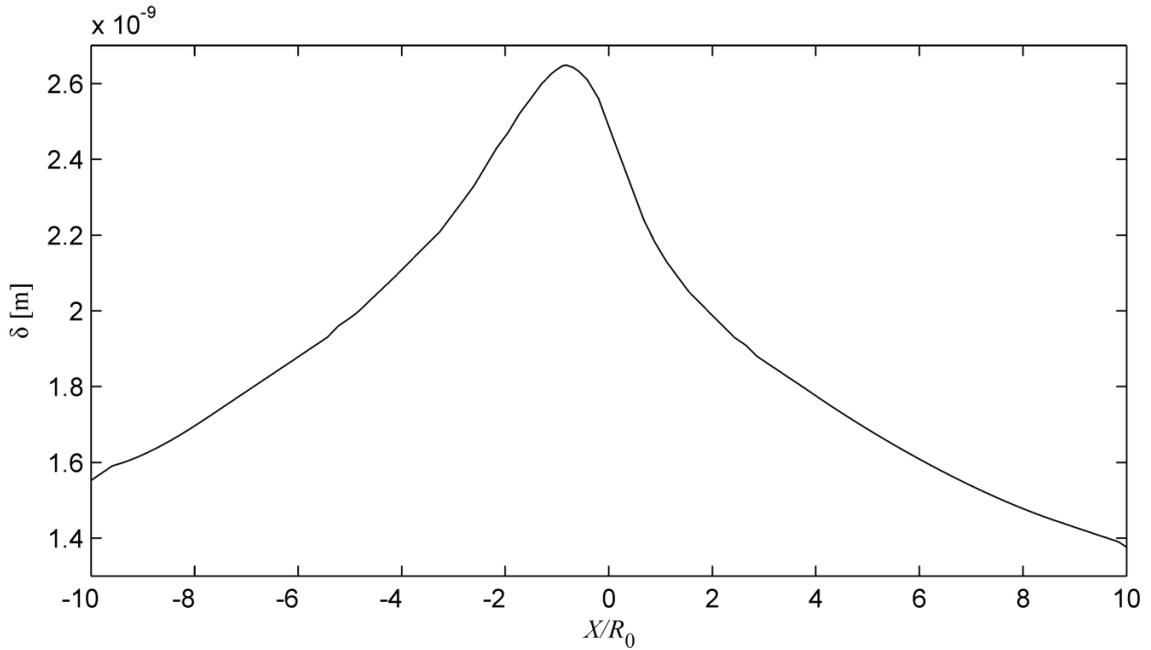


Рисунок 3.10 – Прогиб упругой пластины.

Далее определяем функции прогибов на основе результатов расчета ANSYS и интегральной формулы (3.2), подробное описание функции податливости изложено в главе 2.

$$K(x-x') = \frac{1}{l} \frac{D_0}{Y_0} + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{X_k C_k + Y_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2} \cos\left(x \frac{2\pi}{l} i\right) + \frac{2}{l} \frac{Y_k C_k - X_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2} \sum_{k=1}^{k=n} \sin\left(x \frac{2\pi}{l} i\right). \quad (3.67)$$

Важно отметить, что при восстановлении функции податливости возникают шумы, связанные с влиянием мелкомасштабных погрешностей в исходных данных, полученных на основе расчета ANSYS. Чтобы устранить эти шумы, необходимо использовать специальную регуляризацию. Общая теория регуляризации при решении интегральных уравнений описана в монографии [67]. Для подавления шумов введем, регуляризирующий оператор в функцию податливости, тогда уравнения прогиба примет следующий вид:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x') \left[ K(x-x') - \gamma \frac{\partial^4}{\partial x^4} K(x-x') \right] dx', \quad (3.68)$$

$$K(x-x') - \gamma \frac{\partial^4}{\partial x^4} K(x-x') = \hat{L}K, \quad (3.69)$$

$$\hat{L} = 1 + \gamma \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \quad (3.70)$$

где  $\hat{L}$  – регуляризирующий оператор.

При разложении функции податливости  $K(x-x')$  в ряды Фурье, коэффициенты Фурье будут корректироваться регуляризирующим множителем следующего вида:

$$g_j = \frac{1}{1 + \gamma j^4}, \quad (3.71)$$

где  $\gamma$  – малый параметр, подбираемый для уменьшения паразитных осцилляций. Отметим, что увеличение параметра  $\gamma$  приводит с одной стороны к более сильному подавлению шумов, но с другой стороны вызывает нежелательный эффект снижения максимума самой функции. Для минимизации этого эффекта можно варьировать значения параметра сглаживания на различных участках функции. На рисунке 3.11а. показано, что при значении параметра  $\gamma=0,0001$  максимум функции близок к исходной восстановленной функции податливости (3.67), но в то же время на краях области определения функции осцилляции сильно выражены. При  $\gamma=0.0008$  функция податливости полностью сглаживается, однако максимальное значение функции заметно уменьшается. Поэтому принимаем два параметра сглаживания, для центральной области определения функции  $-6 < x/R_0 < 6$  принимаем  $\gamma=0.0002$ , на остальных участках функции принимаем  $\gamma=0.0008$  (рисунок 3.11б).

В этом случае коэффициенты Фурье принимают вид:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_k &= \frac{2}{l} \frac{X_k C_k + Y_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2} g_k, & \tilde{N}_k &= \frac{2}{l} \frac{Y_k C_k - X_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2} g_k \quad k \neq 0; \\ \tilde{M}_0 &= \frac{1}{l} \frac{X_0 C_0 + Y_0 D_0}{X_0^2 + Y_0^2}, & \tilde{N}_0 &= \frac{1}{l} \frac{Y_0 C_0 - X_0 D_0}{X_0^2 + Y_0^2}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Подставляя найденные значения  $M_k$  и  $N_k$  из (3.72) в формулу (3.67), получаем сглаженную функцию податливости:

$$K(x) = \sum_{k=0}^n \left[ \tilde{M}_k \cos\left(x \frac{2\pi}{l} k\right) + \tilde{N}_k \sin\left(x \frac{2\pi}{l} k\right) \right]. \quad (3.73)$$

Формула (3.73) применима как для  $K_1$  – функции податливости упругой пластины, так и для  $K_2$  – функции податливости ролика. Функции  $K_1$  и  $K_2$  могут

существенно отличаться в силу различий геометрических характеристик и свойств материалов пластины и ролика.

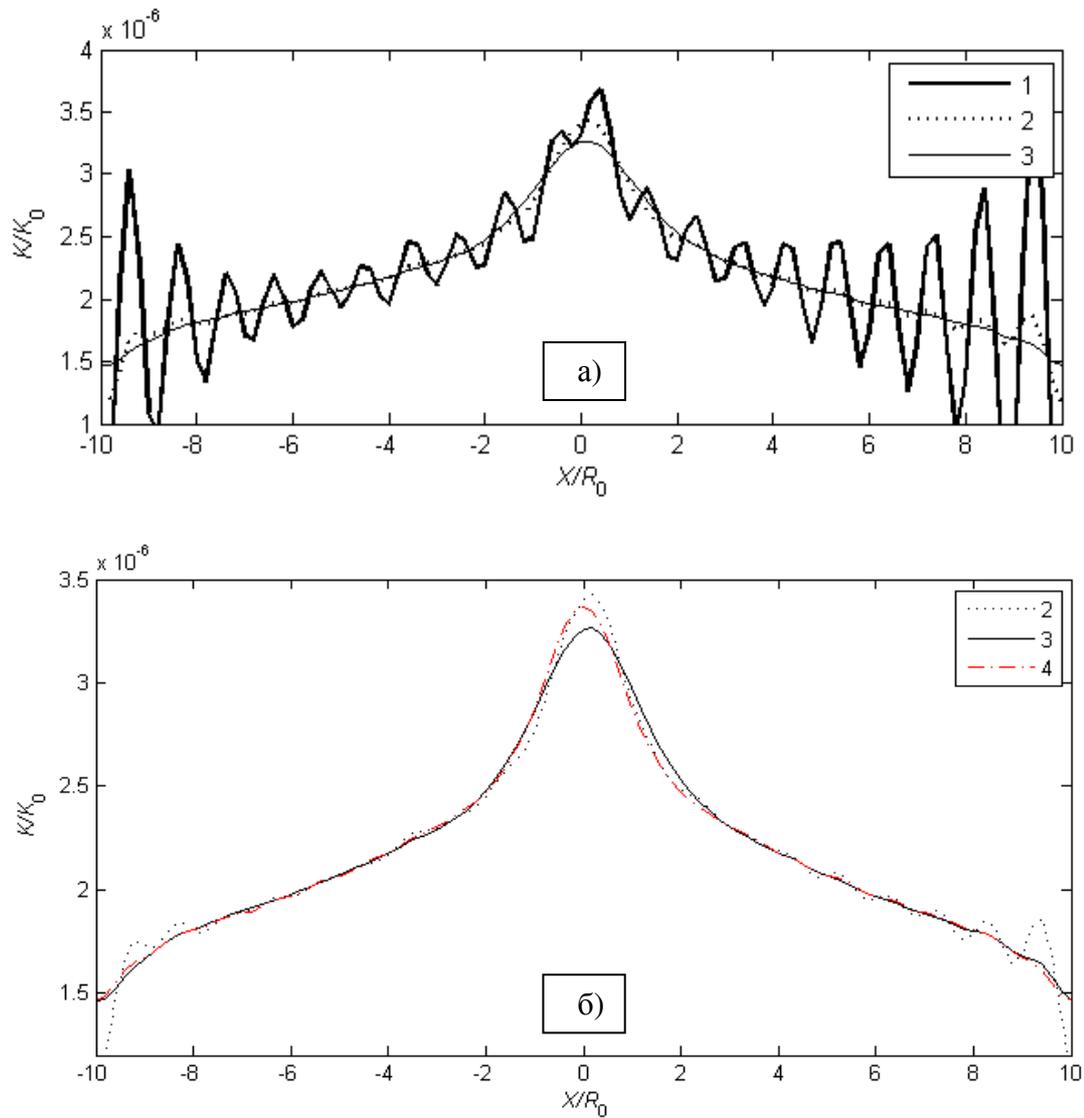


Рисунок 3.11 – Функции податливости в безразмерных единицах;  
 1)  $\gamma = 0$ ; 2)  $\gamma = 0.0001$ ; 3)  $\gamma = 0.0008$ ; 4)  $\gamma = 0.0002$  ( $-6 < x/R_0 < 6$ ),  $\gamma = 0.0008$  ( $-6 \leq x/R_0 \leq 6$ ).

### 3.5 Итерационная формула. Пример расчета

На последнем этапе используем найденную функцию податливости для уточненного расчета распределений давления и прогиба итерационным способом. Итерационная формула имеет вид:

$$H_0(\tilde{x}) = 1 + \tilde{x}^2 / 2, \quad (3.74)$$

$$\delta_1^{(n)}(\tilde{x}) = A \int_a^b q_n(x') K_1(\beta(\tilde{x} - x')) dx', \quad \delta_2^{(n)}(\tilde{x}) = A \int_a^b q_n(x') K_2(\beta(\tilde{x} - x')) dx',$$

$$H_n(\tilde{x}) = 1 + \tilde{x}^2 / 2 + \delta_1^{(n-1)}(\tilde{x}) + \delta_2^{(n-1)}(\tilde{x}) = 1 + \tilde{x}^2 / 2 + A \int_a^b q_{n-1}(x') K_1(\beta(\tilde{x} - x')) dx' + \\ + A \int_a^b q_{n-1}(x') K_2(\beta(\tilde{x} - x')) dx,$$

$$\frac{1 - \exp(-\tilde{\alpha} q_n(x))}{\tilde{\alpha}} = \int_a^{\tilde{x}} \frac{H_n(x') - H_n(b)}{H_n(x')^3} dx, \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (3.75)$$

Здесь  $n$  – номер итерации,  $\beta = (R h_m)^{1/2} / L_y$ ,  $A = 6 \mu_0 V R / h_m^2$  – коэффициенты, вычисляемые по заданным параметрам задачи,  $L_y$  – толщина пластины.

На нулевой итерации расчет давления в смазочном слое выполняется без учета прогиба упругого слоя. В процессе сходящихся итераций получаем самосогласованные распределения давления и прогиба в области контакта. Доказательство сходимости итераций представлено в [29].

Для расчетов использовались следующие числовые параметры:  $h_m = 0.00001$  м,  $\mu = 0.024$  Па·с,  $V = 7$  м/с,  $R = 0.005$  м (за основу взят подшипник 32114 серии [60]). Для моделирования примем, что материалы пластины и ролика идентичны и имеют следующие механические свойства:  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па – модуль упругости (сталь),  $\nu = 0.3$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha = 0.75 \cdot 10^{-8}$  1/Па – пьезокоэффициент вязкости.

Решая уравнение (3.66) численно методом Ньютона, находим  $c = 0.67155$ . Подставляя найденное значение  $c$  в уравнение (3.65), получаем распределение давления, показанное на рисунке 3.12. Далее найденное распределение давления используем для определения прогибов упругой поверхности и ролика.

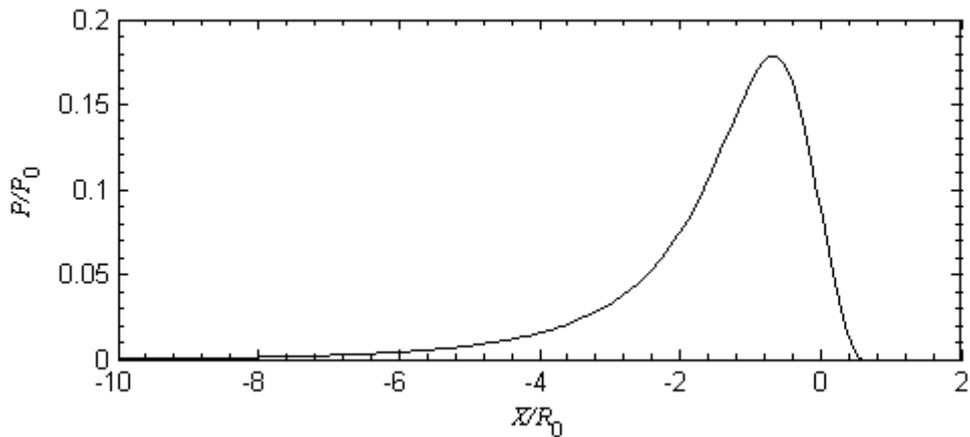


Рисунок 3.12 – Распределение безразмерного давления в смазочном слое при отсутствии деформаций. Координата нормирована к характерному размеру зоны контакта  $R_0=(R h_m)^{1/2}$ .

В программном комплексе ANSYS для моделирования процесса контакта была построена расчетная модель упругой пластины (упругий параллелепипед размерами  $L_x \times L_y \times L_z = 0.2 \times 0.05 \times 0.2$  м). Вся расчетная область разбивалась на 40 элементов по длине, 10 элементов по высоте и 4 элемента по ширине (крупная сетка). В зоне действия нагрузки делалось дополнительное, более мелкое разбиение области на 90 ячеек вдоль пятна контакта для большей точности расчетов, как показано на рисунке 3.4а. Внутри упругого ролика ( $R=0.005$  м) расчетная область от  $R = 0$  м, до  $R = 0.002$  м разбивалась свободной сеткой, предложенной комплексом ANSYS. Область от  $R = 0.002$  м, до  $R = 0.005$  м разбита на 10 элементов. Расчетная область, за исключением пятна контакта, разбита на 40 элементов по длине окружности, а само пятно контакта дополнительно разбито на 90 элементов (рисунок 3.8б).

В качестве нагрузки задавалось давление, действующее на каждую ячейку сетки вдоль пятна контакта. Выполняя расчет ANSYS для заданного распределения давления (рисунок 3.12), получаем значения деформаций ролика и пластины, показанные на рисунке 3.13.

Используя найденное ранее распределение давления в слое и рассчитанные по программе ANSYS деформации, определяем из решения системы (3.68) коэффициенты Фурье, значения которых представлены в таблицах 3.1 и 3.2.

Верхний предел суммирования  $n$  в формуле (3.67) принимаем равным 20, что обеспечивает приемлемую точность результата вычислений при восстановлении функции податливости и достаточно низкий уровень шумов. Дальнейшее увеличение  $n$  приводит к значительному усилению шумов (мелкомасштабных осцилляций) и необходимости более сильного сглаживания.

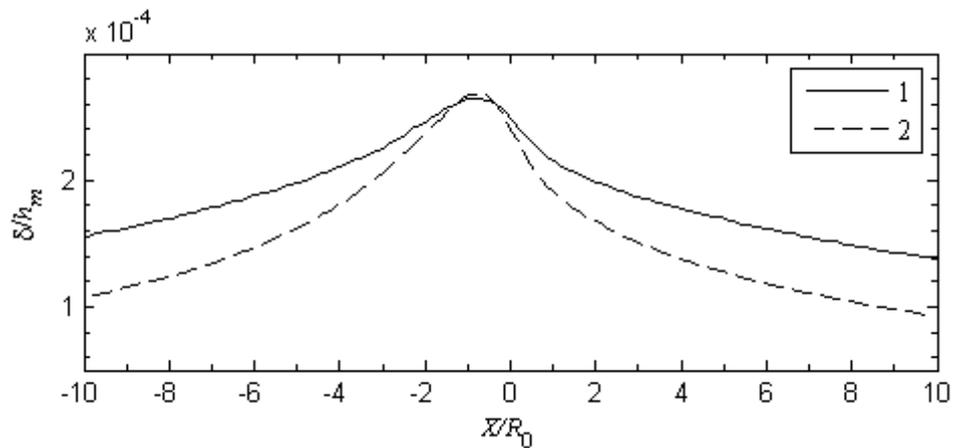


Рисунок 3.13 – Прогиб поверхности, полученный в результате моделирования в ANSYS: 1 – упругой пластины, 2 – упругого ролика.

Таблица 3.1

Значения коэффициентов Фурье функции податливости пластины.

i	0	1	2	3	4	5	6
$M \cdot 10^{16}$	21.7	5.88	1.43	1.82	0.675	1.13	0.27
$N \cdot 10^{16}$	0	0.0555	0.129	0.158	0.109	0.185	0.0370
i	7	8	9	10	11	12	13
$M \cdot 10^{16}$	0.823	-0.0384	0.777	-0.219	0.860	-17.6	-19.6
$N \cdot 10^{16}$	0.240	-0.0642	0.412	-0.0609	0.473	-5.07	-5.22
i	14	15	16	17	18	19	20
$M \cdot 10^{16}$	-0.925	1.70	73.3	2.15	-3.24	3.75	-0.710
$N \cdot 10^{16}$	-0.689	0.379	7.81	0.764	-0.107	1.17	6.65

Значения коэффициентов Фурье функции податливости ролика.

i	0	1	2	3	4	5	6
$M \cdot 10^{16}$	17.84	8.02	2.747	2.495	1.277	1.505	0.71
$N \cdot 10^{16}$	0	0.7095	0.3587	0.5034	0.3241	0.5026	0.3042
i	7	8	9	10	11	12	13
$M \cdot 10^{16}$	1.111	0.35	0.887	0.208	0.795	-0.185	0.836
$N \cdot 10^{16}$	0.5714	0.2419	0.618	0.1402	0.6316	0.0653	0.6853
i	14	15	16	17	18	19	20
$M \cdot 10^{16}$	-0.606	1.305	-1.079	1.865	-2.779	2.775	-2.301
$N \cdot 10^{16}$	-0.276	0.6684	0.1297	0.6569	0.1541	1.683	2.17

Для сглаживания паразитных осцилляций вводим регуляризирующие множители. Осцилляции сильнее проявляются на краях и в меньшей степени – в центральной части области определения функции податливости. Поэтому в центральной части применяем множители  $g_{1k}$  с меньшим сглаживанием, а на периферии – множители  $g_{2k}$  с большим сглаживанием:

$$g_{1n} = \frac{1}{1 + 0.0002 n^4}, \quad g_{2n} = \frac{1}{1 + 0.0008 n^4}. \quad (3.76)$$

Подставляя найденные значения  $M_k$  и  $N_k$  с множителями (3.76) в формулу (3.67), получаем окончательное выражение функции податливости в виде:

$$K(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \left[ M_k g_{1k} \cos\left(x \frac{2\pi}{l} k\right) + N_k g_{1k} \sin\left(x \frac{2\pi}{l} k\right) \right], & |x/L| < 0.03; \\ \sum_{k=0}^n \left[ M_k g_{2k} \cos\left(x \frac{2\pi}{l} k\right) + N_k g_{2k} \sin\left(x \frac{2\pi}{l} k\right) \right], & |x/L| \geq 0.03. \end{cases} \quad (3.77)$$

График найденных функций показан на рисунке 3.14. Значения функций нормированы к их максимальным значениям:  $K_{\max 1} = 3.267 \cdot 10^{-15} \text{ Па}^{-1}$  для упругой пластины и  $K_{\max 2} = 3.45 \cdot 10^{-15} \text{ Па}^{-1}$  для упругого ролика. Пики функций податливости пластины и ролика очень близки по значениям. Это объясняется идентичностью механических свойств материалов ролика и пластины. При этом функция податливости пластины существенно медленнее спадает по сравнению с функцией податливости ролика, что связано с различием их геометрических параметров. Характер убывания функции податливости для ролика зависит от его радиуса, а для пластины – от её толщины.

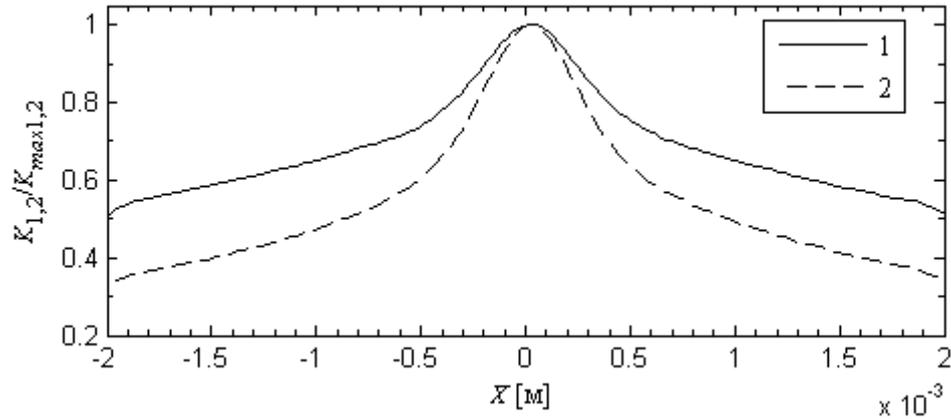


Рисунок 3.14 – График функций податливости,  
1 – упругой пластины, 2 – упругого ролика.

Полученная формула (3.77) для функции податливости  $K(x-x')$  может применяться при любых распределениях давления в смазочном слое для заданных размеров пластины и ролика. Для проверки формулы (3.77) делаем расчет деформации поверхности пластины для другого распределения давления, соответствующего минимальному зазору  $h_m = 0.000005$  м, с помощью пакета ANSYS. Результаты расчетов представлены на рисунке 3.15. Расчет ANSYS дает результат, завышенный на 4%, что может быть связано с вычислительной погрешностью самого пакета ANSYS.

