

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики
систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения
Российской академии наук

На правах рукописи

Жарков Максим Леонидович

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧАХ
МОДЕЛИРОВАНИЯ МИКРОЛОГИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор РАН, главный научный
сотрудник ИДСТУ СО РАН
Казаков Александр Леонидович

Иркутск – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИИ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ.....	12
1.1. Особенности микрологистической транспортной системы	12
1.2. Выбор математического аппарата для моделирования работы микрологистических транспортных систем.....	16
1.3. Системы массового обслуживания и их место в исследовании транспортных систем.....	28
1.4. Случайный поток событий и его свойства	34
1.5. Современное состояние исследований в области теории массового обслуживания	38
1.6. Применение имитационного моделирования в изучении систем массового обслуживания	46
Выводы по главе 1	51
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА ЗАЯВОК В МИКРОЛОГИСТИЧЕСКИЕ ТРАНСПОРТНЫЕ СИСТЕМЫ.....	53
2.1. Выбор модели входящего потока заявок в микрологистические транспортные системы	53
2.2. Математическая модель входящего на железнодорожную станцию вагонопотока.....	56
2.3. Математические модели входящих пассажиропотоков в транспортно- пересадочные узлы	73
Выводы по главе 2	85
ГЛАВА 3. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАБОТЫ МИКРОЛОГИСТИЧЕСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ	86
3.1. Методика моделирования работы микрологистических транспортных систем	86
3.2. Аналитическое исследование однофазных и частных случаев многофазных систем массового обслуживания	97

3.3. Численно-аналитический метод вычисления стационарных вероятностей состояний систем массового обслуживания с групповыми потоками	108
Выводы по главе 3	111
ГЛАВА 4. «ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАСЧЕТОВ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ» И РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ	113
4.1. Описание имитационной модели работы микрологистической транспортной системы и алгоритма ее работы	113
4.2. Структура и функции «Программного комплекса для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания»	119
4.3. Решение тестовых и модельной задач	129
Выводы по главе 4	135
ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ТРАНСПОРТНО-ПЕРЕСАДОЧНЫХ УЗЛОВ МЕГАПОЛИСОВ РОССИИ	137
5.1. Математическая модель работы транспортно-пересадочного узла	137
5.2. Моделирование работы транспортно-пересадочных узлов в Москве	146
5.3. Моделирование работы транспортно-пересадочного узла в Екатеринбурге ...	151
Выводы по главе 5	157
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	158
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	159
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	160
ПРИЛОЖЕНИЕ	176

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Использование моделирования является одним из ключевых способов совершенствования работы транспортной отрасли, начиная с 30-х годов прошлого века. В настоящее время математические методы широко применяются для планирования, прогнозирования и управления в транспортно-логистических системах. При этом для макро- и (отчасти) мезологистических систем обычно стремятся построить оптимизационные модели. Однако эффективность функционирования транспортно-логистических систем на макро- и мезоуровнях существенно зависит от производительности микрологистических систем, при исследовании которых детерминированные модели не всегда обеспечивают должную адекватность описания. Основная причина этого заключается в необходимости учитывать множество различных факторов, под воздействием которых процессы в системе протекают по-разному при одинаковых начальных условиях.

В подобной ситуации наиболее адекватным инструментом исследования являются разного рода вероятностные (стохастические) модели, в частности, системы массового обслуживания (СМО). Именно такие модели применяются когда, во-первых, имеющихся знаний о поведении исследуемого объекта недостаточно или имеются сомнения в их достоверности, во-вторых, адекватно описать объект исследования, в котором протекаемые процессы имеют стохастическую природу, используя детерминированные модели, гораздо сложнее, чем методом статистических испытаний, либо вообще невозможно. Например, в работах К.D. Lewis [82], Ю.М. Ермольева [38], Н.Ю. Салмина [110], Л.В. Массель [85] и др. стохастические модели применяются для решения различных проблем из области экономического планирования, при этом в ряде задач учитывается наличие неполной информации. В работах А. Banik [135, 137], G. Bolch [140], S. Greiner [140], A. Law [71], Г.П. Башарина [7], П.П. Бочарова [10], Н.П. Бусленко [15], В.М. Вишневого [22], А.Н. Дудина [30], В.И. Клименок [73] и др. стохастические методы применяются для моделирования информационно-телекоммуникационных систем. Отличительными особенностями таких систем являются случайный характер поступления данных и их недетерминированная обработка вне зависимости от их семантического значения. Это позволяет использовать разработанный математический аппарат и в других областях, связанных с обработкой

входящих потоков заявок различной природы. К таким системам, в частности, относятся и ряд логистических.

В сфере транспорта стохастические модели применяются главным образом на уровне микрологистических транспортных систем (микро-ЛТС), которые наиболее подвержены влиянию случайных факторов. Значительный вклад в развитие данного научного направления внесли G. Potthoff [102], F.A. Naight [128], H.A. Taha [122], W.D. Kelton [71], D. Talay [151] и др. Исследованием математических моделей железнодорожных станций и вокзалов, моделированием транспортных процессов, а также исследованием различных железнодорожных микро-ЛТС на основе стохастических моделей занимались В.М. Акулиничев [3], Н.П. Бусленко [15], В.А. Персианов [98], В.В. Повороженко [99], Н.В. Правдин [103-105], И.Е. Савченко [109], А.А. Смехов [115] и др. Результаты изучения моделей микро-ЛТС в качестве ключевых элементов транспортной инфраструктуры города отражены в работах С.В. Земблинова [60], О.В. Кузьмина [79], В.Я. Негрей [103], К.Ю. Скалова [114]. Авторы активно используют аппарат теории массового обслуживания в связи с тем, что такие модели являются эффективным и удобным средством для исследования объектов, в которых, во-первых, регулярно повторяются однотипные действия (принятие транспортной единицы, ожидание перед отправкой и т.д.), во-вторых, заявки поступают в систему в случайные моменты времени, т.е. процесс работы таких объектов аналогичен процессу функционирования СМО.

В настоящее время продолжается активное развитие стохастических моделей, в частности, теории систем массового обслуживания. Можно отметить работы С.П. Вакуленко [18], Д.Н. Власова [20, 21], Н.Ю. Еврееновой [35, 36], А.Л. Казакова [16, 64, 65, 141], А.А. Лемперт [16, 127, 141], А.М. Маслова [64, 65, 84], Н.М. Христюка [129], Ф.Г. Фу [126, 127], С. Graham [151], B.S. Kerner [177], J. Medhi [165]. и др. Тем не менее, известные математические модели не всегда подходят для описания микро-ЛТС, поскольку последние имеют сложную организационную структуру, которая порождает многофазный процесс обслуживания. Более того, сложность изучения подобных систем увеличивается из-за специфики входящих потоков. Так, в пассажирских и грузовых терминалах необходимо рассматривать поступившую транспортную единицу как группу заявок (пассажиров, товаров и др.), которые обслуживаются отдельно друг от друга.

Таким образом, актуальной задачей современного математического моделирования является создание методики построения математических моделей работы микро-ЛТС, имеющих вид СМО с групповыми потоками заявок, и разработка на этой основе программно-алгоритмического инструментария для решения прикладных задач.

Цель и задачи исследования. Целью является разработка методики математического моделирования работы микро-ЛТС на основе теории массового обслуживания, создание численных методов и алгоритмов исследования полученных моделей, а также реализация этих методов и алгоритмов в виде программного комплекса. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Проанализировать существующие на данный момент методы изучения микро-ЛТС и обосновать выбор математического аппарата для моделирования.
2. Предложить методику построения моделей работы микро-ЛТС в виде многофазных СМО с групповым поступлением заявок.
3. Разработать и реализовать в виде программного комплекса численный метод оценки параметров модели и показателей, характеризующих эффективность работы моделируемых систем.
4. Построить модели конкретных микро-ЛТС на основе предложенной методики и выполнить их исследование с помощью созданного программного комплекса.

Объектом исследования являются микрологистические транспортные системы, процесс функционирования которых является случайным в силу воздействия большого числа неопределенных факторов природного и техногенного характера.