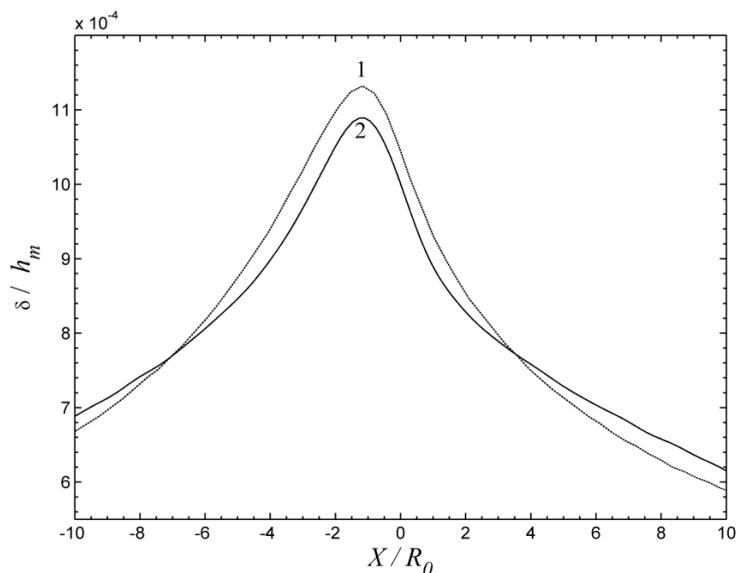


Рисунок 3.15 – Кривая 1 построена по данным расчета в ANSYS, кривая 2 определена по формуле (3.2) с помощью найденной функции податливости.

Далее включаем найденные функции податливости в общую итерационную схему для самосогласованного расчета давления и прогиба в зоне контакта. Сначала выполняем расчет для  $h_m = 0.000001$  м. Результаты расчетов прогиба и давления представлены в таблице 3.3. Нулевая итерация не учитывает прогиб поверхности и поэтому дает наибольший пик давления. При следующих итерациях, учитывающих прогиб, пик давления заметно снижается. Как видно из таблицы 3.3, установившийся режим для данного случая наступает уже на третьем итерационном шаге. На дальнейших итерационных шагах относительные изменения максимального прогиба и давления очень малы (составляют сотые доли процента).

Далее проводим серию вычислительных экспериментов, постепенно увеличивая давление за счет уменьшения минимального зазора. Так, выполняем расчеты для следующих значений минимального зазора  $h_m$ : 0.00000085, 0.00000065, 0.0000005, 0.00000037 и 0.00000025. Расчеты показали, что уменьшение параметра  $h_m$  (увеличение внешней нагрузки) приводит к некоторому замедлению сходимости процесса и увеличению числа итерационных шагов для достижения требуемой точности. Так же определим контактную нагрузку на каждом шаге итерации. Зависимость нагрузки от распределения контактного давления определяется следующим интегральным уравнением:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} P(x) dx, \quad (3.78)$$

где  $W$  – контактная нагрузка.

Таблица 3.3

Максимальные значения давления и прогиба для  $h_m=0.000001$  м.

№ Итерации	Давление $P \cdot 10^7$ Па	Прогиб $\delta \cdot 10^{-8}$ м		Нагрузка $10^3$ , Н
		Кольцо	Ролик	
0	1.33280	2.88508651	2.98079148	4.871
1	1.2209	2.715387	2.804656146	4.499
2	1.2272	2.725262225	2.8149000698	4.522
3	1.2268	2.7244631096	2.8140732702	4.520
4	1.2269	2.7250222903	2.8146484524	4.522
5	1.22687	2.7247243298	2.8143419046	4.521

### 3.6 Анализ влияния деформаций и зависимости вязкости от давления

Исследуем влияние прогиба поверхности и пьезокоэффициента вязкости на максимум давления в смазочном слое. В таблице 3.4 приведены данные расчетов, в которых пьезокоэффициент был фиксирован, и изменялась лишь величина зазора. Данные показывают, что пьезокоэффициент вязкости начинает значительно влиять на пик давления только при очень малых зазорах ( $h < 3 \cdot 10^{-7}$ ). Влияние деформации упругой поверхности также становится выраженным лишь при малых зазорах.

Таблица 3.4

Максимальные давления в разных вариантах расчета ( $\alpha = 0.75 \cdot 10^{-8}$  1/Па,  $V_y = 0$ ).

Минимальный зазор в смазочном слое $h_m$ , м	Максимальные $P$ давление в смазочном слое		
	Без учета пьезоэффекта и прогиба, $10^7$ Па	Только с учетом пьезоэффекта, $10^7$ Па	С учетом прогиба и пьезоэффектом, $10^7$ Па
$h=0.000001$	1.26	1.33	1.23
$h=0.0000005$	3.59	4.18	3.48
$h=0.00000035$	6.13	8.2	5.6
$h=0.00000025$	10.02	19.1	8.37

Также рассмотрим влияние пьезоэффекта на пик давления в смазочном слое при фиксированном зазоре. Для этого выполняем серию расчетов с разными значениями пьезокоэффициента. Согласно результатам расчетов, представленным в таблице 3.5, при значении  $\alpha = 1.1 \cdot 10^{-8}$  1/Па влияние пьезокоэффициента на рост пика давления полностью компенсируется прогибом поверхности.

Таблица 3.5

Влияние пьезокоэффициента на давление в смазочном слое ( $h=0.00000035$  м,  $V_y=0$ ).

Пьезокоэффициент $\alpha$ , $10^{-8}$ 1/Па	Максимальные $P$ давление в смазочном слое		
	Без учета пьезоэффекта и прогиба, $10^7$ Па	Только с учетом пьезоэффекта, $10^7$ Па	С учетом прогиба и пьезоэффектом, $10^7$ Па
2.3	6.13	нет решения	10.2
1.6		24.5	7.54
1.4		13.24	6.89
1.1		10.6	6.18
0.75		8.20	5.60
0.35		6.89	5.08

Далее проводим еще одну серию вычислительных экспериментов для нахождения коэффициента демпфирования  $\lambda$  с учетом влияния прогиба поверхности. Для этого рассчитываем величину несущей способности  $W$  для различных значений минимального зазора с учетом как положительных, так и отрицательных значений вертикальной скорости. При этом в каждом расчете используем итерационный метод. Зависимость несущей способности  $W$  от вертикальной скорости  $V_y$  показана на рисунке 3.16. На рисунке 3.17 показана зависимость контактной нагрузки от минимально зазора при нулевой вертикальной скорости.

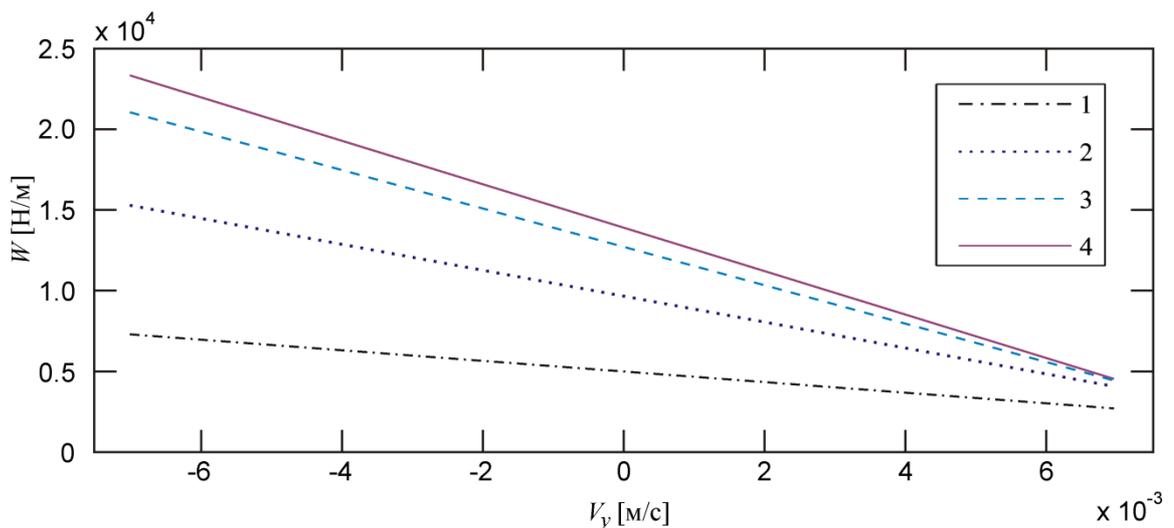


Рисунок 3.16 – Зависимость контактной нагрузки  $W$  от вертикальной скорости  $V_y$ ;

1 –  $h=0.000001$  м; 2 –  $h=0.0000005$  м; 3 –  $h=0.00000035$  м; 4 –  $h=0.00000025$  м.

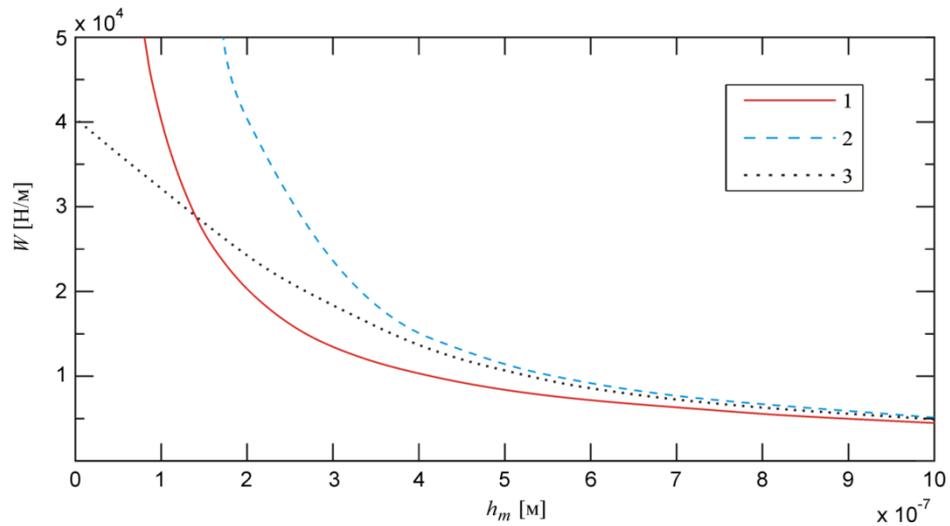


Рисунок 3.17 – Зависимость контактной нагрузки  $W$  от минимального зазора в смазочном слое  $h_m$ ; 1 – аналитическое решение; 2 – с учетом только пьезоэффекта; 3 – с учетом прогиба поверхности и пьезоэффекта.

Коэффициент демпфирования  $\lambda$  для различных значений минимального зазора определяется как тангенс угла наклона касательной к кривой, выражающей зависимость несущей способности  $W$  от нормальной скорости (рисунок 3.16). Используя рассчитанный для различных значений  $h_m$  массив значений  $\lambda$ , и применяя сплайновую интерполяцию, определяем функцию  $\lambda(h_m)$ , показанную на рисунке 3.18.

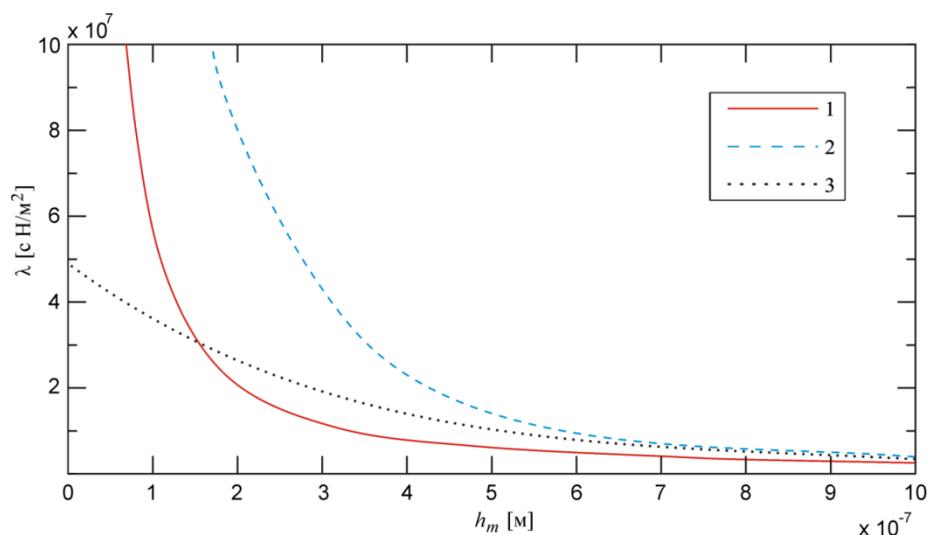


Рисунок 3.18 – Зависимость коэффициента демпфирования  $\lambda$  от минимального зазора  $h_m$ ; 1 – аналитическое решение; 2 – с учетом только пьезоэффекта; 3 – с учетом прогиба поверхности и пьезоэффекта.

Так же на рисунке 3.18 показано изменение коэффициента демпфирования для аналитического решения (без учета деформаций и пьезоэффекта).

Найденные функции демпфирования и несущей способности подставляем в уравнение (3.20), выполняем численное интегрирование и получаем зависимость зазора от времени, а также из уравнения (3.14) находим соответствующие распределения давления в смазочном слое в различные моменты времени. На рисунке 3.19 показан график изменения максимума давления с учетом коэффициента демпфирования и прогиба поверхности. На том же рисунке для сравнения представлен аналогичный график максимума давления, полученный без учета пьезокоэффициента давления и прогиба поверхности. Расчет был выполнен для базового зазора 0.00000035 м.

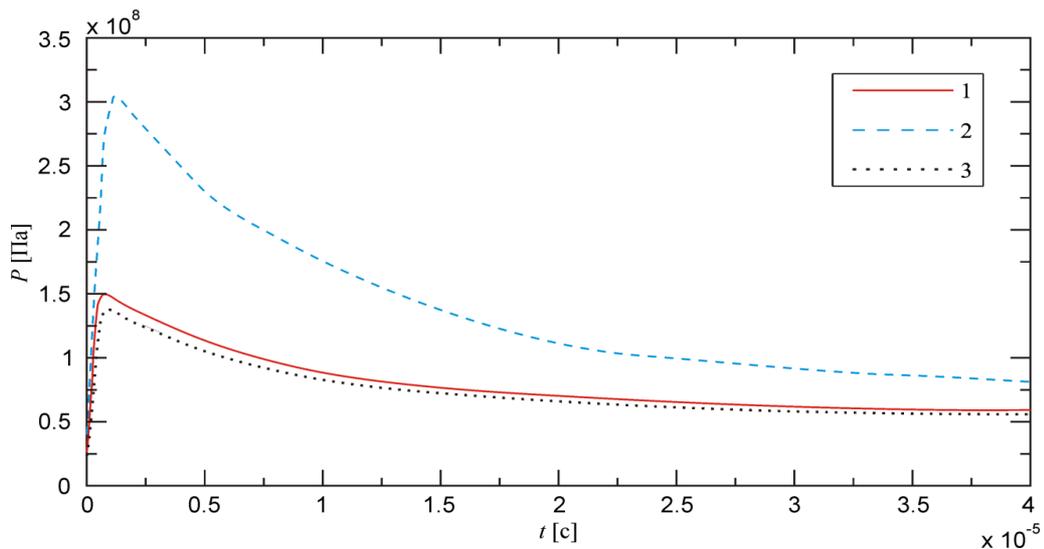


Рисунок 3.19 – Изменения пика давления в течении времени;

1 – аналитическое решение; 2 – с учетом только пьезоэффекта; 3 – с учетом прогиба поверхности и пьезоэффекта.

## Выводы

Построено асимптотическое аналитическое решение задачи нестационарного контактного взаимодействия ролика с твердой поверхностью при наличии смазочного слоя в зоне контакта. Показано, что процесс установления решения после резкого скачка нагрузки характеризуется двумя

временными масштабами. Первый – определяет резкий рост максимума давления сразу после скачка нагрузки. Второй – отражает процесс плавной релаксации давления к стационарному значению, соответствующему возросшему значению нагрузки. Полученные результаты обосновывают важность учета нестационарных переходных процессов в узлах трения. Решена задача нестационарного упруго-гидродинамического контакта движущегося ролика с пластиной конечной толщины с учетом прогиба поверхности, а также влияния давления на коэффициент вязкости. На первом этапе на основе решения уравнения Рейнольдса выполнен предварительный расчет давления в смазочном слое без учета деформаций поверхности. Далее распределение этого давления задавалось в программе ANSYS для определения упругих деформаций пластины и ролика. В предположении линейной интегральной связи деформации и давления определена функция податливости контактирующих тел. Найденные функции податливости не зависят от конкретного распределения давления в смазочном слое и используются для итерационного расчета характеристик смазочного слоя и деформаций поверхностей при различных нагрузках. В результате расчетов получены зависимости несущей способности и коэффициента демпфирования смазочного слоя от величины минимального зазора между роликом и пластиной. С использованием найденных функций изучен переходной процесс установления стационарного режима. Исследовано влияние пьезокоэффициента вязкости на пик давления, достигаемый в процессе установления. Найдено критическое значение пьезокоэффициента, при котором эффект возрастания давления, обусловленный увеличением вязкости, компенсируется влиянием деформации упругой поверхности.

### **Список принятых обозначений**

$a$  и  $c$  – входная и выходная безразмерная граница смазочного слоя;

$E$  – модуль Юнга;

$F$  – внешняя нагрузка;

$g$  – регуляризационный множитель;

$h$  – толщина смазочного слоя, зависящая от деформации поверхностей;

$h_m$  – минимальная толщина смазочного слоя;

$h_0$  – базовый зазор,

$H$  – безразмерный зазор;

$K(x-x')$  – функция податливости, характеризующая влияние давления в точке  $x'$  на прогиб в точке  $x$ ;

$L$  – длина пластины/ролика;

$\hat{L}$  – регуляризирующий оператор;

$l$  – длина пятна контакта;

$m$  – коэффициент Пуассона;

$M$  – масса ролика;

$P$  – Давление в смазочном слое;

$q$  – безразмерное давление;

$R$  – радиус ролика;

$T$  – температура в смазочном слое;

$V$  – скорость движения пластины;

$W$  – несущая способность смазочного слова;

$W'$  – безразмерная несущая способность смазочного слова;

$x_m$  – координата точки минимального зазора;

$\tilde{x}$  – безразмерная координата;

$\alpha$  – пьезо-коэффициент вязкости;

$\gamma$  – малый параметр, подбираемый для уменьшения паразитных осцилляций;

$\delta$  – деформация;

$v$  – безразмерная скорость;

$\mu$  – динамическая вязкость масла при нормальном давлении;

$\lambda$  – коэффициент демпфирования;

$\tau$  – безразмерное время;

$\Omega_0$  – коэффициент крутизны вискограммы.

## ГЛАВА 4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДШИПНИК СКОЛЬЖЕНИЯ: МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ

### 4.1 Постановка задачи

Гидродинамическая теория смазки широко применяется для расчета и конструирования подшипников скольжения с жидкой смазкой, которые являются важными конструктивными элементами разнообразных механизмов и машин. Существует большое количество публикаций, посвященных этой теме, например [110, 82, 84, 74, 106]. Роль упругих деформаций становится очень важной для тяжело нагруженных цилиндрических подшипников скольжения. Поэтому возникла необходимость учета упругих деформаций рабочих поверхностей в гидродинамической теории смазки. Это привело к развитию так называемой упруго-гидродинамической теории, в которой согласованно рассматривались течение смазочного слоя и деформация поверхности контакта, вызванная повышенным давлением в смазочном слое [91]. В этой теории важное место отводится проблеме определения связи между распределением давления в слое и деформацией поверхности.

Основными элементами конструкции гидродинамического подшипника скольжения являются цилиндрический вал, смазочный слой, вкладыш и корпус. Обычно вкладыш подшипника изготавливается из более податливого материала по сравнению с корпусом, который имеет высокую твердость и мало деформируется. По этой причине деформациями корпуса часто пренебрегают и учитывают только деформации вкладыша [31]. При таком упрощенном подходе деформации тонкого вкладыша, ограниченные жестким корпусом, определяются малым параметром – отношением толщины вкладыша к радиусу кривизны. Как показано в монографии [31], в первом приближении по этому малому параметру деформации вкладыша пропорциональны локальному значению давления. Коэффициент пропорциональности называют податливостью вкладыша. Данное

приближение связано с известной гипотезой Винклера. В случае цилиндрической геометрии точное значение коэффициента податливости может быть найдено из аналитического решения [55]. В общем случае необходимо учитывать не только деформации вкладыша, но также и деформации корпуса, имеющего конечную жесткость. В таком случае расчеты поверхностных деформаций должны выполняться самосогласованно с вычислениями распределения давления вдоль всего смазочного слоя. Для этой цели необходимо определить общую функциональную связь между поверхностными деформациями и распределением давления в слое смазки, принимая во внимание различие свойств материала вкладыша и корпуса подшипника.

Для описания предлагаемого подхода рассмотрим цилиндрический подшипник скольжения, в котором смазочный слой разделяет стальной вал и бронзовый вкладыш, граничащий со стальным корпусом, как показано на рисунке 4.1 [42].

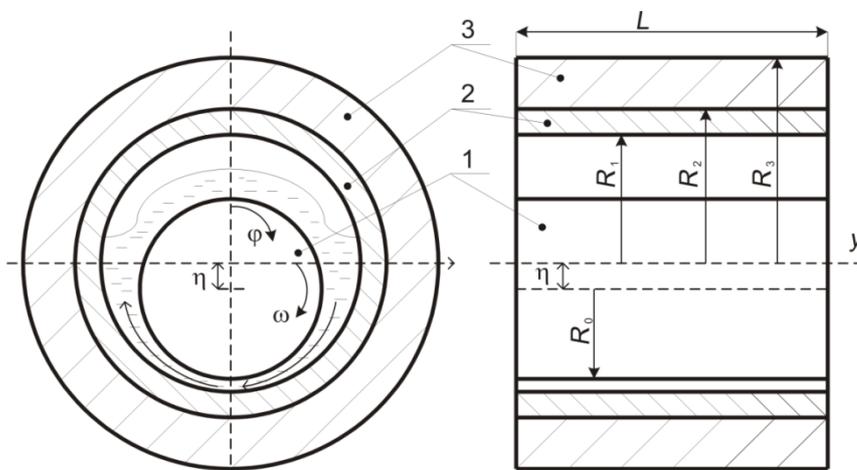


Рисунок 4.1 – Геометрическая схема подшипника скольжения:

1 – вал, 2 – бронзовый вкладыш, 3 – корпус.

Здесь  $\omega$  – угловая скорость вращения вала,  $\varphi$  – азимутальный угол, отсчитываемый в направлении часовой стрелки от точки максимального зазора,  $\eta$  и  $R_0$  – эксцентриситет и радиус цилиндрического вала,  $R_1$  – внутренний радиус вкладыша,  $R_2$  и  $R_3$  – внутренний и внешний радиусы цилиндрического корпуса,  $L$  – длина подшипника. В расчетах используем нулевые граничные условия для

деформаций на заданной внешней границе корпуса подшипника. Между валом и вкладышем располагается тонкий слой жидкой смазки, называемый смазочным слоем. Также ставим нулевые граничные условия для давления на торцах подшипника.

Распределение давления в смазочном слое определяется из решения известного уравнения Рейнольдса [84]

$$\frac{1}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{1}{R_0} \frac{\partial hu}{\partial \varphi}, \quad (4.1)$$

$$h = R_1 - R_0 + \eta \cos(\varphi) + \delta(P), \quad P > 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial x} = 0, \quad P \leq 0.$$

Здесь  $h$  – толщина смазочного слоя,  $\mu$  – коэффициент вязкости,  $u$  – средняя скорость поверхностей вала и вкладыша,  $y$  – координата вдоль оси цилиндрического подшипника,  $\varphi$  – азимутальный угол,  $\delta$  – радиальный прогиб поверхности вкладыша, зависящий от давления в смазочном слое.