Предметом исследования являются методы построения математических моделей микро-ЛТС с групповым поступлением заявок на основе теории массового обслуживания и численные методы их исследования.

Научная новизна исследования состоит в следующем.

1. Разработана новая методика создания математических моделей работы микро-ЛТС, новизна которой состоит в том, что для описания входящего материального потока используется Batch Markovian Arrival Process (далее – *ВМАР*), а также учитывается многофазная структура микро-ЛТС с наличием обратных связей между фазами. В области транспорта подобный модельный аппарат применяется впервые, близкие модели ранее встречались в области информационно-телекоммуникационных систем.

2. Предложен оригинальный численный метод оценки параметров работы многофазной СМО с групповым поступлением заявок на основе имитационного моделирования. Его отличие от известных методов заключается в возможности генерирования *ВМАР*-потоков с заданными характеристиками.
3. Создан новый «Программный комплекс для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания», который реализует предложенный численный метод и позволяет решать широкий спектр модельных и прикладных задач, и получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.
4. С использованием разработанной методики построены стохастические модели работы железнодорожной (грузовой) и городской (пассажирской) микро-ЛТС в виде многофазных СМО с *ВМАР*-потоками. С помощью созданного программного комплекса получены оценки параметров работы этих СМО, сделаны новые содержательные выводы о рассмотренных транспортных системах, в частности, определены «узкие места» в структуре микро-ЛТС и выработаны рекомендации по их устранению.

Теоретическая значимость исследования. Полученные в настоящем исследовании результаты вносят вклад в развитие теории массового обслуживания и могут быть основой дальнейшего изучения более сложных СМО, например, с большим числом фаз либо с существенно нестационарными потоками.

Основные научные результаты по теме диссертации использованы при выполнении грантов РФФИ: № 13-06-00653 «Исследование проблем модернизации и оптимизации транспортной сети с использованием методов теории гиперграфов и гиперсетей, ГИС-анализа», № 14-07-00222 «Интеллектуальная система поддержки принятия решений в задачах инфраструктурной логистики», № 16-06-00464 «Методический инструментарий оценки устойчивости и эффективности развития макрорегиональной транспортно-логистической системы с использованием математического моделирования», № 18-07-00604 «Интеллектуальная информационно-вычислительная технология поддержки принятия решений в задачах инфраструктурной микро и мезо логистики».

Практическая значимость результатов исследования определяется тем, что разработанная методика построения математических моделей может быть применена для анализа характеристик реальных объектов, когда необходимо учитывать влияние случайных факторов. Это позволяет снизить трудозатраты при проведении первичного

исследования различных транспортных систем в сравнении с другими методами, в частности, основанными на агентных моделях или клеточных автоматах. Созданный программный комплекс применим для определения параметров работы различных по структуре и назначению микро-ЛТС.

Методы исследования. В диссертационной работе применяются методы теории массового обслуживания, теории случайных процессов, методы математического и имитационного моделирования, теории вероятностей, математической статистики и системного анализа. Для реализации программной системы используются дискретно-событийный подход имитационного моделирования и среда разработки Delphi EX8 (язык программирования Object Pascal).

Соответствие специальности. Работа соответствует следующим пунктам паспорта специальности 05.13.18: п.1. «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений» – в части применения многофазных СМО с групповым входящим потоком заявок для описания работы микро-ЛТС; п.4. «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента» – в части разработки численного метода оценки параметров работы многофазной СМО и его программной реализации; п.5. «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента» – в части решения модельных и прикладных задач из области транспортной логистики. Полученные результаты являются новыми для всех трех областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

Степень достоверности результатов исследования. Достоверность результатов работы определяется корректностью применения методов теории вероятностей, теории случайных процессов и теории массового обслуживания, корректностью выбора условий для построения моделей и исходных данных для проведения численного эксперимента, верификацией результатов расчетов на реальных данных.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на Третьей межвузовской научно-практической конференции молодых ученых (Иркутск, 2014); Всероссийской молодежной научно-практической конференции «Винеровские чтения» (Иркутск, 2014, 2015, 2016); конференции «Ляпуновские чтения»

(Иркутск, 2016, 2017, 2018); III Российско-Монгольской конференции молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению (Иркутск–Ханх, 2016); XX Байкальской всероссийской конференции и школе-семинаре научной молодежи «Информационные и математические технологии в науке и управлении» (Иркутск–Байкал, 2015); XVII, XVIII и XIX Всероссийских конференциях молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2016; Иркутск, 2017; Кемерово, 2018); Объединенном научном семинаре Центра развития и размещения производственных сил ИЭ УрО РАН и кафедры «Мировая экономика и логистика» УрГУПС под руководством д.т.н. М.Б. Петрова (Екатеринбург, 2018); международном семинаре «Critical Infrastructures: Contingency Management, Intelligent, Agent-based, Cloud Computing and Cyber Security» (Байкальск – Иркутск, 2018).

Публикации. По теме диссертации опубликована 21 научная работа [39–56, 66, 178, 179], из них 2 статьи [178, 179] – в изданиях, индексируемых в Web of Science, и 2 статьи [39, 41] в издании, входящем в Перечень ВАК РФ по профилю диссертации, в которых представлены основные положения проведенного исследования. Статьи [42, 54, 56, 66] – в изданиях по транспорту, входящих в перечень ВАК РФ, в них опубликованы результаты по применению разработанного в диссертации программно-математического аппарата для исследования конкретных транспортных систем. Оставшиеся работы опубликованы в трудах и материалах конференций. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад. Все выносимые на защиту результаты получены лично автором. Предложенная методика создания математических моделей работы микро-ЛТС [41, 56, 178] разработана в неделимом соавторстве с д.ф.-м.н. А.Л. Казаковым. Исследование структуры микро-ЛТС [42, 54, 178, 179] проведено при участии к.ф.-м.н. А.А. Лемперт. Постановка задачи моделирования транспортно-пересадочного узла в Екатеринбурге принадлежит к.т.н. М.А. Журавской [56, 179]. Статистические данные для построения модели грузовой микро-ЛТС собраны П.А. Парсюрновой [41]. «Программный комплекс для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания» [39, 56, 178] создан в соавторстве с д.ф.-м.н. А.Л. Казаковым. Вклад соискателя состоит в проектировании архитектуры, разработке алгоритмического обеспечения и программной реализации.

Лично соискателем разработаны: в [42] – численно-аналитический метод определения вероятностных характеристик многофазных СМО, в [39, 43, 54, 56, 66, 178, 179] – математическая модель работы микро-ЛТС и численный метод оценки параметров работы многофазной СМО с групповым поступлением заявок.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы из 179 наименований и приложения. Объем работы составляет 191 страниц, включая 34 рисунка и 44 таблицы.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, сформулированы его цель и задачи, раскрыта научная новизна, охарактеризована теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приведена структура работы.

В первой главе приведен аналитический обзор научных исследований по построению и изучению математических моделей работы различных транспортно-логистических систем. В зависимости от масштаба сферы деятельности выделяют макро-, мезо- и микрологистические системы. К последним и относится объект исследования – микрологистические транспортные системы.

Во второй главе строятся стохастические модели входящих материальных (грузовых, пассажирских) потоков в различные микро-ЛТС, основанные на модели ВМАР-потока. Статистические данные для моделирования были получены по результатам натурных обследований, выполненных автором лично либо при его участии. Часть имеющихся данных использовалась для построения моделей, остальные – для ее верификации путем сравнения с результатами моделирования по Т-критерию Вилкоксона.

В третьей главе представлена оригинальная методика создания математических моделей работы микро-ЛТС в виде многофазных СМО с групповым поступлением заявок и построенная на ее основе стохастическая модель. Приведены результаты аналитического исследования некоторых частных случаев и численно-аналитический метод вычисления стационарных вероятностей состояний многофазных СМО.