## 4.2 Расчет давления без учета прогиба

Для удобства вычислений вводим безразмерные параметры, используя следующие нормировки:

$$P = \tilde{P} \frac{6\mu R_1^2 \omega}{d^2}, \quad h = Hd, \quad d = R_1 - R_0, \\ y = R_1 \tilde{y}_1, \quad u = \omega R_1 / 2, \quad \eta = \tilde{\eta} d, \quad (4.3)$$

где  $\tilde{P}$  – безразмерное давление,  $\tilde{y}$  – безразмерная координата вдоль оси вращения вала, и  $H$  – безразмерная толщина смазочного слоя. С учетом нормировок (4.3) преобразуем уравнение Рейнольдса к безразмерному виду и добавляем релаксационный параметр  $\alpha$ :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( H^3 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left( H^3 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{\partial H}{\partial \varphi} + \alpha \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

$$H = 1 - \tilde{\eta} \cos(\varphi) + \tilde{\delta}(\tilde{P}), \quad \tilde{P} > 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \quad \tilde{P} \leq 0. \quad (4.6)$$

Существует множество публикаций, посвященных численным методам интегрирования уравнения Рейнольдса [73, 78, 90, 100]. В нашем случае численное решение уравнения (4.4) получено методом релаксации на основе неявной конечно-разностной схемы [101]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta \varphi^2} [A_{i+1/2,j} P_{i+1,j}^{n+1/2} - (A_{i+1/2,j} + A_{i-1/2,j}) P_{i,j}^{n+1/2} + A_{i-1/2,j} P_{i-1,j}^{n+1/2}] + \\ + \frac{A_{i,j}}{\Delta y^2} (P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n) = \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta \varphi} + \alpha \frac{P_{i,j}^{n+1/2} - P_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad (4.7) \end{aligned}$$

$$\frac{A_{i,j}}{\Delta y^2} (P_{i,j+1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}) = \alpha \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{A_{i,j}}{\Delta y^2} (P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n),$$

$$A_{i,j} = (H_{i,j}^n)^3, \quad A_{i+1/2,j} = (A_{i,j} + A_{i+1,j})/2, \quad i = 1 \dots N.$$

Здесь нижние индексы  $i, j$  нумеруют узлы сетки, а верхний индекс  $n$  нумерует шаги по времени. При пересчете на следующий временной слой решались уравнения (4.7) методом прогонки. Стационарное распределение давления в слое получалось в результате временной релаксации численного решения.

Для иллюстрации метода введем конкретные параметры подшипника скольжения:  $R_1 = 0.03$  м,  $R_2 = 0.035$  м,  $R_3 = 0.1$  м,  $d = 0.00013$  м,  $E_1 = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па,  $E_2 = 1.08 \cdot 10^{11}$  Па,  $m_1 = 0.3$ ,  $m_2 = 0.34$ ,  $\mu = 0.024$  Па/с,  $\omega = 314.16$  с<sup>-1</sup>, где  $E_1$  и  $E_2$  – модули упругости стального корпуса и бронзового вкладыша,  $m_1$  и  $m_2$  – коэффициенты Пуассона для материалов корпуса и вкладыша, соответственно. Длина и диаметр подшипника предполагаются равными друг другу.

На рисунке 4.2 показаны распределения давления вдоль смазочного слоя в зависимости от азимутального угла. Эти давления, полученные в результате численного решения уравнения (4.4), соответствуют различным значениям относительного эксцентриситета вала подшипника:  $\tilde{\eta} = 0.9$  и  $\tilde{\eta} = 0.8$ .

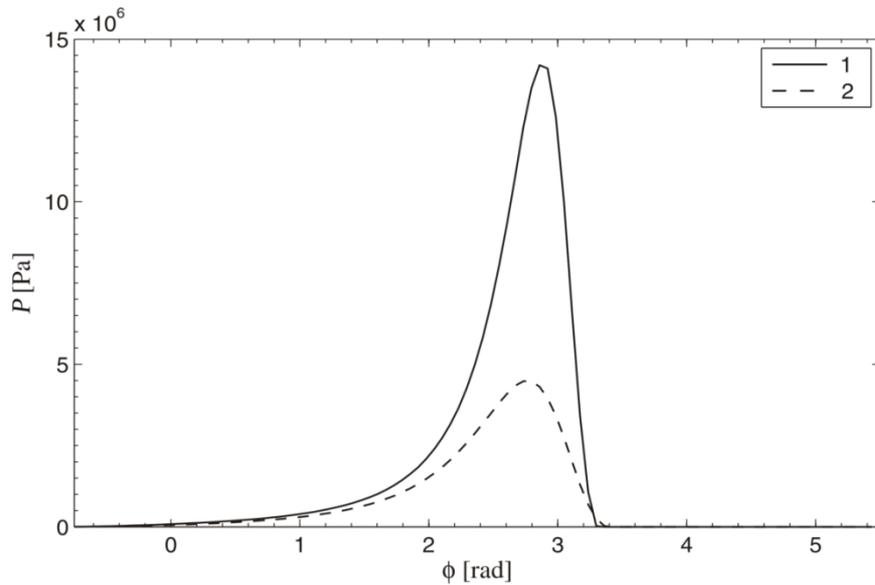


Рисунок 4.2 – Распределения давления вдоль смазочного слоя для двух значений эксцентриситета: 0.9 (кривая 1) и 0.8 (кривая 2).

### 4.3 Расчет упругих деформаций

Далее, найденные распределения давления используем для вычислений упругих деформаций вкладыша и корпуса. Для этого применяем программный пакет ANSYS, основанный на методе конечных элементов [102].

В результате выполненных расчетов с помощью пакета 2-D ANSYS для заданного распределения давления вдоль смазочного слоя, показанного на рисунке 4.2(2), были получены деформации, представленные на рисунке 4.3.

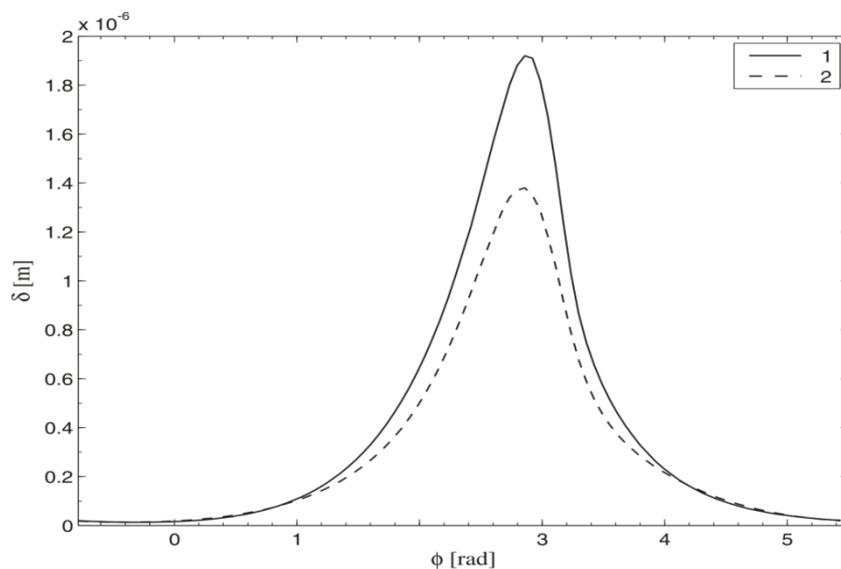


Рисунок 4.3 – Деформации вкладыша (кривая 1) и корпуса (кривая 2).

Здесь деформации вкладыша и корпуса показаны сплошной и штриховой линиями, соответственно. Эти численные результаты можно сопоставить с приближенной аналитической формулой Винклера [31], предполагающей соотношение пропорциональности между деформацией тонкого вкладыша и соответствующего локального гидродинамического давления в смазочном слое:

$$\delta = DP, \quad D = \frac{(R_2 - R_1)(1 + m_2)(1 - 2m_2)}{E_2(1 - m_2)}, \quad (4.8)$$

а так же с точным аналитическим решением:

$$\delta = \frac{P}{E} \frac{(1 + m)(1 - 2m)}{\left(2m \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right)} \left(\frac{R_1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1}\right). \quad (4.9)$$

Более общая и реалистичная формула, описывающая зависимость упругих деформаций от распределения давления, может быть записана в следующей интегральной форме:

$$\delta(\varphi) = \int_0^{2\pi} P(\varphi') K(\varphi - \varphi') d\varphi', \quad (4.10)$$

где  $\delta$  и  $P$  – прогиб поверхности и давление, зависящие от азимутального угла,  $K(\varphi - \varphi')$  – функция податливости. Подробное описание определения функции податливости на основе разложения Фурье описано в главе 2.

$$K(\varphi - \varphi') = \frac{D_0}{2\pi Y_0} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=n} M_k \cos(k(\varphi - \varphi')) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=n} N_k \sin(k(\varphi - \varphi')). \quad (4.11)$$

В этой формуле точность результата зависит от выбора верхнего предела суммирования  $n$ . В частности, значение  $n=10$  вполне достаточно для хорошей точности аппроксимации. В связи с применением формулы (4.11) следует обратить внимание на заметное влияние мелкомасштабных шумовых погрешностей, присутствующих в численных данных, полученных в результате расчетов. Для удаления связанных с таким шумом эффектов можно воспользоваться одним из способов регуляризации. Общая теория регуляризаций для интегральных уравнений описана в монографиях [107, 108]. Для подавления паразитных осцилляций вводим множители вида  $g_k=1/(1+\gamma k^4)$  для Фурье

коэффициентов. Здесь  $\gamma$  является малым параметром, который существенно влияет на затухание шумовых осцилляций. С регуляризационными факторами коэффициенты Фурье примут следующий вид:

$$\tilde{M}_k = \frac{g_k}{\pi} \frac{X_k C_k + Y_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2}, \quad \tilde{N}_k = \frac{g_k}{\pi} \frac{Y_k C_k - X_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2}, \quad k=1, 2, 3... \quad (4.12)$$

Подставляя модифицированные коэффициенты Фурье (4.12) в формулу (4.10) получаем сглаженную функцию податливости:

$$\tilde{K}(\varphi - \varphi') = \frac{D_0}{2\pi Y_0} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=n} g_k \frac{X_k C_k + Y_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2} \cos(k(\varphi - \varphi')) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=n} g_k \frac{Y_k C_k - X_k D_k}{X_k^2 + Y_k^2} \sin(k(\varphi - \varphi')). \quad (4.13)$$

Увеличение параметра  $\gamma$  ведет к более сильному затуханию шума, вызывая при этом незначительное снижение максимума функции. На рисунке 4.4 сплошной линией показана функция (4.13), соответствующая значению  $\gamma=0.0001$ . На том же рисунке штриховой линией показана аналитическая аппроксимация, заданная простой формулой вида

$$K_{an}(\varphi) = 1.2K_0 \left[ \frac{1}{1 + a\varphi^\alpha} \right]^\beta, \quad (4.14)$$

где  $a = 5$ ,  $\alpha = 1.7$ ,  $\beta = 1.4$ ,

$$K_0 = \left[ \frac{(R_2 - R_1)(1 + m_1)(1 - 2m_1)}{E_1(1 - m_1)} + \frac{(R_3 - R_2)(1 + m_2)(1 - 2m_2)}{E_2(1 - m_2)} \right]. \quad (4.15)$$

Полученные функции (4.13) и (4.14) определяют матрицу податливости для любого распределения давления вдоль смазочного слоя для заданных геометрических параметров подшипника скольжения. Для проверки формулы (4.10) были проведены также расчеты деформации поверхности вкладыша для другого распределения давления (рисунок 4.2 линия 2), соответствующего большему значению относительного эксцентриситета  $\eta/d=0.8$ . Вычисления выполнялись с помощью пакета ANSYS. Результаты расчетов показаны на рисунке 4.5.

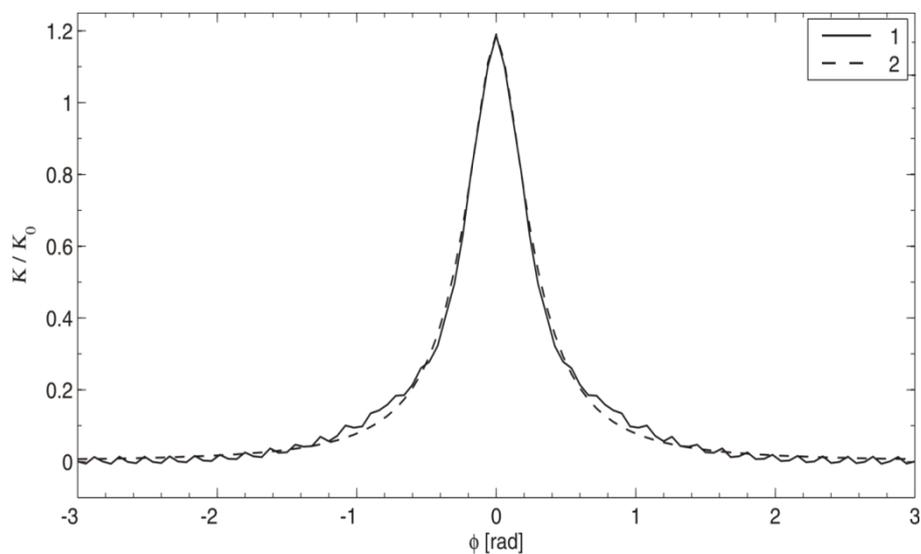


Рисунок 4.4 – Функция податливости, полученная из численного решения (кривая 1), в сравнении с аналитической аппроксимацией (кривая 2), заданной формулой (4.15).

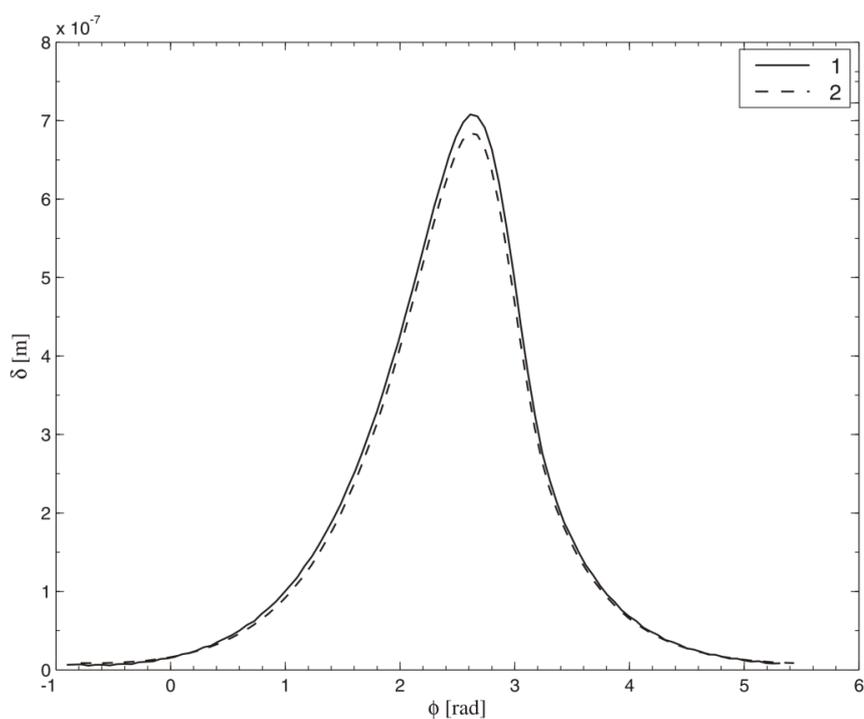


Рисунок 4.5 – Кривая 1 показывает прогиб поверхности вкладыша, полученный по формуле (4.10); кривая 2 – прогиб вкладыша, рассчитанный с помощью пакета ANSYS.

На рисунке 4.5 видно, что применение формулы (4.10) с функцией  $K$ , заданной выражением (4.13), дает функцию прогиба (сплошная линия), довольно близкую к результату прямого численного счета с помощью пакета ANSYS

(штриховая линия). Небольшое видимое отличие (около 3%) может быть связано с влиянием погрешности аппроксимации численного метода, используемого в пакете ANSYS.

#### 4.4 Трехмерные расчеты ANSYS

Далее анализируем различие между матрицами податливости для различных поперечных сечений подшипника скольжения. Для вычислений используем трехмерный пакет ANSYS при заданных выше параметрах. Для определения деформаций, связанных с распределением давления, применяем трехмерный пакет ANSYS с пространственной сеткой, показанной на рисунке 4.6.

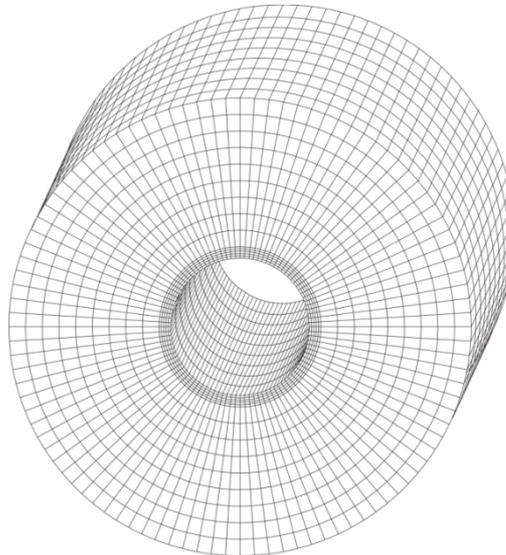


Рисунок 4.6 – Расчетная сетка для трехмерной модели ANSYS.

Используя конечно-разностную схему, описанную выше, вычисляем гидродинамическое давление в смазочном слое, зависящее от двух координат для подшипника скольжения, имеющего конечную длину. На рисунке 4.7 показаны профили давления, соответствующие различным поперечным сечениям ( $y = \text{const}$ ) подшипника.

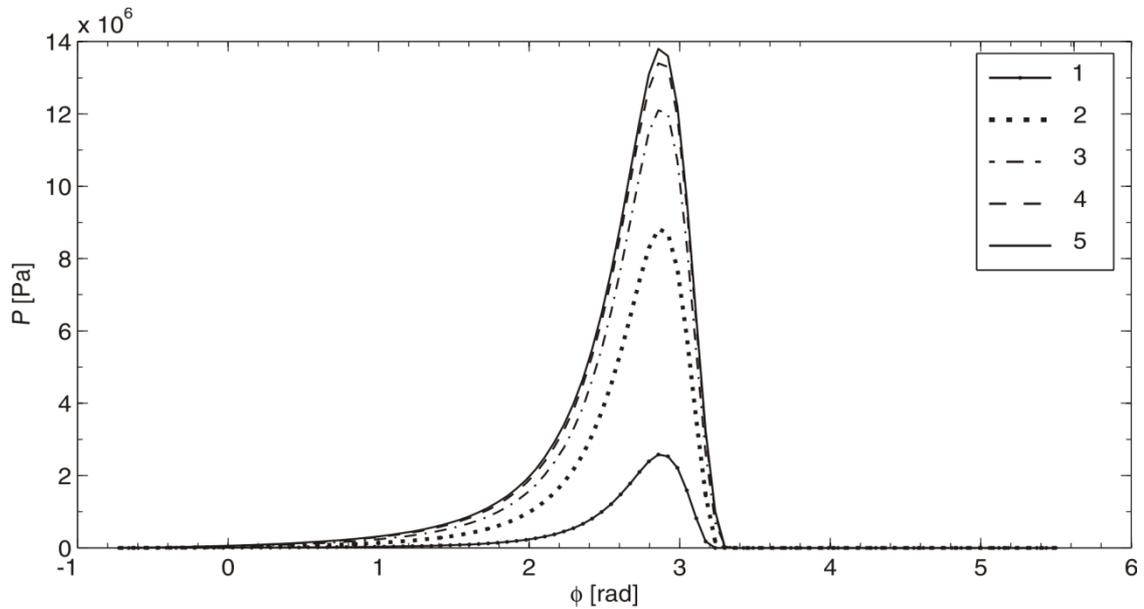


Рисунок 4.7 – Азимутальные распределения давления, соответствующие различным поперечным сечениям подшипника скольжения;

Кривая 1 – для сечения, близкого к краю подшипника:  $y=0.02666$  м. Кривые 2, 3, 4, и 5 соответствуют поперечным сечениям  $y=0.01999$  м,  $y=0.01333$  м,  $y=0.00666$  м и  $y = 0$ , соответственно.

Используя результаты вычислений ANSYS, находим деформации поверхности вкладыша в каждом поперечном сечении. Затем сравниваем трехмерное решение ANSYS в центральном поперечном сечении с двумерным решением ANSYS. Оба решения представлены на рисунке 4.8. Согласно рисунку 4.8, деформация поверхности подшипника в двумерном случае заметно больше, чем в трехмерной расчетной модели. Различие – порядка 28%.

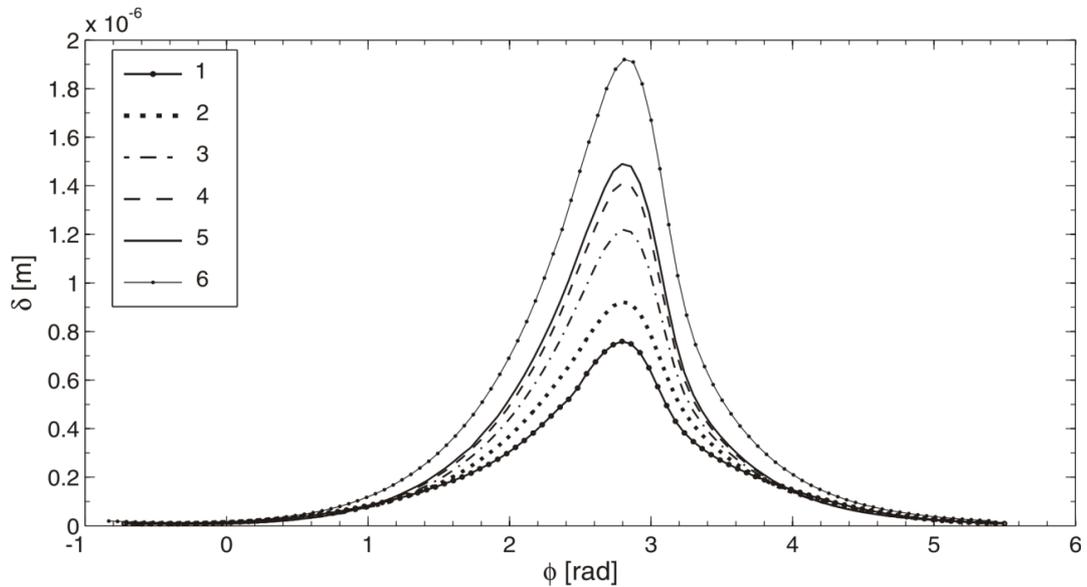


Рисунок 4.8 – Деформации поверхности подшипника для различных поперечных сечений (трехмерная модель), а также для двухмерной модели;

Кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют прогибу поверхности, полученному по трехмерной модели ANSYS для сечений  $y=0.03$  м,  $y=0.02333$  м,  $y=0.01666$  м,  $y=0.00999$  м и  $y=0.00333$  м, соответственно; кривая 6 соответствует двухмерной модели ANSYS.

Затем сравниваем поведение функций податливости для различных поперечных сечений. Для получения этих функций применяем описанное выше разложение Фурье для различных поперечных сечений подшипника. В итоге находим функции, показанные на рисунке 4.9. Этот рисунок ясно показывает, что функции податливости располагаются довольно близко друг к другу для всех сечений (кроме самых крайних). Поэтому можно использовать матрицу податливости, рассчитанную только для центрального сечения. Функция податливости, определенная на основе двухмерной расчетной модели, на 28% больше аналогичных функций, рассчитанных по трехмерной модели, когда длина и диаметр подшипника сравнимы по величине.