В четвертой главе приведены принципы построения имитационной модели для многофазной СМО и ее программная реализация, представлено описание программного комплекса и выполнена проверка его работоспособности. Верификация имитационной

модели проведена путем тестирования программного комплекса на классических задачах теории массового обслуживания.

В пятой главе построена обобщенная математическая модель работы транспортно-пересадочного узла на основе представленной в главе 3 методики. Предложены стохастические модели работы действующих транспортно-пересадочных узлов «Владыкино» и «Кутузово» в Москве, а также проектируемого транспортно-пересадочного узла в Екатеринбурге. С помощью программного комплекса для рассматриваемых систем получена оценка эффективности функционирования при текущих параметрах пассажиропотока и установлена максимально допустимая нагрузка на них.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору РАН А.Л. Казакову за постановку задачи, ценные советы и наставления во время выполнения исследования и полезные обсуждения полученных результатов. Отдельная благодарность к.ф.-м.н. А.А. Лемперт за помощь при исследовании структуры микро-ЛТС, поддержку и полезные обсуждения. Также хотелось бы поблагодарить к.т.н. М.А. Журавскую за постановку задачи моделирования пассажирской микро-ЛТС и замечания, которые способствовали улучшению автореферата диссертационной работы.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИИ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ

Первая глава является обзорной и состоит из шести разделов. В первом проведено изучение базовой структуры современных микро-ЛТС и особенностей производимых ими операций. Во втором приведен аналитический обзор научных исследований по построению и изучению математических моделей работы различных микрологистических транспортных систем. В ходе анализа показано, что, поскольку микро-ЛТС испытывают существенное влияние случайных факторов, наиболее адекватными в большинстве случаев оказываются вероятностные (стохастические) модели, в частности, на основе многофазных СМО.

В этой связи проведен обзор современного состояния исследования в области теории массового обслуживания. Так, в третьем разделе представлено формальное описание, виды и особенности использования систем массового обслуживания, в четвертом – рассмотрены наиболее известные модели входящего потока заявок, в пятом разделе – представлен обзор научных работ, в которых исследуются различные типы систем массового обслуживания.

В ходе проведенного исследования установлено, что микро-ЛТС обладают сложной структурой, поэтому наряду с аналитическим исследованием необходимо использовать также и методы имитационного моделирования. В шестом разделе представлены примеры разработки имитационных моделей для решения ряда прикладных задач и дана характеристика инструментальных средств для их реализации.

1.1. Особенности микрологистической транспортной системы

Под микро-ЛТС понимаются подсистемы, структурные составляющие логистических систем, охватывающие работу отдельного предприятия. В сферу деятельности таких систем входит внутрипроизводственная логистика какого-либо объекта, т.е. подготовка и планирование производства, сбыта, снабжения, транспортно-складские и погрузочно-разгрузочные работы [69, 87].

К микро-ЛТС относят порты, где осуществляется перегрузка товаров с морского транспорта на сухопутный и обратно, аэропорты, железнодорожные терминалы (вокзал, сортировочная станция) и т.д. Примером грузовой микро-ЛТС является итальянский морской порт Джоя Тауро (итал. Gioia Tauro), расположенный на юге Италии. Данный терминал занимает первое место в Италии по грузообороту [123]. В нем осуществляется стыковка океанских контейнерных торговых линий, по которым идет товарообмен между портами Средиземного и Черного морей. Железнодорожное сообщение обеспечивает связь порта с важнейшими пунктами Италии и других стран Европы. Примером пассажирской микро-ЛТС является транспортно-пересадочный узел «Шинагава» (Shinagawa), расположенный в одном из центральных районов Токио – Тиёда (Chiyoda). Данный ТПУ является одним из крупнейших в мире [21, 36], обеспечивает стыковку национальных и региональных железных дорог (в том числе, высокоскоростных «Shinkansen»), линии метрополитена, городского пассажирского и индивидуального транспорта.

Классификацию микро-ЛТС можно осуществить по разным критериям. В табл. 1.1 приведены основные способы классификации [69, 87].

Таблица 1.1. Способы классификации микро-ЛТС

Признак классификации	Разновидности микро-ЛТС
Перерабатываемые грузы	Грузовые (наливные, навалочные, насыпные и тарно-штучные грузы), пассажирские.
Характер взаимодействия с другими логистическими объектами	Автономные, интегрированные (в производственный комплекс).
Роль в макрологистических-транспортных системах	Обслуживающие определенную территорию, перевалочные (хабы).
Масштаб	Малые, средние, крупные.

Особенности функционирования микро-ЛТС напрямую зависят от двух составляющих: входящего и внутренних материальных (транспортных, пассажирских) потоков и структурной схемы работы самой системы.

Рассмотрим входящий транспортный поток. На движение транспортных единиц влияют различные непредвиденные факторы, в частности, дорожная обстановка, погодные условия, поломки и т.п., поэтому моменты времени поступления транспорта в систему в большинстве случаев являются случайными величинами. При этом обычно транспорт перевозит товары партиями (пассажиров группами) размер которых заранее предугадать не всегда возможно. Следовательно, при изучении входящего

транспортного (материального, пассажирского) потока в микро-ЛТС необходимо учитывать их случайную природу. Отметим, что в систему могут поступать несколько независимых транспортных потоков, различных видов.

Внутренние и исходящие потоки наследуют случайный характер входящего транспортного потока и, кроме того, напрямую зависят от структуры микро-ЛТС.

В настоящее время не существует общего определения сложной системы, обладающего достаточной четкостью и наглядностью. Отнесение той или другой реальной системы к «сложным» весьма условно и во многом определяется задачами исследования.

В рамках данной работы под *сложной системой* будем понимать объект, состоящий из множества отдельных иерархически устроенных частей, функционирующих в тесном взаимодействии и составляющих единое целое [28].

Микро-ЛТС сочетают в себе различные виды оборудования, сооружений, транспорта и схем коммуникаций, т.е. являются сложными системами. Так, в микро-ЛТС можно выделить самостоятельные подсистемы, в которых производятся различные технические операции (сортировка, обслуживание и отправка) над поступающим материальным потоком. Более подробно подсистемы рассматриваются в главе 3. Подсистемы расположены последовательно и связаны между собой линиями, по которым передаются материальные потоки. Также в структуре имеются обратными связями, которые определяют выбор поведения системы при перегрузках и сбоях. Обратная связь является основой развития и саморегулирования систем, приспособления их к изменяющимся условиям внешней среды, т.е. адаптивность [15].

Отметим, что максимальное число заявок в микро-ЛТС конечно (площади ограничены) и принимает только целые положительные значения.

В микро-ЛТС регулярно повторяются однотипные действия: принятие транспортной единицы, ожидание перед отправкой и т.д. Они, как правило, определяются плановыми показателями, в частности, обслуживанием определенного числа транспортных единиц за смену. Однако помимо случайной природы поступающих транспортных потоков на работу микро-ЛТС оказывает воздействие большое число второстепенных факторов [36], в частности, техногенные: сбои в работе техники, человеческий фактор и др. Все это приводит к появлению неопределенности

поведения системы в целом, т.е. процесс функционирования микро-ЛТС является случайным процессом.

Под *случайным (вероятностным или стохастическим) процессом* понимаем процесс изменения во времени состояния какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями.

Таким образом, микро-ЛТС обладает следующими свойствами [34, 87]:

- *сложность* – определяется наличием случайных воздействий, нескольких уровней обслуживания, прямых и обратных связей;
- *структурированность* – предусматривает наличие определенной организационной структуры системы, которая состоит из взаимосвязанных объектов и субъектов управления и реализует заданную цель;
- *иерархичность* – подчиненность элементов нижнего уровня (порядка, ранга) элементам высшего уровня в контексте логистического управления;
- *адаптивность* – возможность системы выбирать варианты поведения под влиянием внешней среды;
- *целостность* – свойство системы выполнять заданную целевую функцию, реализованную системой в целом, а не отдельными ее звеньями или подсистемами;
- *уникальность и неопределенность поведения* микро-ЛТС в конкретных условиях под влиянием внешней среды.