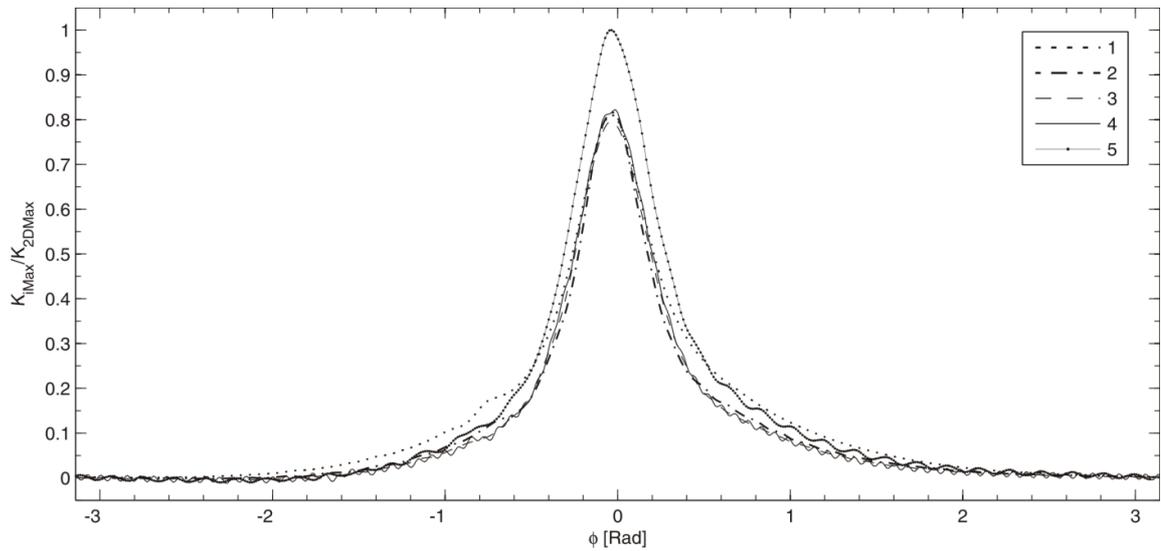


Рисунок 4.9 – Функции податливости, основанные на трехмерной и двухмерной моделях ANSYS;

Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют поперечным сечениям  $y=0.02333$  м,  $y=0.01666$  м,  $y=0.00999$  м и  $y=0.00333$  м, соответственно. Кривая 5 – двухмерная функция податливости.

#### 4.5 Тепловой расчет

Расчет мощности тепловыделения  $Q$  для подшипника скольжения работающего в гидродинамическом режиме определяется следующим выражением:

$$Q = \frac{h^3}{12\mu} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{R_1^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{h} V^2. \quad (4.16)$$

Запишем уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (4.17)$$

решение уравнения (4.17) можно представить в виде разложения Фурье:

$$T = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)] + T_0, \quad (4.18)$$

где  $a_k$  и  $b_k$  – коэффициенты Фурье:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\varphi) d\varphi. \quad (4.19)$$

На внутренней границе при  $r = R_1$  имеем граничное условие для потока тепла из смазочного слоя:

$$Q = -\chi \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (4.20)$$

где  $Q$  – мощность тепловыделения в смазочном слое, определяемая формулой (4.16).

Функцию мощности тепловыделения также разлагаем по Фурье гармоникам:

$$\Theta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \quad \Theta_k^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \quad (k = 1, 2, 3, \dots); \quad \Theta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\varphi) d\varphi.$$

На внешней границе задаем температуру окружающей среды  $T_0$ :

$$T(R_3) = T_0. \quad (4.21)$$

Применяя разложение Фурье к формуле (4.20), получаем уравнения для коэффициентов разложения:

$$-\chi \frac{\partial a_k}{\partial r} = \Theta_k, \quad -\chi \frac{\partial b_k}{\partial r} = \Theta_k^*. \quad (4.22)$$

Где коэффициенты  $a_k, b_k$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial a_k}{\partial r} \right) - \frac{k^2}{r^2} a_k &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial b_k}{\partial r} \right) - \frac{k^2}{r^2} b_k &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial a_0}{\partial r} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Решение уравнений (4.23) имеет вид:

$$a_k = C_1 \left( \frac{r}{R_3} \right)^k - C_2 \left( \frac{r}{R_3} \right)^{-k}, \quad b_k = C_1^* \left( \frac{r}{R_3} \right)^k - C_2^* \left( \frac{r}{R_3} \right)^{-k}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots); \quad a_0 = C_3 \ln \frac{R_3}{r}. \quad (4.24)$$

С помощью условий на внешней границе  $r=R_3, a_k(R_3)=0$  определяем, что  $C_1 = -C_2$ , тогда уравнение (4.24) примет вид:

$$a_k = C_1 \left[ \left( \frac{r}{R_3} \right)^k - \left( \frac{r}{R_3} \right)^{-k} \right]. \quad (4.25)$$

Используя условия на внутренней границе:

$$r = R_1, \quad a_k = -\Theta_k \frac{1}{\chi}, \quad (4.26)$$

определяем неизвестные переменные  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 = -\frac{R_3}{k} \frac{\Theta_k}{\chi \left[ \left( \frac{R_1}{R_3} \right)^{k-1} + \left( \frac{R_3}{R_1} \right)^{k+1} \right]}, \quad C_2 = \frac{R_3}{k} \frac{\Theta_k}{\chi \left[ \left( \frac{R_1}{R_3} \right)^{k-1} + \left( \frac{R_3}{R_1} \right)^{k+1} \right]}, \quad C_3 = -\frac{R_1}{\chi} \Theta_0. \quad (4.27)$$

С помощью найденных переменных  $C_1$  и  $C_2$  определяем коэффициент Фурье:

$$a_k = \Theta_k \tilde{a}_k, \quad \tilde{a}_k = -\frac{R_3}{k} \frac{1}{\chi \left[ \left( \frac{R_1}{R_3} \right)^{k-1} + \left( \frac{R_3}{R_1} \right)^{k+1} \right]} \left[ \left( \frac{r}{R_3} \right)^k - \left( \frac{R_3}{r} \right)^k \right]. \quad (4.28)$$

Аналогично определяем коэффициенты  $b_k$ ,  $a_0$ :

$$b_k = \Theta_k^* \tilde{b}_k, \quad \tilde{b}_k = -\frac{R_3}{k} \frac{1}{\chi \left[ \left( \frac{R_1}{R_3} \right)^{k-1} + \left( \frac{R_3}{R_1} \right)^{k+1} \right]} \left[ \left( \frac{r}{R_3} \right)^k - \left( \frac{R_3}{r} \right)^k \right] = \tilde{a}_k. \quad (4.29)$$

$$a_0 = \Theta_0 \tilde{a}_0, \quad \tilde{a}_0 = \frac{R_1}{\chi} \ln \frac{R_3}{r}. \quad (4.30)$$

Проводя тепловой расчет для трехмерного подшипника, описанного выше, получим среднюю мощность тепловыделения равную  $Q = 511,15$  Вт, а среднюю температуру в подшипнике  $T = 221,7$  К, что составляет  $58,7^\circ\text{C}$ . Из этого можно сделать вывод, что при данных параметрах, подшипник работает в нормальном температурном режиме.

#### 4.6 Самосогласованное стационарное решение

Применяем найденную функцию податливости для самосогласованного вычисления давления в смазочном слое методом итераций. При этом учитываются зависимость коэффициента вязкости от температуры и давления по закону Петрусевича:

$$\mu(P, T) = \mu_0 \exp(\alpha P - \Omega_0 T).$$

Уравнения для итерационной процедуры имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{(H^{(n)})^3}{\tilde{\mu}} \frac{\partial \tilde{P}^{(n+1)}}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[ \frac{(H^{(n)})^3}{\tilde{\mu}} \frac{\partial \tilde{P}^{(n+1)}}{\partial \tilde{y}} \right] = \frac{\partial H^{(n)}}{\partial \varphi} + \alpha \frac{(\tilde{P}^{(n+1)} - \tilde{P}^{(n)})}{\Delta t}, \quad (4.31)$$

$$H^{(n)} = 1 + \tilde{\eta} \cos(\varphi) + A_0 \int_0^{2\pi} \tilde{P}^{(n)}(\varphi') \tilde{K}(\varphi - \varphi') d\varphi, \quad \tilde{P}^{(n)} > 0;$$

$$\frac{\partial H^{(n)}}{\partial \varphi} = 0, \quad \tilde{P}^{(n)} \leq 0; \quad A_0 = 6K_0 \mu_0 R_1^2 \omega / d^3, \quad \mu^{(n)} = \mu_0 \tilde{\mu}(P^{(n)}, T^{(n)}),$$

$$Q = \frac{h^3}{12\mu} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{R_1^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{h} V^2,$$

$$\Theta_k^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q^{(n)} \cos(k\varphi) d\varphi, \quad \Theta_k^{*(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q^{(n)} \sin(k\varphi) d\varphi, \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad \Theta_0^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q^{(n)} d\varphi,$$

$$T^{(n)} = \Theta_0^{(n)} \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^N \left( \Theta_k^{(n)} \tilde{a}_k \cos(k\varphi) + \Theta_k^{*(n)} \tilde{b}_k \sin(k\varphi) \right) + T_0,$$

$$\tilde{a}_k = \tilde{b}_k = -\frac{R_3}{k} \frac{1}{\chi \left[ \left( \frac{R_1}{R_3} \right)^{k-1} + \left( \frac{R_3}{R_1} \right)^{k+1} \right]} \left[ \left( \frac{R_1}{R_3} \right)^k - \left( \frac{R_3}{R_1} \right)^k \right], \quad \tilde{a}_0 = \frac{R_1}{\chi} \ln \frac{R_3}{R_1}.$$

Безразмерный параметр  $A_0$  характеризует роль упругих деформаций поверхности. Формулы (4.31) обеспечивают сходимость численных итераций и позволяют получить самосогласованные распределения давления и прогиба поверхности, а так же учитывать изменения вязкости смазочного слоя в зависимости от рабочей температуры.

Результаты итерационных расчетов, показанные на рисунке 4.10 для центрального сечения ( $y=0$ ), соответствуют трем различным относительным эксцентриситетам вала подшипника:  $\tilde{\eta} = 0.8, 0.9, 0.95$ . При  $\tilde{\eta} = 0.95$  максимум давления подвержен довольно сильному влиянию упругих деформаций поверхности. В этом случае поверхностные деформации приводят к соответствующему уменьшению максимума давления примерно в полтора раза.

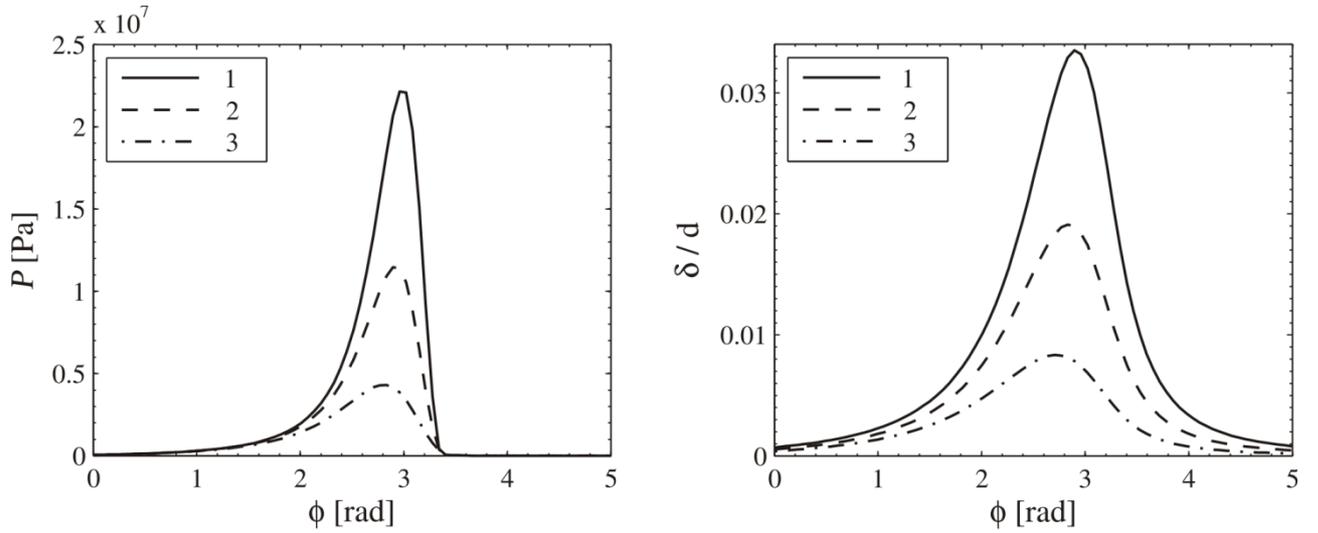


Рисунок 4.10 Самосогласованные профили давления и прогиба поверхности, соответствующие центральному поперечному сечению ( $y = 0$ ) для трех значений эксцентриситета: 0.95 (кривая 1), 0.9 (кривая 2) и 0.8 (кривая 3). Здесь  $\delta$  нормировано к  $d = R_1 - R_0$ .

#### 4.7 Программный комплекс расчета давления в смазочном слое

На основе итерационной схемы (4.31) создан программный комплекс, позволяющий вычислять распределения давления в смазочном слое подшипника скольжения конечной длины, при этом комплексно учитывать такие важные факторы, как деформация поверхностей под действием избыточного давления, шероховатость границ, частичное проскальзывание, переменная вязкость, зависящая от температуры и давления, скорость сближения границ и кавитация.

Алгоритм расчета давления представлен в виде конечно разностной схемы:

$$\frac{1}{\Delta\varphi^2} \left[ S_{i+1/2,j} P_{i+1,j}^{n+1/2} - (S_{i+1/2,j} + S_{i-1/2,j}) P_{i,j}^{n+1/2} + S_{i-1/2,j} P_{i-1,j}^{n+1/2} \right] + \frac{S_{i,j}}{\Delta y^2} (P_{i,j+1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j-1}^n) =$$

$$= \frac{\Gamma_{i+1}^n - \Gamma_{i-1}^n}{2\Delta\varphi} + \alpha \frac{P_{i,j}^{n+1/2} - P_{i,j}^n}{\Delta t},$$

$$\frac{S_{i,j}}{\Delta y^2} (\delta P_{i,j+1}^{n+1} - 2\delta P_{i,j}^{n+1} + \delta P_{i,j-1}^{n+1}) = \alpha \frac{\delta P_{i,j}^{n+1} - (P_{i,j}^{n+1/2} - P_{i,j}^n)}{\Delta t}, \quad P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \delta P_{i,j}^{n+1}, \quad (4.32)$$

$$S_{i,j} = \frac{H_{i,j}^2 [H_{i,j} (4k_1 + 4k_2 + H_{i,j}) + 12k_1 k_2]}{\tilde{\mu} (k_1 + k_2 + H_{i,j})}, \quad \Gamma_{i,j} = \frac{H_{i,j} (H_{i,j} + 2k_1)}{k_1 + k_2 + H_{i,j}}, \quad i = 1 \dots nx, \quad j = 1 \dots ny,$$

$$H_{i,j}^n = 1 - \tilde{\eta} \cos(\varphi_i) + d_{i,j}, \quad P > 0; \quad H_{i+1,j}^n - H_{i,j}^n = 0, \quad P \leq 0;$$

$$d_{i,j} = A_0 \sum_{k=1}^{Nx} P_{k,j}^n \tilde{K}(\varphi_i - \varphi_k) \Delta\varphi.$$

На основе распределения давления на каждом итерационном шаге выполняется расчет температуры  $T$  методом Фурье:

$$T_{i,j} = a_{0,j} + \sum_{k=1}^{NF} (a_{k,j} \cos(kx_i) + b_{k,j} \sin(kx_i)) + T_0, \quad (4.33)$$

где коэффициенты разложения  $a_k$ ,  $b_k$  вычисляются по формулам:

$$a_{k,j} = \Theta_{k,j} \tilde{a}_k, \quad b_{k,j} = \Theta_{k,j}^* \tilde{a}_k, \quad (4.34)$$

$$\tilde{a}_k = -\frac{R_3}{k} \frac{1}{\chi \left[ \left( \frac{R_1}{R_3} \right)^{k-1} + \left( \frac{R_3}{R_1} \right)^{k+1} \right]} \left[ \left( \frac{R_1}{R_3} \right)^k - \left( \frac{R_3}{R_1} \right)^k \right], \quad \tilde{a}_0 = \frac{R_1}{\chi} \ln \frac{R_3}{R_1}.$$

Множители  $\Theta_{k,j}$  и  $\Theta_{k,j}^*$  представляют собой коэффициенты Фурье разложения мощности тепловыделения  $Q$ , зависящей от градиентов давления:

$$\Theta_{k,j} = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{nx} Q_{i,j} \cos(kx_i) \Delta x, \quad \Theta_{k,j}^* = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{nx} Q_{i,j} \sin(kx_i) \Delta x, \quad 1 \leq k \leq NF,$$

$$Q_{i,j} = \bar{S}_{i,j} \left[ \frac{H_{i,j}^3}{\tilde{\mu}_{i,j}} \left( \left( \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j-1}}{2\Delta y} \right)^2 \right) + \frac{1}{H_{i,j}} \right], \quad \bar{S}_{i,j} = \frac{4\mu_0 R^2 \omega^2}{d_{i,j}}. \quad (4.35)$$

Для определения текущего прогиба поверхностей, зависящего от распределения давления, используется аналитическая аппроксимация функции податливости, учитывающая геометрические и механические свойства контактирующих поверхностей.

$$K(x) = 1.2 \left[ \frac{(R_2 - R_1)(1 + m_1)(1 - 2m_1)}{E_1(1 - m_1)} + \frac{(R_3 - R_2)(1 + m_2)(1 - 2m_2)}{E_2(1 - m_2)} \right] \left[ \frac{1}{1 + \gamma x^{\alpha'}} \right]^\beta, \quad (4.36)$$

где параметры  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – служат для корректировки аналитической функции податливости.

Блок-схемы программного комплекса и вспомогательных подпрограмм представлены на рисунках 4.11 и 4.12. Для расчета требуется задать параметры расчетной сетки, геометрические и механические параметры контактирующих

тел, динамические характеристики вала, вязкостно-температурные параметры масла и выбрать начальное распределение давления  $P$ , которое задано по умолчанию, либо задается вводом массива значений из файла.

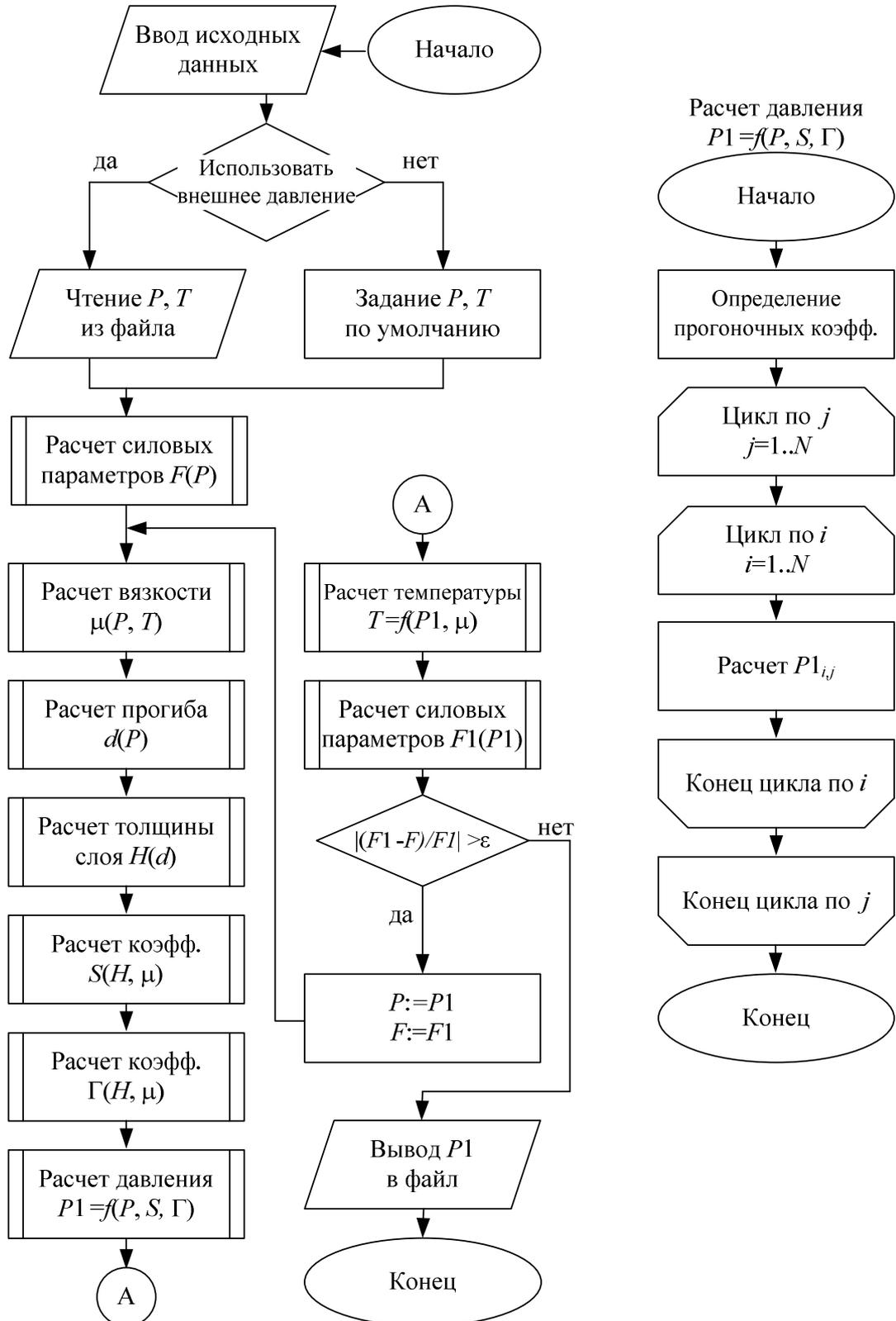


Рисунок 4.11 – Блок-схема программного комплекса.

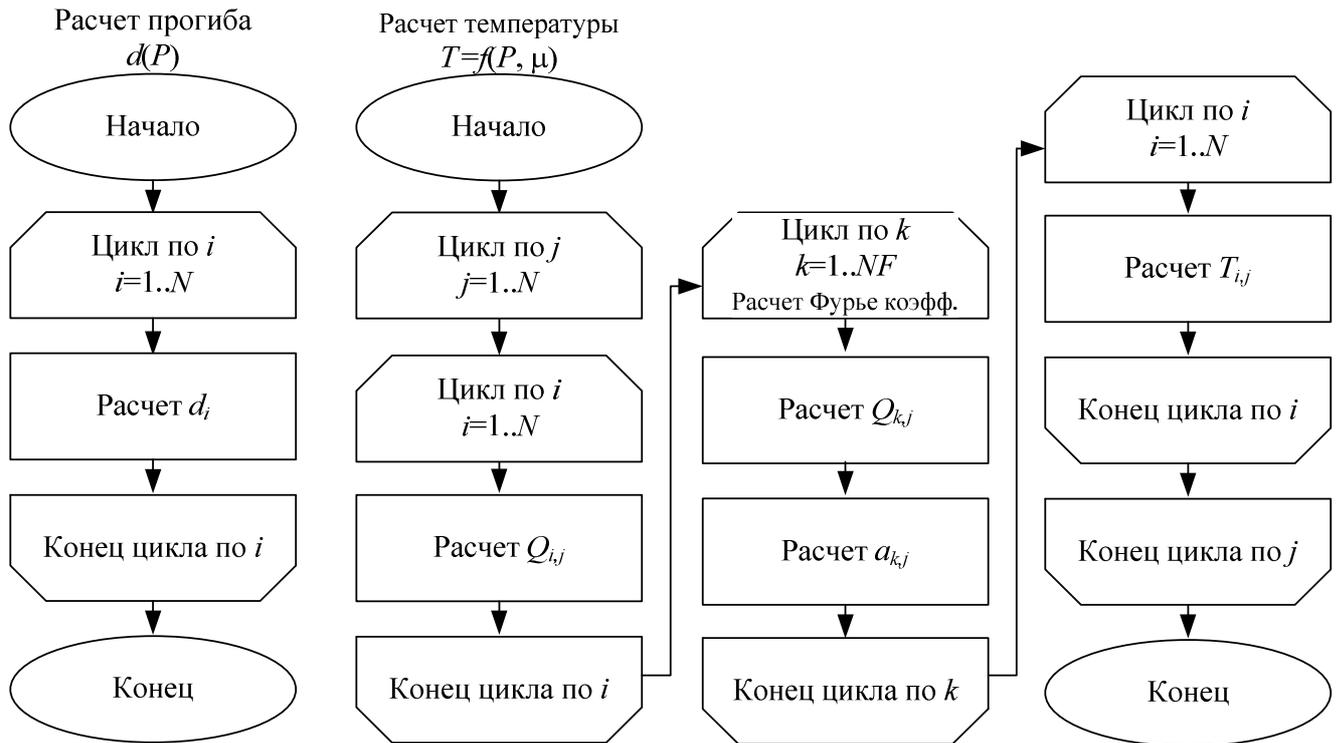


Рисунок 4.12 – Блок-схема вспомогательных подпрограмм.

Далее выполняется переход к основному итерационному циклу программы. Внутри итерационного цикла выполняется расчет давления  $P$  по неявной схеме методом переменных направлений с использованием скалярных прогонок. На основе нового распределения давления выполняется перерасчет температуры (подпрограмма  $T(P)$ ), вязкости (подпрограмма  $\mu(P, T)$ ) и прогиба (подпрограмма  $d(P)$ ). Толщина смазочного слоя определена с помощью функции  $H(d)$ . Функции  $S(H, \mu)$  и  $\Gamma(H, \mu)$  дают возможность учитывать как полное прилипание ( $k_{1,2} = 0$ ), так и частичное проскальзывание ( $0 < k_{1,2} < 1$ ) смазочного материала на поверхностях.

Затем выполняется расчет основных силовых показателей, таких как азимутальная и осевая компоненты несущей способности  $W_x$  и  $W_y$ , полная несущая способность  $W_{tot}$ , число Зоммерфельда  $Zommer$ , момент трения  $M_{tr}$ . После каждого итерационного шага проверяется критерий сходимости итераций. Итерации прекращаются при достижении достаточно малого относительного изменения  $W_{tot}$  на итерационном шаге:

$$\left| \frac{(W_{tot}^n - W_{tot}^{n-1})}{W_{tot}^n} \right| < \varepsilon.$$

По завершению всего итерационного цикла, все рассчитанные параметры сохраняются в файлы.

Интерфейс программы состоит из рабочего окна, в котором располагаются четыре кнопки «Parameters», «Run», «Results» и «Exit». Интерфейс программы представлен на рисунке 4.13.



Рисунок 4.13 – Интерфейс программы.

Кнопка «Parameters» открывает файл входных параметров (рисунок 4.14).

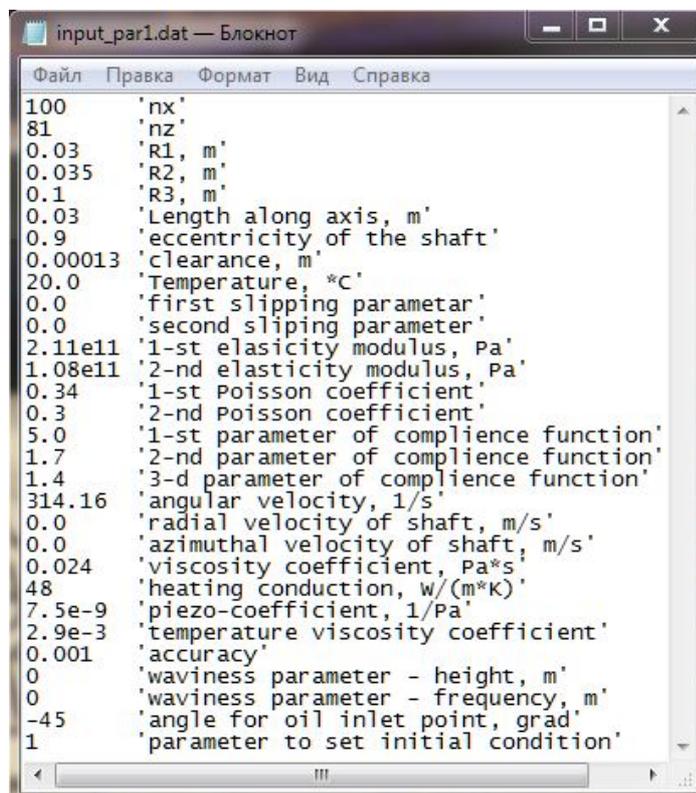


Рисунок 4.14 – Исходные данные.

В этом файле задаются параметры расчетной сетки (число точек по азимуту  $n_x$  и вдоль оси  $n_y$ ), геометрические параметры, смещение оси вала (eccentricity), температура внешней среды (temperature), два граничных параметра проскальзывания, модули упругости и коэффициенты Пуассона деформируемых тел, три параметра функции податливости, угловая скорость вращения вала, радиальная и азимутальная скорости смещения оси вала, динамический коэффициент вязкости, коэффициент теплопроводности материала, коэффициенты, характеризующие зависимость вязкости от давления (piezo-coefficient) и температуры (temperature viscosity coefficient), параметр допустимой погрешности (accuracy), параметры мелкомасштабной волнистости поверхности (waviness parameter), азимутальный угол, определяющий место подачи масла, и целочисленный параметр выбора начального распределения давления («0» – задается постоянное начальное давление внутри программы, «1» – считывается массив давления из файла).

Запуск программы инициируется кнопкой «Run». Через определенное число шагов итерации значения силовых показателей выводятся на экран. Порождаемое программой изображение на экране представлено на рисунке 4.15

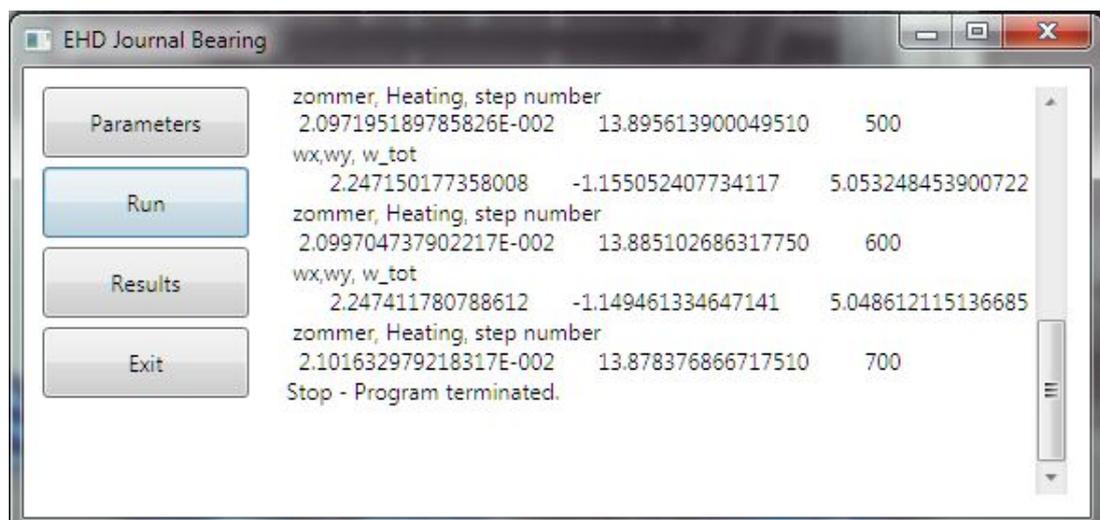


Рисунок 4.15 – Изображение порождаемое программой.

График сходимости итераций для двух значений эксцентриситета  $x_{lat}$  представлен на рисунке 4.16.

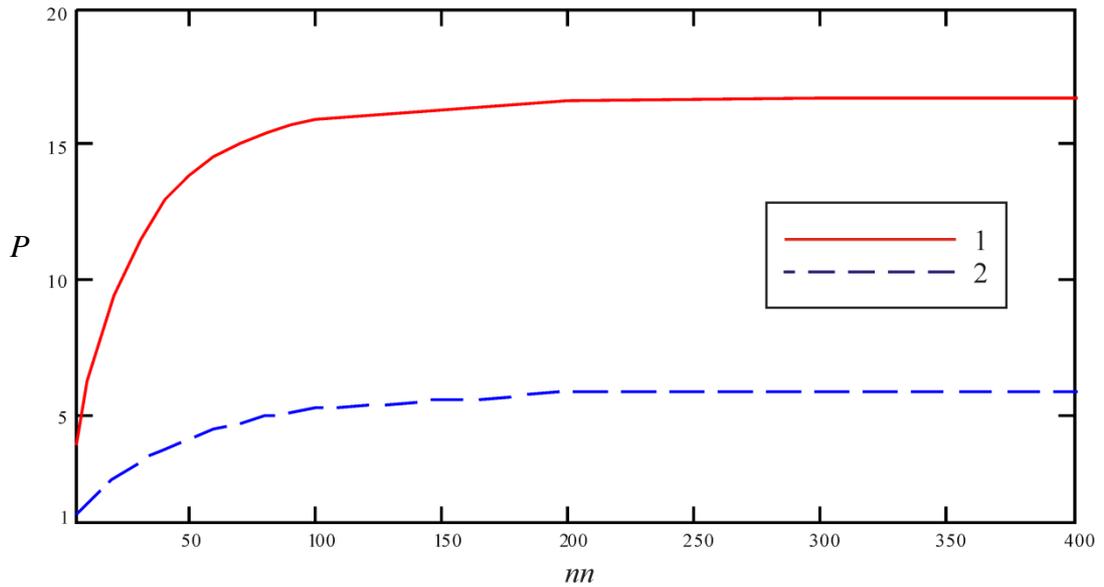


Рисунок 4.16 – Сходимость численных итераций;  
 1)  $xlam = 0.95$ ; 2)  $xlam = 0.9$ .

Рисунок 4.16 показывает, что даже при больших значениях эксцентриситета итерации сходятся довольно быстро, за 200 шагов.

Результаты расчета записываются в четыре текстовых файла показанных на рисунке 4.17, которые выводятся на экран после нажатия кнопки «Results».

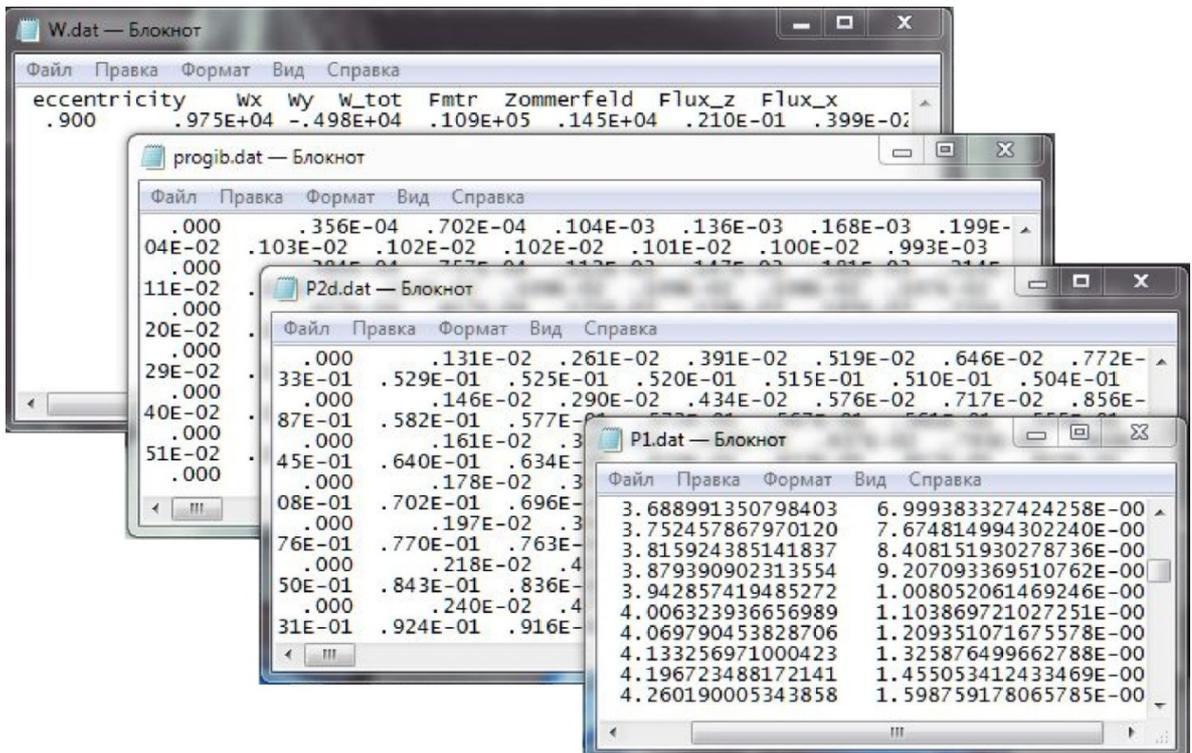


Рисунок 4.17 – Вывод на экран результатов расчетов.

«P2d.dat» – файл со значениями давления в узлах расчетной сетки, «P1.dat» – файл со значениями давления в центральном сечении, «Progib.dat» – файл со значениями прогиба в узлах расчетной сетки, «W.dat» – файл со значениями силовых параметров

Вычислительная часть программного комплекса написана на языке программирования «Fortran 77». Интерфейс разработан на платформе «Microsoft .NET Framework» с использованием языка «C#» (C Sharp) для операционных систем Windows 7/8/10. Данный программный комплекс зарегистрирован федеральной службой по интеллектуальной собственности (Роспатент) № 2017617187 от 30.06.2017.

Для тестирования данного программного комплекса проведены сравнения с опубликованными результатами других авторов для подшипника скольжения. Первое сравнение проведено с программным пакетом, основанном на методе конечных элементов и широко применяемым для расчета различных задач гидродинамики. Подробное изложение построения модели в пакете Comsol Multiphysics описано в работе [98]. Расчет выполнялся для следующих параметров:  $L = 0.125$  м,  $R_1 = 0.25$  м,  $\mu = 0.19$  Па·с, относительный эксцентриситет  $\tilde{\eta} = 0.5$ , скорость вращения вала 1000 об/мин.

На рисунке 4.18 представлены графики давления в смазочном слое, вычисленного с помощью описанного выше комплекса и пакета Comsol.

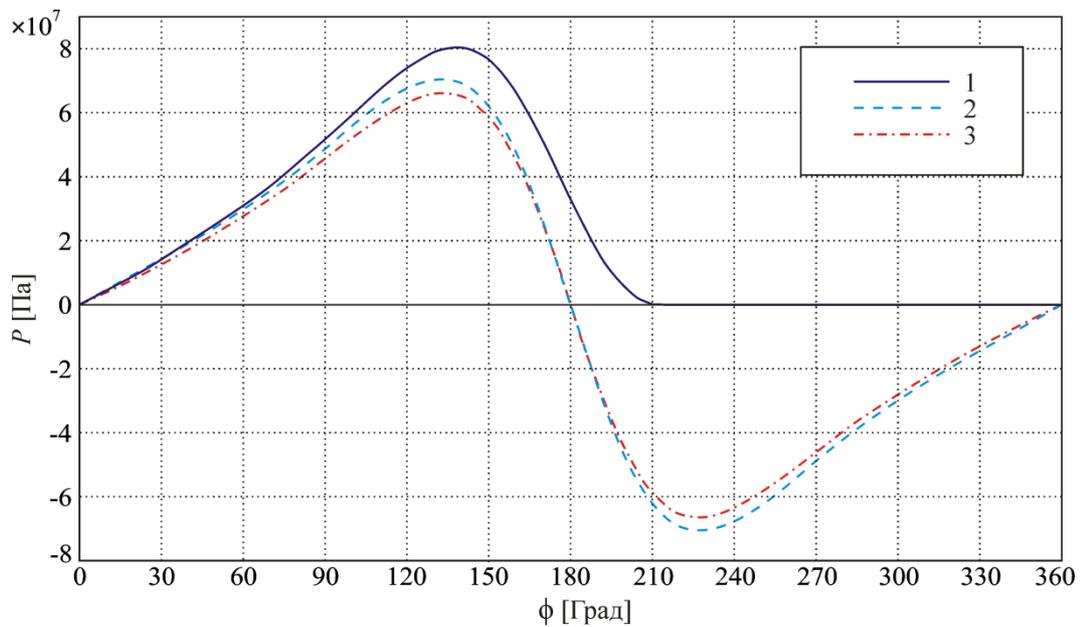


Рисунок 4.18 – Давление в смазочном слое подшипника скольжения;

1 – уравнения (4.7) учитывающее кавитационный эффект;

2 – уравнения (4.7) без учета кавитационного эффекта;

3 – моделирование в Comsol Multiphysics.

Рисунок 4.18 показывает, что при расчете давления в смазочном слое в пакете Comsol Multiphysics не учтен кавитационный эффект. Вследствие этого возникает область отрицательного давления (кривая 3), что приводит к снижению максимума давления на 17% по сравнению с расчетом, выполненным на основе описанного выше программного комплекса, учитывающего кавитационный эффект и исключающего отрицательные давления (кривая 1). В тоже время, решение, полученное с помощью данного комплекса при отключенном блоке кавитации (кривая 2), довольно близко совпадает с решением, полученным в программном пакете Comsol. В этом случае различие значений максимальных давлений в слое составляет 6%.

Кроме того, проводилось сравнение с расчетами, представленными в работах [80, 81]. В этих работах изложено численное моделирование гидродинамических подшипников скольжения на основе решения классического уравнения Рейнольдса методом Патанкара [97] при постоянной вязкости, фиксированной температуре и отсутствии деформаций поверхностей. Для

сравнения выбран важный параметр Зоммерфельда  $Z$ , который обратно пропорционально зависит от безразмерной несущей способности  $W'$ .

$$Z = \frac{1}{3\pi W'}, \quad (4.37)$$

$$W' = \iint \tilde{P} \cos \varphi d\varphi d\tilde{y}.$$

На основе описанного выше программного комплекса получено значение параметра Зоммерфельда 0.123, которое менее чем на 1% отличается от аналогичного значения, вычисленного в работах [80, 81],  $S = 0.121$ .

Описанные сравнения расчетов давления в смазочном слое обосновывают работоспособность предложенного выше вычислительного алгоритма и программного комплекса, позволяющего эффективно выполнять расчеты распределения давления в зоне упруго-гидродинамического контакта тел с хорошей точностью.

### **Выводы**

Предложен эффективный подход, позволяющий вычислить матрицу податливости на основе предварительного расчета давления в смазочном слое (без учета упругих деформаций) и использования программного пакета ANSYS для определения прогиба поверхности. Даже в случаях длинных подшипников скольжения для вычисления поверхностных деформаций следует предпочесть более реалистичную трехмерную модель пакета ANSYS, по сравнению с двухмерной моделью. Сравнение показывает, что двухмерная модель дает существенно завышенные значения прогиба поверхности. Для определения функции податливости, обеспечивающей связь давления и прогиба, применяется разложение Фурье. Для подавления шумовых осцилляций вводятся коррекции коэффициентов Фурье посредством множителей регуляризации, которые обеспечивают сглаживание искомой функции податливости. Оказалось, что найденные функции податливости, относящиеся к различным поперечным сечениям подшипника, мало отличаются друг от друга. Поэтому для экономии вычислений достаточно определить функцию податливости только для

центрального сечения подшипника. Важно отметить, что функция податливости, зависящая от конструктивных параметров подшипника, не зависит от распределения давления вдоль смазочного слоя. Поэтому функция податливости, найденная один раз для конкретного подшипника, может использоваться многократно в итерационной схеме совместно с уравнением Рейнольдса для самосогласованного моделирования различных динамических режимов подшипника скольжения. Предложенная итерационная процедура обеспечивает довольно быструю сходимость и показывает высокую эффективность при вычислении самосогласованных поверхностных деформаций и распределений давления в сильно нагруженных подшипниках скольжения.

### Список принятых обозначений

$E$  – модуль Юнга;

$g$  – регуляризационный множитель;

$H$  – безразмерная толщина смазочного слоя;

$h$  – толщина смазочного слоя;

$K(\varphi-\varphi')$  – функция податливости вкладыша;

$K_{an}$  – аппроксимированная функция податливости;

$m$  – коэффициент Пуассона;

$P$  – давление в смазочном слое;

$\tilde{P}$  – безразмерное давление;

$Q$  – мощность тепловыделения;

$T_0$  – температура окружающей среды;

$T$  – температура в смазочном слое;

$u$  – средняя скорость поверхностей вала и вкладыша;

$y$  – координата вдоль оси цилиндрического подшипника;

$\tilde{y}$  – безразмерная координата вдоль оси вращения вала;

$Z$  – параметр Зоммерфельда;

$\gamma$  – малый параметр, подбираемый для уменьшения паразитных осцилляций;

$\delta$  - радиальный прогиб поверхности вкладыша, зависящий от давления в смазочном слое;

$\tilde{\eta}$  – безразмерный эксцентриситет;

$\mu$  – динамическая вязкость;

$\mu_0$  – динамическая вязкость при нормальных условиях;

$\varphi$  – азимутальный угол;

$\chi$  – коэффициент теплопроводности.

## ГЛАВА 5. АПРОБАЦИЯ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА НА РЕАЛЬНОМ ОБЪЕКТЕ

### 5.1 Описание конструктивной схемы

Проведем расчет для реального узла, установленного на ОАО «РУСАЛ Красноярск» в цехе по производству анодной массы.

Анодная масса подается в печь посредством конвейерной ленты (рисунок 5.1), которая приводится в движение двигателем АИР180S4 через редуктор Ц2У-250-31,5-21. Подшипники в этом редукторе являются объектом нашего исследования.

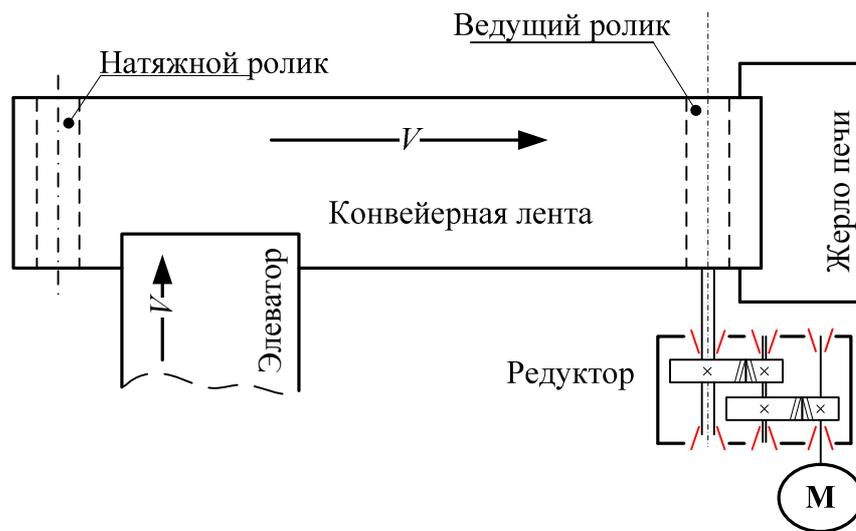


Рисунок 5.1 – Схема транспортной ленты.