Планирование эффективности и целенаправленного совершенствования современных микрологистических транспортных систем требует специальных методов, с помощью которых возможно учесть особенности микро-ЛТС, в частности, наличие фактора случайности.

В связи с этим поставим перед собой следующую задачу: разработать методику построения математических моделей работы широкого спектра микро-ЛТС, включая грузовые и пассажирские, позволяющую учесть случайные факторы; предложить численные методы исследования полученных моделей; реализовать эти методы в виде программного комплекса; применить комплекс для решения прикладных задач.

Далее рассмотрим методы, применяемые при моделировании различных транспортных систем. Отметим, что функционирование микро-ЛТС, обладающих указанными выше свойствами, можно представить в виде случайного процесса с

дискретными состояниями и непрерывным временем, т.е. для построения моделей их работы возможно использование аппарата теории массового обслуживания.

1.2. Выбор математического аппарата для моделирования работы микрологистических транспортных систем

1.2.1. Выбор математических средств моделирования сложных систем

При исследовании любых объектов и систем методами моделирования ключевым вопросом является выбор математического аппарата. Не являются исключением и различные транспортно-логистические системы. Математические методы их исследования развивались в течение длительного времени. В научной литературе активное развитие данного направления началось еще в 50-х годах прошлого века, см. например [9, 60].

В настоящее время сложилось несколько подходов к моделированию указанных систем. Однако прежде, чем перейти к их характеристике, отметим, что для микро-ЛТС, ввиду особенностей их функционирования, особую значимость имеют два следующих обстоятельства:

Во-первых, из-за сложности структуры микро-ЛТС приходится использовать особые типы моделей и математические методы, способные учитывать наиболее важные характеристики протекающих в системе процессов, многие из которых имеют случайный характер.

Во-вторых, важным вопросом является выбор способа описания входящих, а также внутренних и исходящих потоков заявок. В большинстве случаев эти потоки зависят от суточного цикла, характеристик транспортного средства (вид, скорость, объем перевозимого груза и т.д.), влияния окружающей среды и других причин.

Итак, на данный момент можно выделить четыре основных подхода к построению математических моделей, применяемых для изучения микро-ЛТС.

1) **Аналитический детерминированный** — использование детерминированных оптимизационных моделей, что для инженера-практика обычно предполагает вычисление потребных характеристик системы, например, числа путей на станциях, пропускной способности устройств и т.п., по аналитическим формулам [87,

102, 116]. Данный подход является наиболее простым, однако ошибки при вычислении могут быть значительными.

Основным недостатком детерминированного метода является сложность учета возмущений и искажений, связанных с наличием случайных второстепенных факторов. Например, определение необходимого числа обслуживающих устройств исходит из их загрузки технологическими операциями, т.е. полезного использования. Однако оно может существенно варьироваться, в частности, под воздействием суточного цикла. Подобные неравномерности обычно учитывают в модели при помощи соответствующих коэффициентов, однако такой подход является очень грубым и часто порождает ошибки.

2) **Аналитический вероятностный** – построение моделей с использованием аппарата теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания [21, 102, 151]. Этот подход позволяет получить характеристики изучаемой системы в явной аналитической форме с детальным анализом протекающих в системе процессов. При этом точное поведение последних неизвестно и зачастую имеет широкий диапазон вариаций.

Использование такого подхода, как правило, не требует больших затрат времени для получения точных результатов, позволяет учитывать наличие случайных факторов, а в некоторых моделях можно отразить структуру выбранной системы, что дает возможность определения «узких мест» в планировке микро-ЛТС. Однако построенная математическая модель может оказаться слишком сложной для изучения аналитическими методами.

3) **Графический** – построение суточного плана-графика работы системы, описание структуры системы с помощью теории графов [87, 102, 115]. Основными достоинствами является возможность детального отображения внутренней структуры и высокая точность определения «узких мест» изучаемой системы. Недостатками данного метода является сложность учета случайных возмущений, плохое отображение управления и невозможность проведения эксперимента.

Наряду с аналитическими методами исследования при изучении сложных систем часто используют методы имитационного моделирования.