На данном производстве применяется двухступенчатый редуктор Ц2У-250-31.5-21 с цилиндрическими косозубыми передачами (рисунки 5.2 и 5.3). Межосевое расстояние выходной ступени – 250 мм, передаточное соотношение редуктора  $U = 31.5$ , вариант сборки -21, КПД  $\eta = 0.97$ .

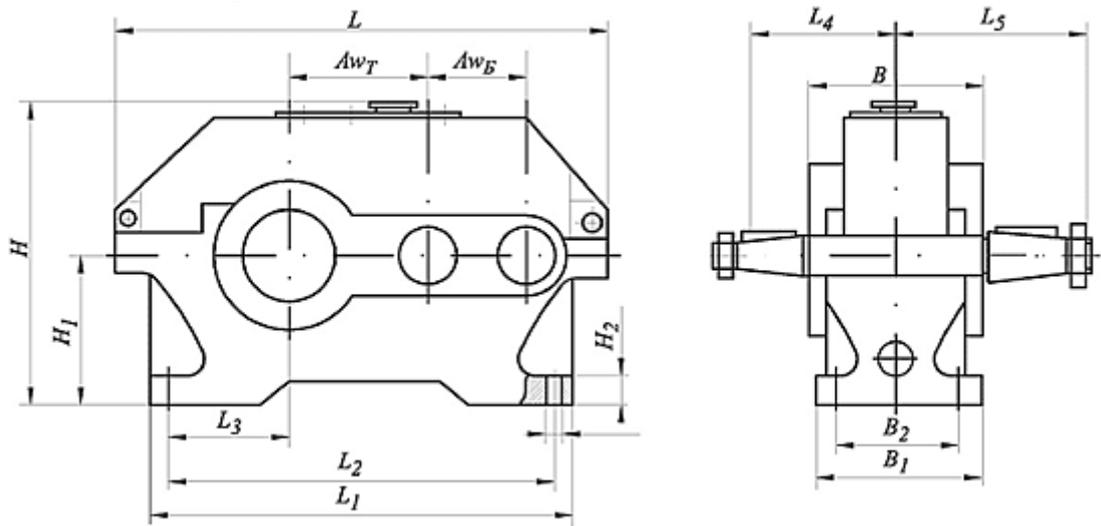


Рисунок 5.2 – Схема редуктора.

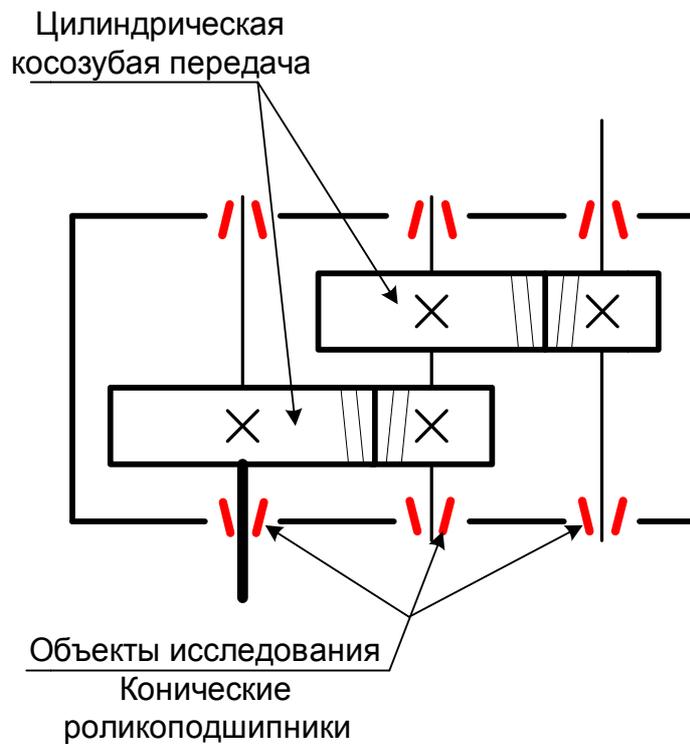


Рисунок 5.3 – Схема расположения передач.

На рисунке 5.4 представлена схема контакта ролика в подшипнике с дорожкой качения.

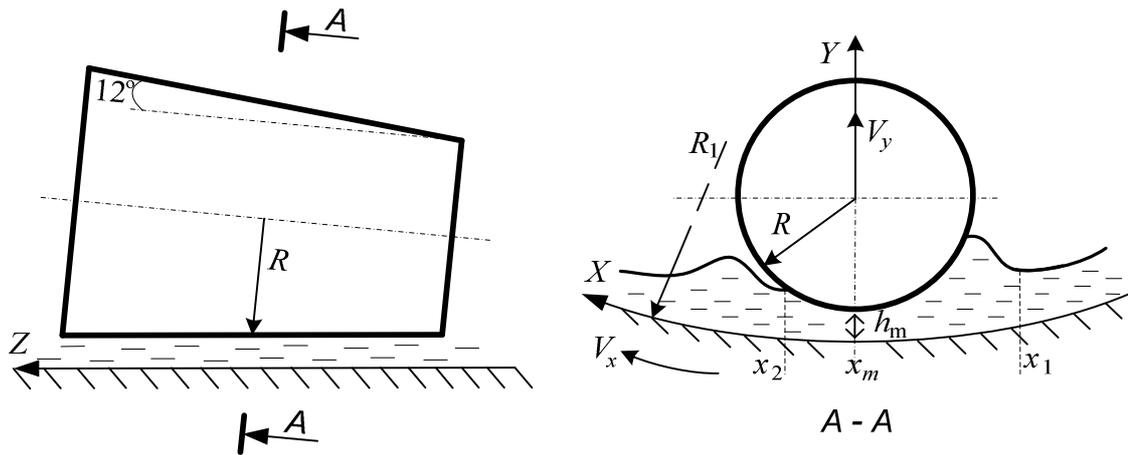


Рисунок 5.4 – Контактная схема ролика с дорожкой качения.

## 5.2 Расчет силовых показателей в передачах

Габаритные параметры:

$A_{wT} = 250$  мм;  $A_{wB} = 160$  мм;  $L = 829$  мм;  $B = 290$  мм;  $L_4 = 265$  мм;  $L_5 = 335$  мм;

Технические параметры первой ступени, цилиндрической косозубой:

Передаточное число  $U_1 = 5$ ; число зубьев шестерни и ведомого колеса  $J_1 = 27$ ,  $J_2 = 133$ ; делительные диаметры шестерни и колеса  $d_1 = 54$ ,  $d_2 = 266$  мм.

Технические параметры второй ступени, цилиндрической косозубой:

Передаточное число  $U_2 = 6.3$ ; число зубьев шестерни и ведомого колеса  $J_1 = 27$ ,  $J_2 = 173$ ; делительные диаметры шестерни и колеса  $d_1 = 67.5$ ,  $d_2 = 432.5$  мм.

Характеристики масла, залитого в редуктор: ИРП – 150, динамический коэффициент вязкости  $\mu = 0.14$  Па·с, пьезокоэффициент вязкости  $\alpha = 1.4 \cdot 10^{-8}$  Па<sup>-1</sup>.

Используется двигатель АИР180S4 мощностью 22кВт и частотой вращения вала 1460 об/мин.

Для определения осевых нагрузок на валах выполняем кинематический расчет редуктора. Сначала вычисляем крутящий момент на входном валу

$$M_{крвх} = \frac{M_{крвых}}{U \cdot \eta} = \frac{5000}{31,5 \cdot 0,97} = 163.6 \text{ Н/м},$$

где  $M_{вых}$  – предельно допустимый крутящий момент на выходном валу (из спецификации редуктора). Далее находим мощность на входном валу

$$W_{P1} = \omega_1 M_{вх} = 20.548 \text{ кВт},$$

а также мощность на промежуточном валу

$$W_{P2} = W_{P1} \eta_2 = 20.24 \text{ кВт},$$

где  $\eta_2 = 0,985$  – КПД второго вала. Затем вычисляем крутящий момент на промежуточном валу:

$$M_{KP2} = \frac{W_{P2}}{\omega_2} = \frac{W_{P2}}{U_1 / \omega_1} = 793.8 \text{ Н/м}.$$

Параметры выходного вала не определяем, так как из-за малой угловой скорости в подшипниках на этом валу не будет наблюдаться гидродинамический режим трения.

На рисунке 5.5 представлена схема сил, действующих на валы

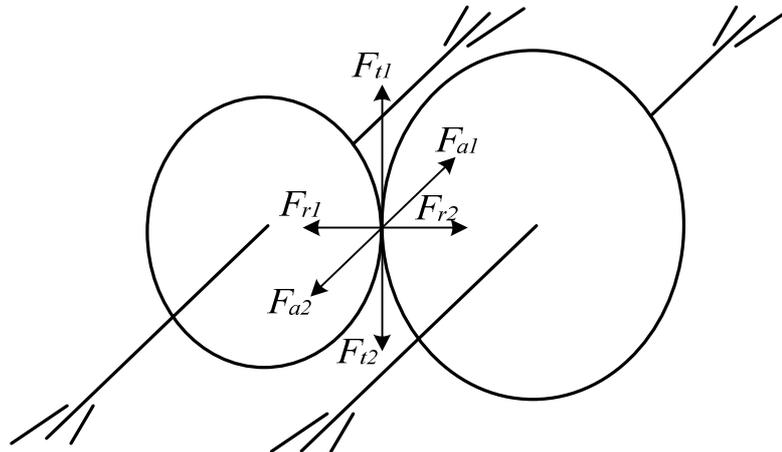


Рисунок 5.5. – Схема сил в зацеплении косозубой цилиндрической передаче.

Нагрузки действующий на первый вал от косозубой шестерни:

Окружная сила:

$$F_{t1} = \frac{2 M_{KPex}}{d_1} = \frac{2 \cdot 163.6}{54 \cdot 10^{-3}} = 6059 \text{ Н}.$$

Радиальная сила:

$$F_{r1} = F_{t1} \cdot \tan \alpha / \cos \beta = 6059 \cdot \tan(20) / \cos(12) = 2254 \text{ Н},$$

где  $\alpha$  – угол зацепления зубчатой передачи ( $\sim 20^\circ$ ),  $\beta$  – угол наклона зуба передачи ( $12^\circ$ ).

Осевая сила:

$$F_{a1} = F_{t1} \cdot \tan\beta = 6059 \cdot \tan(12) = 1288 \text{ Н.}$$

Определим силы, действующие на промежуточный вал, на котором располагаются косозубые шестерня второй ступени и ведомое колесо первой ступени:

Силы, возникающие на шестерне:

$$F_{t1} = \frac{2 M_{KP2}}{d_1} = \frac{2 \cdot 793.8}{67.5 \cdot 10^{-3}} = 23520 \text{ Н,}$$

$$F_{r1} = F_{t1} \cdot \operatorname{tg}\alpha / \cos\beta = 23520 \cdot \tan(20) / \cos(12) = 8751 \text{ Н,}$$

$$F_{a1} = F_{t1} \cdot \tan\beta = 23520 \cdot \tan(12) = 4998 \text{ Н.}$$

Силы, возникающие на ведомом колесе:

$$F_{t2} = \frac{2 M_{KP2}}{d_2} = \frac{2 \cdot 793.8}{266 \cdot 10^{-3}} = 5968 \text{ Н,}$$

$$F_{r2} = F_{t2} \cdot \operatorname{tg}\alpha / \cos\beta = 5968 \cdot \tan(20) / \cos(12) = 2221 \text{ Н,}$$

$$F_{a2} = F_{t2} \cdot \tan\beta = 5968 \cdot \tan(12) = 1268 \text{ Н.}$$

Далее определяем реакции в подшипниках качения. Составим схему расположения радиальных и осевых сил для входного вала (рисунок 5.6).

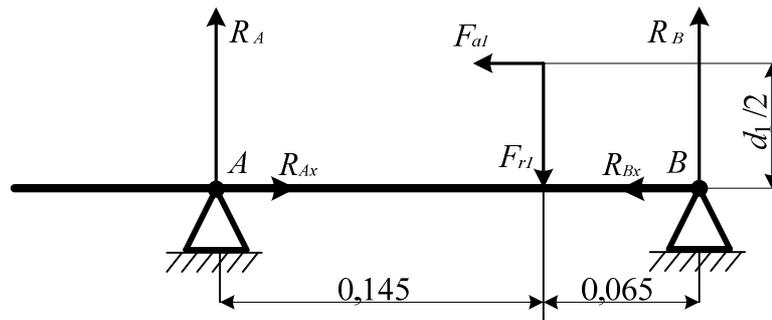


Рисунок 5.6 – Схема расположения сил на входном валу.

Из рисунка 5.6 следует:

$$R_A = \frac{F_{r1} \cdot 0.065 + F_{a1} \cdot 0.5 d_1}{0.21} = \frac{2254 \cdot 0.065 + 1288 \cdot 0.5 \cdot 54 \cdot 10^{-3}}{0.21} = 1029 \text{ Н,}$$

$$R_B = \frac{F_{r1} \cdot 0.145 - F_{a1} \cdot 0.5 d_1}{0.21} = \frac{2254 \cdot 0.145 - 1288 \cdot 0.5 \cdot 54 \cdot 10^{-3}}{0.21} = 1226 \text{ Н,}$$

$$R_{Ax} = -R_{Bx} = 0.5F_{a1} = 643.8 \text{ Н.}$$

Определим полную нагрузку на ролики подшипника с учетом их наклона  $12^\circ$  к горизонтальной оси.

$$F_A = R_A \cdot \cos \alpha + R_{Ax} \sin \alpha = 977.67 \text{ Н,}$$

$$F_B = R_B \cdot \cos \alpha - R_{Bx} \sin \alpha = 1227 \text{ Н.}$$

Составим схему расположения сил действующих на промежуточный вал и определим реакции в подшипниках (рисунок 5.7).

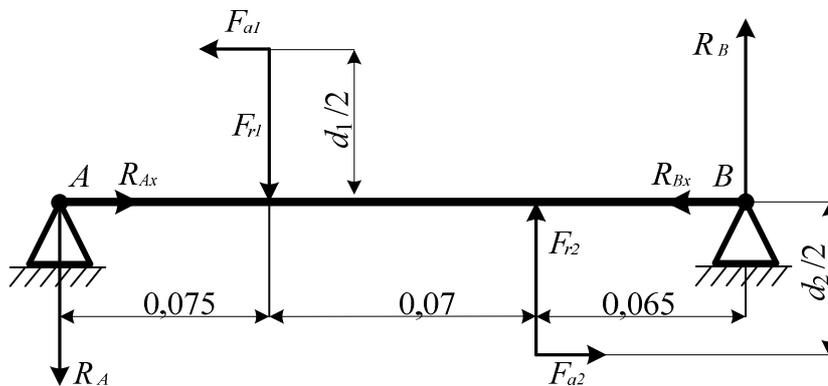


Рисунок 5.7 – Схема расположения сил на промежуточном валу.

Из рисунка 5.7 следует:

$$R_A = \frac{F_{r2} \cdot 0.065 - F_{r1} \cdot 0.135 - F_{a1} \cdot 0.5d_1 - F_{a2} \cdot 0.5d_2}{0.21} = -6545 \text{ Н,}$$

$$R_B = \frac{F_{r1} \cdot 0.075 - F_{r2} \cdot 0.065 - F_{a1} \cdot 0.5d_1 - F_{a2} \cdot 0.5d_2}{0.21} = -14.36 \text{ Н,}$$

$$R_{Ax} = -R_{Bx} = 0.5(F_{a1} - F_{a2}) = 1865 \text{ Н.}$$

где:  $d_1 = 67.5$ ,  $d_2 = 266$  мм.

Важно отметить, что для определения реакции, действующей на дорожку качения, необходимо учесть осевую силу, действующую на вал от косозубой передачи:

$$F_A = R_A \cdot \cos \alpha + R_{Ax} \sin \alpha = 6787 \text{ Н,}$$

$$F_B = R_B \cdot \cos \alpha - R_{Bx} \sin \alpha = 372 \text{ Н.}$$

Найденные реакции в подшипниках обусловлены несущей способностью в смазочном слое.

### 5.3 Исследование работы подшипников в установившемся режиме

Зная реакцию связей в подшипниках, рассмотрим их условия работы. На входном валу располагаются конические роликподшипники серии 7608 (32308) с габаритными параметрами ролика 11.4/12.8x22.8 мм. Рассмотрим контактное взаимодействие ролика и дорожки качения с учетом гидродинамической смазки. Реакция смазочного слоя однозначно связана с толщиной масляной пленки в области контактного взаимодействия. Для установления связи несущей способности с величиной минимального зазора в области контакта применяем разработанную методику.

С помощью уравнения (3.28) находим предварительное распределение давления в смазочном слое для заданной нагрузки  $F = 1217$  Н и следующих числовых параметров  $h_m = 0.00002225$  м,  $\mu = 0.14$  Па·с,  $V = 5.08$  м/с,  $R = 0.0062$  м,  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па (модуль упругости),  $m = 0.29$  (коэффициент Пуассона),  $\alpha = 1.4 \cdot 10^{-8}$  1/Па (пьезокоэффициент вязкости).

Используя найденное предварительное распределение давления в смазочном слое, с помощью пакета ANSYS определяем упругие деформации дорожки качения и на их основе с помощью уравнения (3.36) находим функцию податливости, которую используем для итерационного расчета давления в смазочном слое (3.38). Результаты расчета установившегося давления представлены на рисунке 5.8.

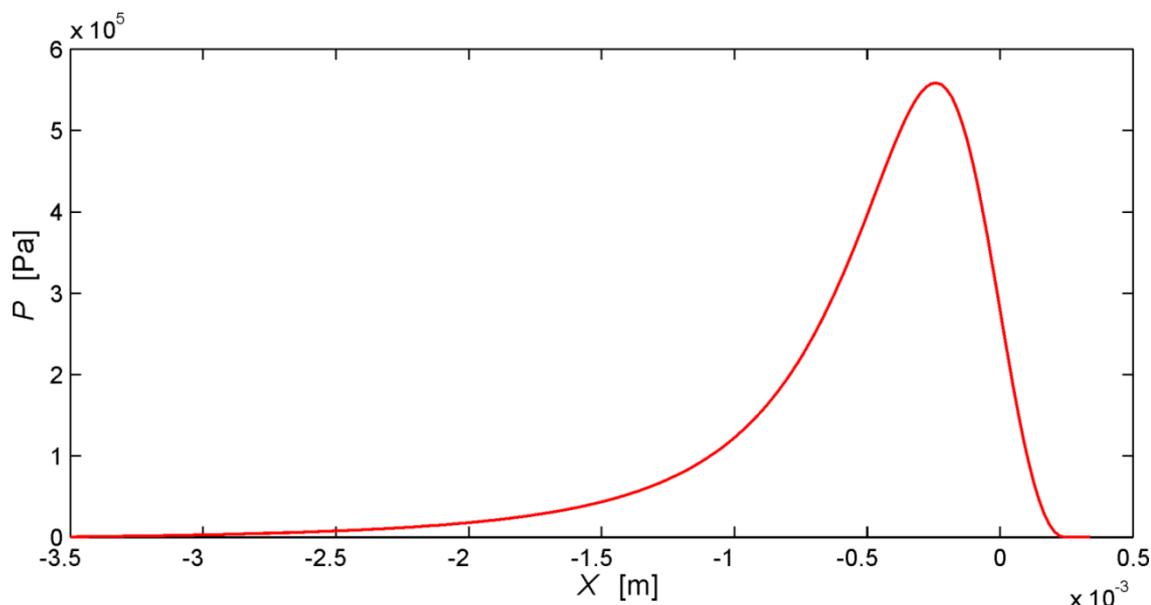


Рисунок 5.8 – Установившееся распределение давления в смазочном слое.

Расчет показывает, что разница предварительного давления и давления в установившемся режиме составляет менее 1%. При этом максимальный прогиб дорожки качения в установившемся режиме составляет  $2.72 \cdot 10^{-9}$  м, что на несколько порядков меньше величины минимального зазора при данной работе подшипника и не дает особого эффекта снижения давления в итерационном расчете. Так же установлено, что при данном режиме работы влияние пьезоэффекта мало ощутимо. Из выше написанного можно сделать вывод, что даже при самом тяжелом режиме работы редуктора, установленного спецификацией, подшипники на входном валу работают в достаточно легком для них режиме эксплуатации и имеют огромный запас ресурса.

Далее рассмотрим работу подшипников на промежуточном валу. На втором валу располагаются конические роликоподшипники серии 7611 (32311) с габаритными параметрами ролика 13.65/15.7x33.5 мм. Рассмотрим контактное взаимодействие ролика и дорожки качения с учетом гидродинамической смазки.

С помощью уравнения (3.28) находим предварительно распределение давления в смазочном слое для нагрузки  $F = 6787$  Н и следующих числовых параметров  $h_m = 0.000000972$  м,  $\mu = 0.14$  Па·с,  $V = 1.05$  м/с,  $R = 0.0075$  м,  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па,  $m = 0.29$ ,  $\alpha = 1.4 \cdot 10^{-8}$  1/Па.

Используя найденное распределение давления в смазочном слое, с помощью пакета ANSYS определяем упругие деформации дорожки качения ( $\delta_{\max} = 1.82 \cdot 10^{-8}$  м) и далее с помощью уравнения (3.36) находим функцию податливости (рисунок 5.9), которую используем для итерационного расчета давления в смазочном слое с помощью уравнения (3.38). Результаты расчета давления в установившемся режиме представлены на рисунке 5.10.

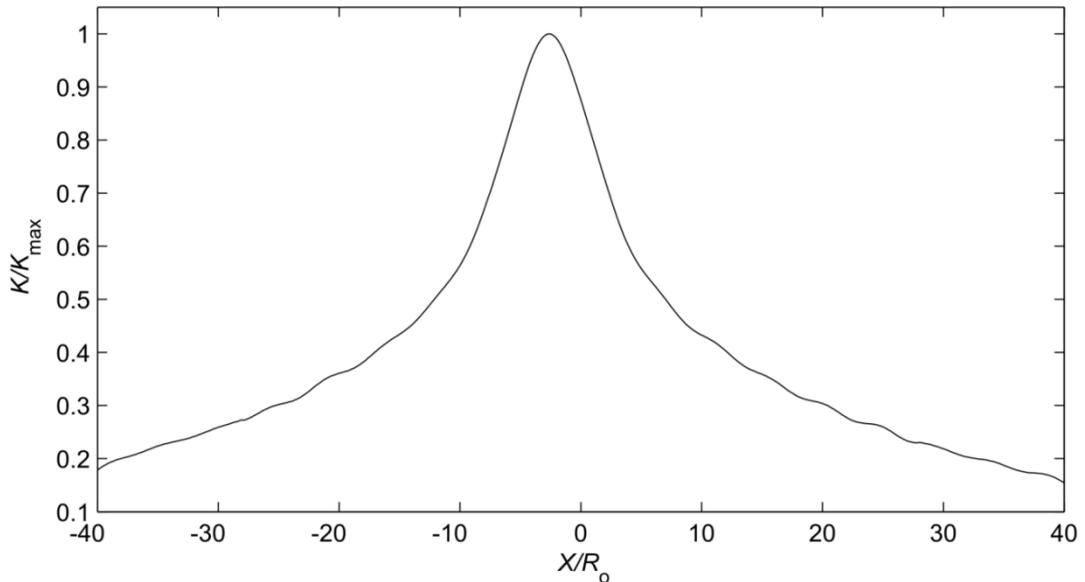


Рисунок 5.9 – Функция податливости для подшипника серии 7611.  $K_{\max} = 7.664 \cdot 10^7$

16

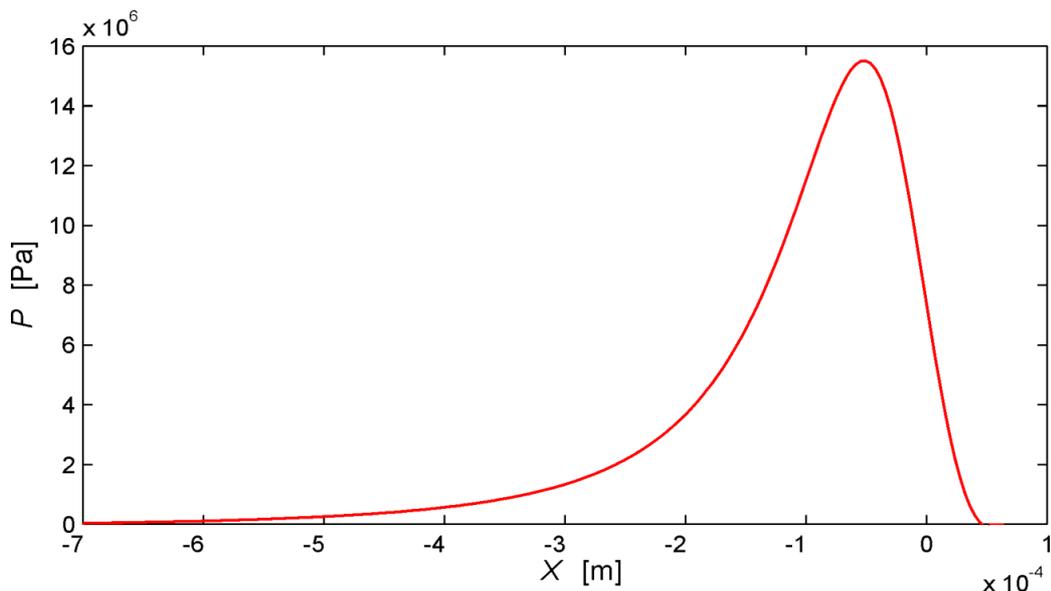


Рисунок 5.10 – Установившееся распределение давления в смазочном слое.

Из представленных выше расчетов можно сделать вывод, что подшипники на втором валу нагружены на порядок сильнее, чем на входящем, но в тоже время в стационарном случае они работают в довольно щадящем режиме.

#### 5.4 Исследование работы подшипников в условиях ударных нагрузок

Теперь рассмотрим нестационарный режим работы подшипников на промежуточном валу в периоды пуска или остановки, а так же при возникновении вибраций от падающего кокса на транспортную ленту. При такой работе подшипников возможны изменения зазоров между контактирующими телами, а следовательно - возникновение вертикальных скоростей, которые очень сильно влияют на распределение давления в смазочном слое.

Для этого запишем уравнения динамики для движения ролика:

$$M \frac{d^2 h_m}{dt^2} = W(h_m, \dot{h}) - F, \quad (5.1)$$

где  $M$  – масса ролика,  $F$  – внешняя нагрузка,  $W(h_m, \dot{h})$  – полная несущая способность смазочного слоя, равная:

$$W(h_m, \dot{h}) = \int_a^c P(x, h_m, \dot{h}) dx, \quad (5.2)$$

где  $P$  – распределение давления в смазочном слое.

$$P(x, h_m, \dot{h}) = 6\mu_0 \omega q(x, h_m, \dot{h}) R^{1.5} / h_m^{1.5}. \quad (5.3)$$

При этом распределение давления в смазочном слое (5.3) уточняется через итерационную схему, учитывающую влияние пьезокоэффициента вязкости и прогиба поверхности:

$$q(x, h_m, \dot{h}) = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{1}{1 - \alpha q^*(x, h_m, \dot{h})} \right), \quad (5.4)$$

$$q^*(x, h_m, \dot{h}) = \int_{-\infty}^x \frac{H(x', h_m) - H(c, h_m)}{H(x', h_m)} dx' - \frac{2\dot{h}}{\omega \sqrt{h_m R}} \int_{-\infty}^x \frac{(c - x')}{H^3(x', h_m)} dx',$$

$$H(x, h_m) = 1 + x^2 / 2 + \delta(x, h_m),$$

$$\delta(x, h_m) = \frac{6\mu_0 \omega R^2}{h_m} \int_{-\infty}^c q(x') K(\sqrt{h_m R}(x - x')) dx',$$

$$h_m = h_0(t),$$

где:  $\delta$  – прогиб поверхности,  $\omega$  – угловая скорость вращения ролика,  $\alpha$  – пьезокоэффициент вязкости,  $\mu_0$  – динамическая вязкость масла при рабочем режиме,  $R$  – радиус в сечении центра массы ролика.

$$R = R_{\max} \left(1 - \frac{L_c}{L}\right) + R_{\min} \frac{L_c}{L}, \quad L_c = \frac{L(R_{\max}^2 + 2R_{\max}R_{\min} + 3R_{\min}^2)}{4(R_{\max} + R_{\max}R_{\min} + R_{\min})}, \quad (5.5)$$

где:  $L$  – длина ролика,  $L_c$  – расстояние от основания «основания» ролика до центра массы,  $R_{\max}$  и  $R_{\min}$  – максимальный и минимальный радиусы конического ролика.

Далее выполняем расчеты для фиксированных значений минимальных зазоров  $h_m$  с различными вертикальными скоростями  $\dot{h}$ . В результате получаем массив самосогласованных значений несущей способности  $W(h_m, \dot{h})$ , из которых выделяем следующие зависимости:

$$W(h_m, \dot{h}) = W_0(h_m) - \lambda(h_m) \frac{dh_m}{dt}, \quad (5.6)$$

где:  $\lambda$  – коэффициент демпфирования для различных значений минимального зазора, определяемый как тангенс угла наклона касательной к кривой, выражающей зависимость несущей способности  $W$  от нормальной скорости (подробнее в главе 3). Используя рассчитанный для различных значений  $h_m$  массив значений  $\lambda$ , и применяя сплайновую интерполяцию, определяем функцию  $\lambda(h_m)$ , показанную на рисунке 5.11.  $W_0(h_m)$  – несущая способность в смазочном слое при нулевой вертикальной скорости  $dh_m/dt = 0$  (рисунок 5.12).

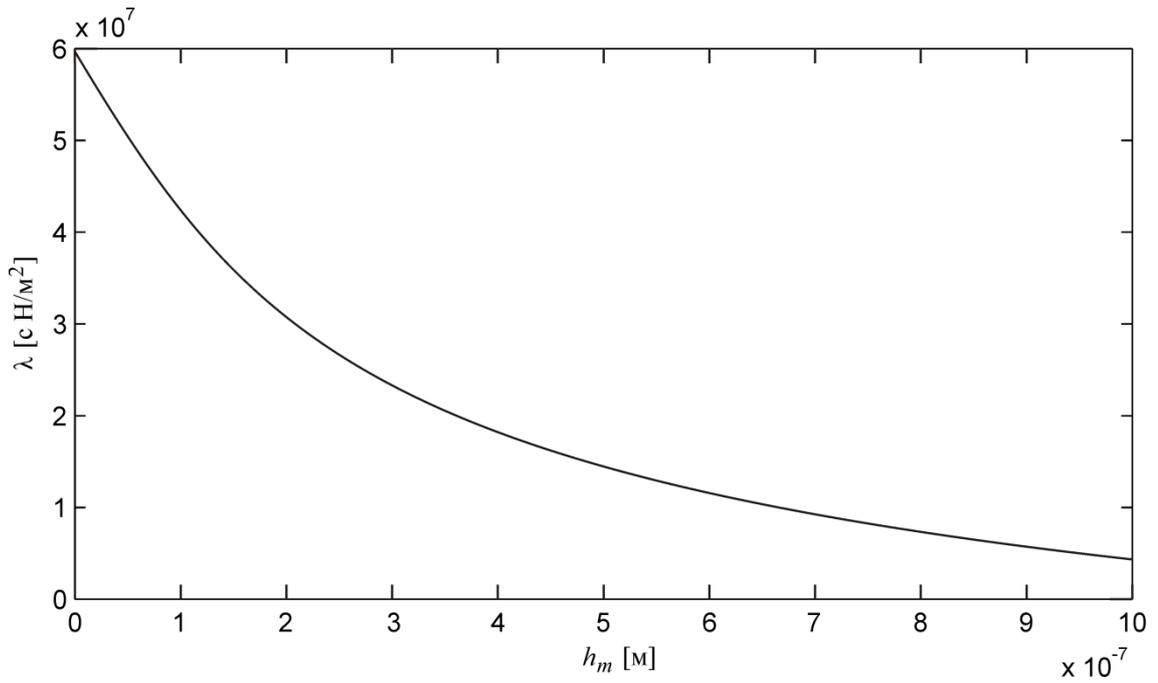


Рисунок 5.11 – Зависимость коэффициента демпфирования  $\lambda$  от зазора в смазочном слое  $h_m$ .

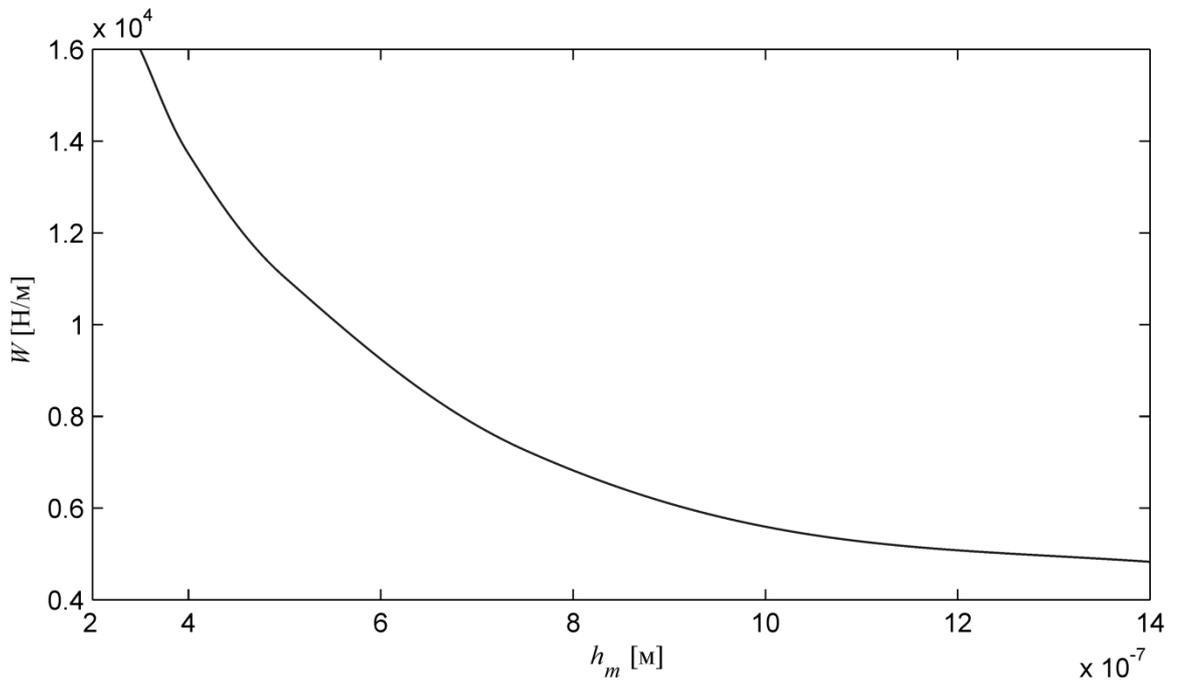


Рисунок 5.12 – Зависимость несущей способности  $W$  от зазора в смазочном слое  $h_m$ .

С учетом (5.6) уравнение (5.1) принимает следующий вид:

$$M \frac{d^2 h_m}{dt^2} + \lambda(h_m) \frac{dh_m}{dt} - W_0(h_m) = -F, \quad (5.7)$$

Решая численно уравнение (5.7), получаем зависимость изменения зазора в смазочном слое от времени (рисунок 5.13), а также изменение пика давления от времени (рисунок 5.14а).

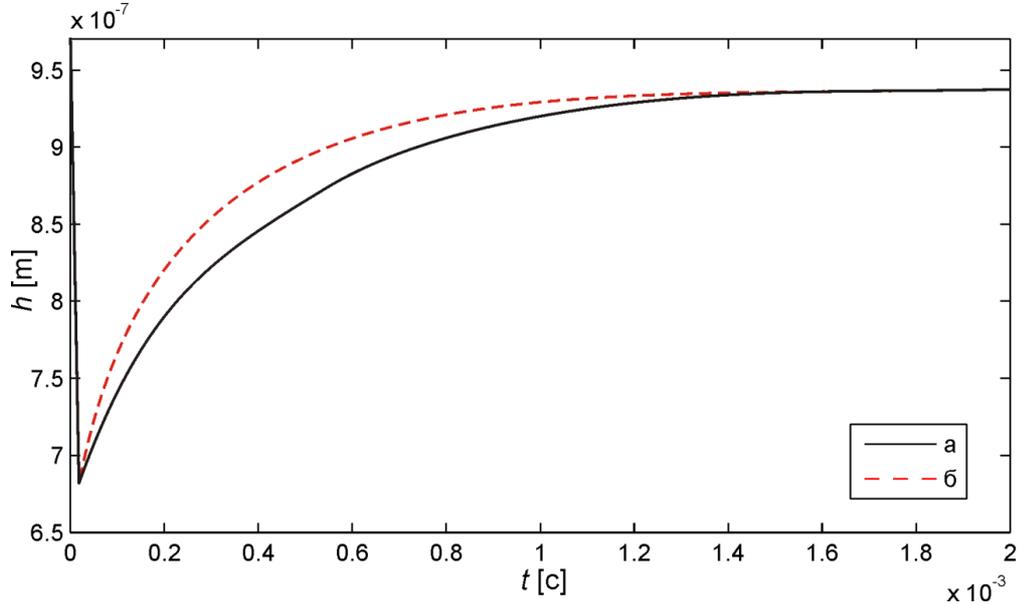


Рисунок 5.13 – Зависимость зазора в смазочном слое от времени;  
а – численное решение, учитывающее пьезоэффект и прогиб поверхности;  
б – аналитическое решение без учета пьезоэффекта и прогиба.

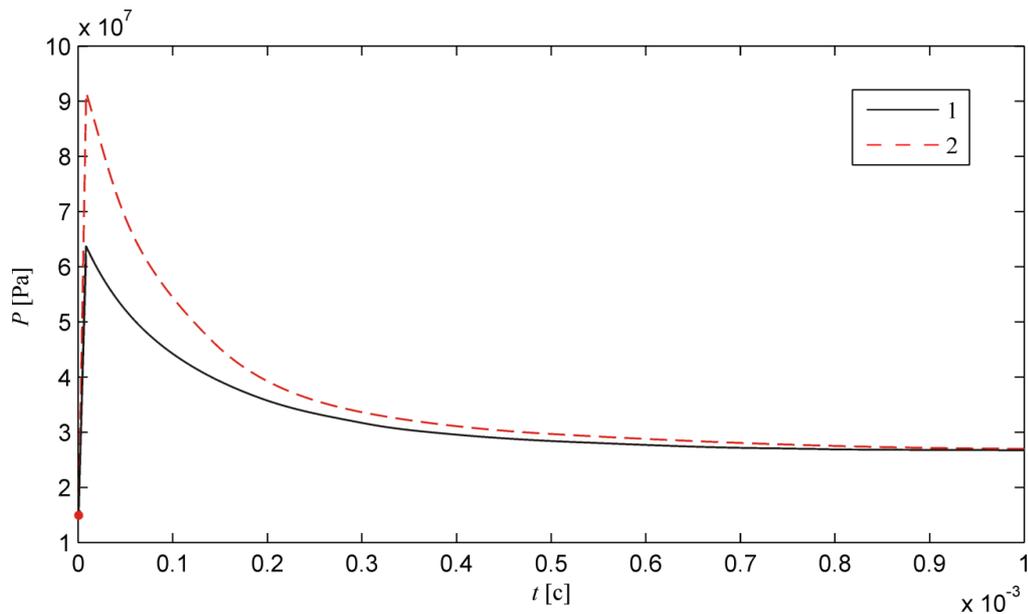


Рисунок 5.14 – Зависимость максимального давления в слое от времени;  
1 – численное решение, учитывающее пьезоэффект и прогиб поверхности;  
2 – аналитическое решение без учета пьезоэффекта и прогиба.

На рисунке 5.14 показано падение максимального давления после пикового значения, достигаемого в начальной стадии в течение короткого интервала времени. В целом изменение максимального давления во времени характеризуется двумя временными параметрами. Первый временной параметр, характеризующий внезапный резкий скачок давления, имеет порядок  $1.414 \cdot 10^{-5}$  с. Второй временной параметр, характеризующий плавное снижение пика давления до равновесного значения, равен  $2.243 \cdot 10^{-4}$  с.

В идеальном случае при отсутствии деформаций и постоянном коэффициенте вязкости решение может быть получено в аналитическом виде. При этом компоненты уравнения (5.6) с помощью нормировок (3.12) можно записать в следующем виде:

$$W = W_0' \frac{6\mu VR}{h_m} - W_1' \frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}} V_y, \quad (5.8)$$

где  $V_y = dh_m/dt$ .

Здесь первое слагаемое выражает зависимость стационарной несущей способности от зазора при нулевой нормальной скорости, а второе слагаемое учитывает влияние нормальной скорости. Коэффициент перед скоростью будем называть коэффициентом демпфирования  $\lambda$ :

$$\lambda = W_1' \frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}}, \quad (5.9)$$

где постоянные коэффициенты  $W_0'$  и  $W_1'$  равны 0.401 и 1.125, соответственно.

С учетом (5.9) уравнение движения ролика по нормали (5.7) примет следующий вид:

$$M \frac{d^2 h_m}{dt^2} + W_1' \frac{6\mu R^{3/2}}{h_m^{3/2}} \frac{dh_m}{dt} - W_0' \frac{6\mu VR}{h_m} = -F, \quad (5.10)$$

Определяем равновесное значение зазора  $h_0 = 0.000000648$ . Принимая  $h_0$  в качестве базового зазора, вводим безразмерные переменные:

$$h_m = h' h_0, \quad t = t' t_0, \quad t_0 = \frac{W_1' \sqrt{R h_0}}{V W_0'} = 1.936 \cdot 10^{-4}. \quad (5.11)$$

Используя нормировки (5.11), приводим уравнение динамики к безразмерному виду:

$$\varepsilon \ddot{h}' + \frac{1}{h'^{3/2}} \dot{h}' - \frac{1}{h'} + 1 = 0, \quad (5.12)$$

$$\varepsilon = \frac{MV^2 W_0'^2}{W_1'^2 FR} = 0.9 \cdot 10^{-5}.$$

Уравнение (5.12) определяет зависимость зазора от времени в процессе установления стационарного режима. Характерное время переходного процесса характеризуется параметром  $t_0$ . При решении использовались следующие параметры ролика:  $M = 0.045$  Кг,  $R = 0.0075$  м,  $F = 10180$  Н,  $V = 1.05$  м/с.

Так как параметр при старшей производной является малым, то уравнение называется «жестким» и может приближенно представлено в виде асимптотического разложения по сингулярному малому параметру [24]:

$$h' = \bar{h}(t', \varepsilon) + \tilde{h}(\tau, \varepsilon), \quad \tau = t' / \varepsilon,$$

где первое слагаемое

$$\bar{h}(t', \varepsilon) = \bar{h}_0(t') + \varepsilon \bar{h}_1(t') + \dots + \varepsilon^k \bar{h}_k(t') + \dots$$

является регулярной частью асимптотики, а второе слагаемое

$$\tilde{h}(\tau, \varepsilon) = \tilde{h}_0(\tau) + \varepsilon \tilde{h}_1(\tau) + \dots + \varepsilon^k \tilde{h}_k(\tau) + \dots$$

представляет собой сингулярную часть асимптотики, называемой также в литературе погранслошной асимптотикой.

Решая уравнение (5.12) сравним аналитическое решение без учета пьезокоэффициента вязкости и численное решение с учетом изменения вязкостных параметров (рисунок 5.14). Подробное решение уравнения (5.12) изложено в главе 3.

Из рисунка 5.14 видно, что аналитическое решение на первой трети временного отрезка дает завышенный результат, но в дальнейшем сходится с решением, учитывающим пьезоэффект и влияние прогиба. Это говорит о том, что аналитическое решение можно использовать для предварительной оценки давления в смазочном слое.

Так же были проведены расчеты с различными сортами масел с целью выбора наиболее оптимального. Критерием выбора масла служит коэффициент пикового давления, который равен отношению максимального давления в нестационарном режиме к максимальному давлению в смазочном слое в установившемся режиме.

Таблица 5.1

Максимальные давления в смазочном слое при разных сортах масла ( $h=0.000000972$  м).

Сорт масла	ИРП-75	ИРП-150	ИТД-220
Максимальное давление в стационарном режиме, $10^7$ Па	0.655	1.52	2.18
Максимальное давление в нестационарном режиме, $10^7$ Па	3.03	9.2	8.085
Коэффициент пикового давления	4.656	6.05	3.708

Как видно из таблицы 5.1, оптимальным маслом для данного режима работы редуктора является ИТД-220. Более вязкий смазочный слой при заданном зазоре обеспечивает более высокую несущую способность. Однако, в тоже время он имеет более высокий коэффициент демпфирования, что при нестационарных режимах снижает вертикальную скорость, тем самым ослабляя эффект колебаний.

### Список принятых обозначений

$d$  – Делительный диаметр;

$F_a$  – Осевая сила;

$F_r$  – Радиальная сила;

$F_t$  – Окружная сила;

$h_m$  – Минимальный зазор в смазочном слое;

$\dot{h}$  – Вертикальная скорость;

$M_{KP}$  – Крутящий момент на валу;

$M$  – Масса ролика;

$J$  – Число зубьев шестерни/колеса;

$L$  – Длина ролика;

$L_c$  – Расстояние от основания «основания» ролика до центра массы;

$P$  – Давление в смазочном слое;

$q$  – Безразмерное давление в смазочном слое;

$q^*$  – Безразмерное давление учитывающие пьезокоэффициент и прогиб поверхности;

$R_{A,B}$  – Реакции опор;

$R_c$  – Радиус в центре массы ролика;

$R_{\max}$  и  $R_{\min}$  – Максимальный и минимальный радиусы конического ролика;

$U$  – Передаточное число;

$W$  – Мощность;

$W_0$  – Несущая способность смазочного слоя;

$\delta$  – Прогиб поверхности;

$v$  – Безразмерная вертикальная скорость;

$\eta$  – КПД;

$\lambda$  – Коэффициент демпфирования;

$\mu_0$  – Базовая динамическая вязкость масла;

$\omega$  – Угловая скорость.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ключевым элементом разработанной математической модели упруго-гидродинамического контакта в узлах трения является функция податливости, зависящей только от геометрических характеристик и упругих свойств контактирующих материалов. Для корректного расчета функции податливости вводится регуляризирующий оператор для сглаживания паразитных осцилляций, связанных с погрешностями в данных.

Использование функции податливости позволяет расщепить исходную сложную задачу упруго-гидродинамического контактного взаимодействия на составные части, которые можно решать отдельно. Это дает возможность существенно снизить вычислительные затраты, связанные с решением задачи.

Так как функция податливости зависит только от конструктивных параметров подшипника и не зависит от распределения давления вдоль смазочного слоя, то она может использоваться многократно в нестационарных задачах совместно с уравнением Рейнольдса для самосогласованного моделирования различных динамических режимов в узле трения.

Функции податливости, относящиеся к различным поперечным сечениям подшипника, мало отличаются друг от друга. Поэтому достаточно определить функцию податливости только для центрального сечения подшипника.

Построено асимптотическое аналитическое решение задачи нестационарного контактного взаимодействия ролика с твердой поверхностью при наличии смазочного слоя.

Релаксация давления в ходе нестационарного переходного процесса определяется коэффициентом демпфирования смазочного слоя, который находится из решения квазистационарной задачи с использованием функции податливости. Нестационарные уравнения переходного процесса в зоне контакта, содержащие функцию несущей способности и коэффициент демпфирования,

являются «жесткими» и содержат сингулярные малые параметры, характеризующие «быстрые» и «медленные» стадии релаксации давления.

На быстрой стадии происходит кратковременный резкий рост максимума давления сразу после скачка нагрузки, в то время как на медленной стадии идет процесс плавной релаксации давления к новому стационарному значению, соответствующему возросшему значению нагрузки. Полученные результаты обосновывают важность учета нестационарных переходных процессов в узлах трения.

Величина нестационарного пика давления существенно определяется конкурирующим влиянием факторов пьезоэффекта вязкости и прогиба поверхности. На основе численного моделирования определено критическое значение пьезокоэффициента вязкости, при котором влияние пьезоэффекта вязкости компенсируется влиянием деформации упругой поверхности.

Разработана конечно-разностная итерационная схема расчета упруго-гидродинамического контакта с учетом деформации контактирующих поверхностей, эффекта кавитации, переменной вязкости слоя зависящей от давления и температуры.

На основе разработанной модели создан программный комплекс, позволяющий эффективно вычислять самосогласованные распределения давления в смазочном слое с учетом деформаций контактирующих поверхностей и переменной вязкости, зависящей от термодинамических параметров.

**Список использованных источников**

1. Александров В.М. Асимптотическое решение интегральных уравнений типа свертки с логарифмической особенностью трансформанты ядра и приложение в задачах механики / В.М. Александров, М.А. Сумбатьян // Изв. АН СССР, Механика твердого тела, – 1980, – № 2, – С. 80-88.
2. Александров В.М. Контактные задачи в машиностроении / В. М. Александров, Б. Л. Ромалис. – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.
3. Александров В.М. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел / В.М. Александров, Д. А. Пожарский. – М.: Факториал, 1998. – 288 с.
4. Александров В.М. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости / В. М. Александров, М. И. Чебаков. – М.: Физматлит, 2004. – 301 с.
5. Анфёров О.Ю. Об асимптотике одного сингулярного двойного интеграла по узкой области / О. Ю. Анфёров, А. И. Беспорточный, М. А. Галахов // В кн.: Труды XII научной конференции молодых учёных и специалистов МФТИ. – М.: МФТИ, 1987. № 6380 –В87.
6. Анфёров О.Ю., Беспорточный А.И., Галахов М.А. изнашивание и смазывание узлов трения: учебное пособие для слушателей заоч. Курсов повышения квалификации инженеров–конструкторов в машиностроении / О. Ю. Анфёров, А. И. Беспорточный, М. А. Галахов. – М.: Машиностроение, 1989. – 72 с.
7. Аргатов И.И. Асимптотические модели упругого контакта / И. И. Аргатов – СПб.: Наука, 2005. – 447 с.
8. Басов К. А. ANSYS: справочник пользователя / К. А. Басов. – М.: ДМК Пресс, 2005. 640 с.
9. Беспорточный А.И., Галахов М.А. Математическое моделирование в триботехнике: учебное пособие / А. И. Беспорточный, М. А. Галахов. – М.: МФТИ, 1991. – 88 с.

10. Беспорточный А.И. Режимы смазки контакта цилиндра с упругим покрытием и жесткого полупространства / А. И. Беспорточный // Научный вестник МГТУ ГА. – 2011. – №163. – С. 138-143.
11. Беспорточный А.И. Асимптотические режимы гидродинамического контакта жестких цилиндров, покрытых тонкими упругими слоями / А. И. Беспорточный // Труды МФТИ. – 2011. – Т. 3, № 1. – С. 28-34.
12. Беспорточный А.И. Контакт упругих цилиндров при наличии смазки: асимптотические режимы / А. И. Беспорточный // Аэромеханика и летательная техника // Труды 54 научной конференции МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». – М.: МФТИ, – 2011. – С. 84-85.
13. Беспорточный А.И. Об асимптотических режимах гидродинамической смазки упругих цилиндров / А. И. Беспорточный // Механика и процессы управления. Том 1 // Материалы XXXXI Всероссийского симпозиума. – М.: РАН, 2011. – С. 187-193.
14. Беспорточный А.И. Об асимптотических режимах гидродинамической смазки упругих роликов / А. И. Беспорточный // Материалы XXIII научно-технической конференции по аэродинамике. – М.: ЦАГИ, 2012. – С. 36-37.
15. Беспорточный А.И. Об асимптотических режимах упругогидродинамической смазки эллиптических контактов / А. И. Беспорточный // Аэрофизика и космические исследования // Труды 55 научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе». – М.: Долгопрудный-Жуковский. – 2012. – Т. 1. — С. 83-84.
16. Беспорточный А.И. Гидродинамическое нанесение покрытий по принципу ленточного подшипника / А. И. Беспорточный // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 1. С. 65-77.
17. Беспорточный А.И. Асимптотические режимы гидродинамического контакта упругого цилиндра и жесткого полупространства / А. И. Беспорточный // Труды МФТИ. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 4-12.

18. Беспорточный А. И. Асимптотические методы в контактной гидродинамике : дис. канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Беспорточный Александр Иванович. – М., 2014. – 225 с.
19. Бурмистров А.Н. Аналитические и численные методы расчета давления в узких контактах / А. Н. Бурмистров. – М., 1987. – Деп. в ВИНТИ от 25.08.87, № 6216.
20. Бурмистров А.Н. О давлении вытянутого штампа на упругое полупространство / А. Н. Бурмистров // Трение и износ, – 1988. – Т. 9, № 3. – С. 454-462.
21. Бурмистров А.Н. Контактная задача теории упругости для узких областей / А. Н. Бурмистров // ПМТФ, – 1988. – Т. 29, № 5. – С. 149-157.
22. Буяновский, И.А. Граничная смазка – эффект сэра Уильяма Бейта Харди / И.А. Буяновский, З.В. Игнатьева, В.А. Левченко, В.Н. Матвеевко // Трение и смазка в машинах и механизмах. – 2009. – № 12. – С. 35–46.
23. Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной / А. Б. Васильева // М.: УМН. – 1963. 18. № 3. – С. 15-86.
24. Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М.: Высш. Шк., 1990. – 207 с.
25. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М.: Наука, 1990. – 208 с.
26. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л. А. Галин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 304 с.
27. Галахов М.А. Распределение давления в контакте профилированного ролика с кольцом подшипника / М.А. Галахов, Я. Ш. Флакман // Изв. вузов. Машиностроение, 1978. – № 2.
28. Галахов М.А. Прикладные задачи теории смазки и механики контакта / М.А. Галахов, В. П. Ковалев, Ю. А. Лапин, Е. Д. Терентьев // В кн.: Сообщения по прикладной математике // – М.: ВЦ АН СССР, 1982. – 66 с.

29. Галахов М.А. Математические модели контактной гидродинамики / М. А. Галахов, П. Б. Гусятников, А. П. Новиков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 296 с.
30. Галахов М.А. Расчет подшипниковых узлов / М. А. Галахов, А. Н. Бурмисторов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
31. Галахов М.А. Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения / М. А. Галахов, П. П. Усов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1990. – 280 с.
32. Гаркунов, Д.Н. Триботехника (конструирование, изготовление и эксплуатация машин) / Д. Н. Гаркунов. – М.: Изд-во МСХА, 2002. – 632 с.
33. Грубин А.Н. Основы гидродинамической теории смазки тяжело нагруженных цилиндрических поверхностей / А. Н. Грубин // – М.: Труды ЦНИИТМАШ, 1949, – № 30, с. 126-184.
34. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия: Пер. с англ. / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
35. Дроздов, Ю.Н. Прикладная трибология (трение, износ, смазка в технических системах) / Ю.Н. Дроздов, Е. Григорович, А.И. Белов. – М.: Эко-Пресс, 2010.
36. Жидков А. В. Применение системы ANSYS к решению задач геометрического и конечно-элементного моделирования: Учебно-методический материал / А. В. Жидков. – Нижний Новгород, 2006. 115 с.
37. Жуковский Н.Е. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником / Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин // –М.: Полн. собр. соч. – 1937. – Т. 4, – С. 279-298.
38. Задорожная, Е.А. Влияние микрополярных свойств масел на динамику сложнагруженных подшипников скольжения / Е.А. Задорожная, В.Г. Караваев, И.Г. Леванов, А.В. Чеснов // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2009. – № 3 (19). – С. 329–337.
39. Задорожная, Е.А. Лабораторное оборудование для испытаний различных фрикционных, антифрикционных и смазочных материалов на трение и износ / Е.А. Задорожная, И.Г. Леванов, С.А. Пырьев // Проблемы и перспективы развития евроазиатских транспортных систем // Материалы пятой Международной научно-

практической конференции. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. – 2013. – С. 125–127.

40. Задорожная, Е.А. Оценка теплового состояния сложнонагруженного подшипника с учетом реологических свойств смазочного материала / Е.А. Задорожная, В.Г. Караваев // Двигатели внутреннего сгорания // Все-украинский научно-исследовательский журнал. – Харьков : Изд-во «Харьковский Политехнический Институт», 2012. – № 2. – С. 66–73.

41. Захаров, С.М. Гидродинамическая теория смазки / С.М. Захаров // В сб. : Современная трибология. Итоги и перспективы / под ред. К.В. Фролова. – М. : Изд-во ЛКИ, 2008. – С. 95–157.

42. Иванов В.А. Анализ упругих деформаций в подшипнике скольжения / В. А. Иванов, Н. В. Еркаев // М: РАЕ, Фундаментальные исследования. – 2015.– № 6, ч.2., – Стр. 241-245.

43. Иванов В.А. Моделирование нестационарного контакта в подшипнике качения / В. А. Иванов, Н. В. Еркаев // Красноярск: Вестник СибГАУ. – 2015.– Том 16, № 3. – Стр. 580-586.

44. Иванов В.А. Нестационарные колебания ролика, контактирующего с твердой поверхностью, при наличии смазочного слоя / В. А. Иванов, Н. В. Еркаев // Красноярск: Вестник СибГАУ. – 2017. – Том 18, № 1. – Стр. 50-57.

45. Капица П. Л. Гидродинамическая теория смазки при качении / П. Л. Капица – СПб.: Журнал тех. физики, – 1955. – Т. 25, № 4, – С. 747-762.

46. Калун А. Б. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство / Калун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.

47. Коднир Д. С. Контактная гидродинамика смазка деталей машин / Д. С. Коднир – М.: Машиностроение, 1976. – 304 с.

48. Коднир Д.С. Эластогидродинамический расчет деталей машин / Д. С. Коднир, Е. П. Жильников, Ю. И. Байдородов. – М.: Машиностроение, 1988. – 160 с.

49. Ковалев В.П. Асимптотическое решение контактно-гидродинамической задачи о смазке упругих цилиндров / В. П. Ковалев, А. Н. Бурмистров, М. А. Галахов // Машиноведение. –1982. – № 5. – С. 104-110.

50. Коровчинский, М.В. Прикладная теория подшипников жидкостного трения / М.В. Коровчинский. – М.: Машгиз, 1954.
51. Крагельский, И.В. Коэффициенты трения / И.В. Крагельский, И.Э. Виноградова. – М.: Машгиз, 1962. – 220 с.
52. Кудиш И.И. Упругогидродинамическая задача для тяжело нагруженного контакта качения / И. И. Кудиш // Известия АН Арм. ССР: – Механика. – 1978. – Т. 31, № 1. – С. 65-78.
53. Кудиш И.И. Асимптотический анализ плоской неизотермической упругогидродинамической задачи для тяжело нагруженного контакта качения / И. И. Кудиш // Известия АН Арм. ССР: Механика. – 1978. – Т. 31, № 6.
54. Кэннел. Сравнение расчетных и измеренных осевых распределений давления между цилиндрами / Кэннел // Проблемы трения и смазки. – 1974. – Т. 96, № 3. – С. 231-237.
55. Ландау Л. Д. Теория упругости: учеб. Пособие / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
56. Левандовский В.А. Применение гидродинамической теории смазки для прогнозирования характеристик ротационных гидравлических гасителей колебаний / В. А. Левандовский, В. И. Нестеренко, В. П. Гундарь // – Северодонецк. Вестник СНУ им. В. Даля. – 2011. – Т.1, № 4 (158). – С. 95-100.
57. Лецбензон Л.С. Гидродинамическая теория смазки / Л. С. Лецбензон. – М., 1934. – 576 с.
58. Любимов А. К. Применение системы ANSYS к решению задач механики сплошной среды : Практическое руководство / А. К. Любимов. – Нижний Новгород: изд-во Нижегородского госуниверситета, 2006. – 227 с.
59. Майзикович С. М. Механика контактных взаимодействий / С.М. Майзикович, В.М. Александров, И.И. Аргатов и др.; Под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. – М.: Физматлит, 2001. – 670 с.
60. Нарышкин В. Н. Подшипники качения: Справочник-каталог / В. Н. Нарышкин, Р. В. Коросташевский. – М.: Машиностроение, 1984. – 280 с.

61. Петров Н.П. Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости / Н. П. Петров. – СПб.: Инженерный журнал, 1883. – № 1.
62. Петров Н.П. Гидродинамическая теория смазки. Избранные работы / Н. П. Петров. – М.: АН СССР, 1948.
63. Петрусеви́ч А.И. Основные выводы из контактно-гидродинамической теории смазки / А. И. Петрусеви́ч // Изв. АН СССР. ОТН. – 1951. – № 2. – С. 209-224.
64. Смирнов, Е.М., Автомодельное решение уравнений Навье – Стокса для закрученного течения жидкости в круглой трубе / Е.М. Смирнов // ПММ. – Т. 45. – Вып. 5. – С. 833–839.
65. Терентьев, В. Ф. Трибонадежность подшипниковых узлов в присутствии модифицированных смазочных композиций / В. Ф. Терентьев, Н. В. Еркаев, С. Г. Докшанин. – Новосибирск: Наука, 2003. – 142 с.
66. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры /А. Н. Тихонов // М.: Матем. сб. – 1952. – Т. 31 (73), № 3. – С. 575-586.
67. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А. Н Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
68. Херребрух К. Решение с помощью интегрального уравнения задачи упругогидродинамической теории несжимаемой смазки при постоянной температуре / К. Херребрух // Проблемы трения и смазки. – 1968. – № 4.
69. Чигаев А.В. ANSYS для инженеров: Справ. пособие / Чигаев А.В., Крайчук А.С., Смалюк А.Ф. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 512 с.
70. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – М.: ГИТТЛ, 1949.
71. Штаерман И.Я. К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел / И. Я. Штаерман // АН СССР. – 1939. – Т. 25, № 5. – С. 360-362.
72. Эртель А.М. Гидродинамический расчет смазки контакта кривых поверхностей / А. М. Эртель. – М.: ЦНИИТМАШ, 1945.
73. Arghir, M. The finite volume solution of the Reynolds equation of lubrication with film discontinuities / M. Arghir, A. Alsayed, D. Nicolas // International Journal of Mechanical Sciences. – 2002. – P. 44.

74. Bair, S. High-Pressure Rheology for quantitative elastohydrodynamics / S. Bair / In Tribology and Interface Engineering Series // Elsevier. – 2007. – P 54.
75. Bissett E.J. The Line Contact Problem of Elastohydrodynamic Lubrication. I. Asymptotic Structure for Low Speeds / E. J. Bisset // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1989. – Vol. 424, № 1867. – PP. 393-407.
76. Bissett E.J. The Line Contact Problem of Elastohydrodynamic Lubrication. II. Numerical Solutions of the Integrodifferential Equations in the Transition and Exit Layers / E. J. Bisset, D. A. Spence // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1898. – Vol. 424, № 1867. – PP. 409-429.
77. D'Agostino V. Effects of the lubricant piezo-viscous properties on EHL line and point contact problems / V. D'Agostino, V. Petrone, A. Senatore // Tribol. Lett. – 2013. – Vol. 49. – PP. 385–396.
78. Denasciutti D. A numerical approach for the analysis of deformable journal bearings / D. Denasciutti, M. Gallina, M. Gh. Munteanu // Frattura ed Integrit Strutturale. – 2012. – Vol. 21. – PP. 37-45.
79. Dowson D. Elastohydrodynamic Lubrication / D. Dowson, G. R. Higginson. – Oxford: Pergamon Press, 1966.
80. Fortier A.E. Numerical Simulation of Hydrodynamic Bearings with Engineered Slip/No-Slip Surfaces : A Thesis presented to the Academic faculty / Alicia Fortier. – Georgia. – 2004.
81. Fortier A.E. Numerical Simulation of a Slider Bearing with an Engineered Slip/No-Slip Surface and Lubrication Engineering / A. E. Fortier // 14th International Colloquium Tribology // Germany: Technische Akademie Esslingen. – 2004.
82. Goryacheva I. G. Contact mechanism in tribology / I. G. Goryacheva. – Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1998. – 344 p.
83. Greenwood J.A. An extension of the Grubin theory of elastohydrodynamic lubrication / J. A. Greenwood // J. Phys. D. – 1972. – Vol. 5. – PP. 2195-2211.

84. Hamrock, B. J. Fundamentals of fluid film lubrication / B. J. Hamrock, S. R. Schmid, B. O. Jacobson. – N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 2004. – 703 p.
85. Hamrock B.J. Ball Bearing Lubrication / B. J. Hamrock, D. Dowson. – N.Y.: Wiley & Sons, 1981.
86. Hertz H. Ueber die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz // J. für die reine und angewandte Mathematik. – 1882. – Bd. 92. – PP. 156-171.
87. Johnson K. L. Regimes of elastohydrodynamic lubrication / K. L. Johnson // Journal of Mechanical Engineering Science. – 1970. – Vol. 12. – PP. 9-16.
88. Kalker J. J. On elastic line contact / J. J. Kalker // Trans. ASME, Appl. Mech., – 1972. – Vol. 39, № 4. – PP. 1125-1132.
89. Kalker J. J. The surface displacement of an elastic half-space loaded in a slender, bounded, curved surface region with application to the calculation of the contact pressure under a roller / J. J. Kalker // Journal of the Institute of Mathematics and its Applications. – 1977. – Vol. 19. – PP. 127-144.
90. Kumar M. S., Thyla P. R., Anbarasu E. Numerical analysis of hydrodynamic journal bearing under transient dynamic conditions / M. S. Kumar, P. R. Thyla // MECHANIKA. – 2010. – Vol.2 (82). – PP. 37-42.
91. Lugt P. M. A Review of elasto-hydrodynamic lubrication theory / P. M. Lugt, G. E. Morales-Espejel // Tribology Transactions. – 2011. – Vol 54. – PP. 470-496.
92. Lubrecht A. A. The numerical solution of the elasto-hydrodynamically lubricated line and point contact problem, using multigrid techniques : PhD Dissertation / Antonius Adrianus Lubrecht. – Netherlands: Twente University, 1987. – 219 p.
93. Lundberg G. Elastische Berührung zweier Halbraume / G. Lundberg // Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. – 1939. – Vol. 10, № 5, – PP. 201-211.
94. Martin A.M. The Lubrication of Gear Teeth / A. M. Martin // Engineering. – 1916. – Vol. 102.
95. Moes H. Lubrication and beyond. / H. Moes. – The Netherlands: Twente Universiti Press, 2000. – 366 p.
96. Panek C. A solution for the narrow rectangular punch / C. Panek, J. J. Kalker // Journal of Elasticit. – 1977. – Vol. 7, № 2. – PP. 213-218.

97. Patankar S. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow / S. Patankar, V. Suhas. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1980. – 205 p.
98. Ravindra M. M. Analysis of hydrodynamic plain journal bearing / M. Ravindra, S. Sandeep // Excerpt from the Proceedings COMSOL Conference in Bangalore. – 2013.
99. Reynolds O. On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. B. Tower's Experiments / O. Reynolds // London. Phil. Trans. Roy. Soc. – 1886. – Vol. 177, Part 1. – PP. 157-234.
100. Salant, R.F. Numerical Simulation of a slider Bearing with an engineered slip/no-slip surface / R. F. Salant, A. E. Fortier / Tribology and lubrication engineering: 14 International Colloquium Tribology // Technische Akademie Esslingen. – 2004, 13-15 Jan. – PP. 1699-1704.
101. Samarskii A.A. The theory of difference schemes / A. A. Samarskii. – USA: Marcel Dekker Inc., 2001.
102. Stolarski T. Engineering analysis with ANSYS software / T. Stolarski, Y. Nakasone, S. Yoshimoto. – ELSEVIER, 2006.
103. Sivashinsky G.I. The problem of a slender die / G. I. Sivashinsky // Journal of Elasticit. – 1975. – Vol. 5, № 2. – PP. 161-166.
104. Sommerfeld A. Zur Hydrodinamischen Theorie der Schmiermittelreibung / A. Sommerfeld // Zeitschrift für Mathematik und Physik. – 1904. – Vol. 50. – PP. 97-155.
105. Tower B. First Report on Friction Experiments / B. Tower // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. – 1883. – Nov. – PP. 632-659.
106. Szeri A.Z. Fluid film lubrication (2-nd ed.) / A. Z. Szeri. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
107. Tikhonov, A. N. Solution of ill-posed problems / A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin. – Washington: Winston & Sons., 1977.
108. Tikhonov A.N. Numerical methods for the solution of ill-posed problems / A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V. V. Stepanov, A. G. Yagola. – Kluwer: Academic Publishers, 1995.

109. Venner, C. H. Numerical simulation of a transverse ridge in a circular EHL contact under rolling sliding / C. H. Venner, A. A. Lubrecht // Trans. ASME J. Tribol. 1994. – PP. 751–761.
110. Williams, J.A. Engineering tribology / J. A. Williams. – New York: Oxford University Press Inc., 1994. – 242 p.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**  
**СВИДЕТЕЛЬСТВО О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ**  
**ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о государственной регистрации программы для ЭВМ

**№ 2017617187**

**Расчет давления в смазочном слое подшипника скольжения  
конечной длины**

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования «Сибирский  
федеральный университет» (СФУ) (RU)*

Автор: *Иванов Виктор Андреевич (RU)*

Заявка № **2017614187**

Дата поступления **03 мая 2017 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **30 июня 2017 г.**



*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

*Г.П. Излиев*

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

# АКТ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ



Филиал общества с ограниченной ответственностью  
**«Русская инжиниринговая компания» в г. Красноярске**  
 ИНН 7709625414, КПК 246503001  
 660111, Красноярский край, Красноярск г,  
 Пограничников ул, дом № 37, корпус 1  
 тел. (391) 256-45-10

### АКТ

об использовании результатов научных исследований, выполненных ассистентом кафедры «Прикладная механика» Политехнического института Сибирского федерального университета Ивановым Виктором Андреевичем в диссертационной работе **«Математическое моделирование упруго-гидродинамического взаимодействия тел в узлах трения»**, для оптимизации приводных механизмов рабочих станций.

Методы расчета смазочного слоя для подшипниковых узлов применялись для оптимизации работы и увеличения срока службы редукторов конвейеров и элеваторов прокаленного кокса и готовой продукции в дирекции по производству анодной массы.

Руководитель филиала  
 ООО «РУС-Инжиниринг» в г. Красноярске \_\_\_\_\_ / Мержиевский В.В. /

Согласовано:  
 Начальник ЦРАП \_\_\_\_\_ / Шиндорики Н.В. /