4) **Имитационное моделирование** – моделирование работы системы на основе проведения специально организованного компьютерного эксперимента с

использованием стандартных языков моделирования или авторских разработок [15, 71, 98]. Имитационные модели не только по свойствам, но и по структуре соответствуют изучаемой системе. При этом имеется однозначное и явное соответствие между процессами, получаемыми на модели, и процессами, протекающими в системе [15].

Использование этого подхода целесообразно в том случае, когда применить аналитические методы сложно или попросту невозможно, по крайней мере, в момент проведения исследования. Однако проведение компьютерного эксперимента достаточно трудоемко, необходимы значительные затраты времени на программную реализацию имитационной модели [71].

Недостатком имитационного моделирования является невозможность получения точных результатов. С другой стороны, его использование предоставляет исследователю определенные преимущества по сравнению с применением других подходов, например, позволяет детально отразить структуру изучаемого объекта, особенности функционирования и процессы управления. Также имитационные модели дают возможность учесть наличие как дискретных, так и стохастических процессов, способны визуализировать и представить в графическом виде (таблицы, графики, 3D-модель) результаты моделирования и т.п.

Сравнительная характеристика представленных подходов изучения сложных систем показала следующее.

1) Аналитический детерминированный подход эффективен для изучения сложных систем. Однако в случаях, когда требуется учитывать фактор случайности, данный подход может привести к значительным ошибкам в расчетах;

2) Аналитический вероятностный подход учитывает стохастическую природу моделируемого объекта, т.е. дает возможность устранить недостаток, присущий детерминированному подходу. Это позволяет адекватно описать протекаемые в системе процессы, определить ее «узкие места» и получить требуемые характеристики;

3) Графический – удобен для изображения структуры объекта, но не подходит для отображения случайных процессов, управления и проведения вычислительных экспериментов;

4) Имитационное моделирование – обладает всеми преимуществами предыдущих подходов, однако трудоемко, требует много времени на реализацию и на проведение модельного эксперимента, позволяет получить лишь приближенные результаты.

1.2.2. Выбор модели для описания движения материальных потоков внутри микрологистических транспортных систем

В настоящее время известно несколько типов моделей, которые могут быть применены для описания процессов движения заявок (грузов, пассажиров) внутри микро-ЛТС. Рассмотрим наиболее часто используемые.

1) **Модели на основе физических сил.** Здесь заявки представлены в виде простых частиц, которые подчиняются основным физическим законам. Например, газо-кинетическая модель, в ней заявки представлены в виде молекул газа, скорость и положение которых заменяются статическим распределением частиц по уравнению Больцмана. Преимущества этих моделей заключаются в простоте среды перемещения и скорости расчетов. С другой стороны, отсутствуют возможности для выбора маршрута и определения параметров заявки как обособленной единицы [132].

2) **Модели на основе теории клеточных автоматов.** Система представляется в виде сетки, ячейки которой вмещают не более одной заявки. Перемещение между ячейками строго подчиняется определенному алгоритму, т.е. варианты движения заявки в составе потока ограничены и исключают реакцию на резкое изменение параметров среды передвижения [133]. Также недостатком данных моделей является зависимость от структуры изучаемой системы, т.е. для каждой системы требуется «своя сетка».

3) **Модели на основе ньютоновской механики,** известны как «модели социальных сил» Д. Хелбинга. В данном случае на поведение заявок в системе оказывают воздействие физические силы, описываемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Учитываются особенности индивидуального поведения: выбор кратчайшего пути следования, скорости передвижения, дистанции в зависимости от плотности потока. Таким образом, данный тип моделей позволяет получить необходимые сведения как об отдельной заявке в потоке, так и для всей системы [149]. Однако, как и в предыдущем случае, для каждой изучаемой системы приходится создавать свою особую модель. При этом каждая новая модель создается с «нуля» по причине уникальности структуры объектов исследования и поведения заявок в них.

4) **Модели на основе СМО.** Функционирование изучаемой системы представляется в виде случайного процесса, который принимает положительные целочисленные значения (состояния). Состояние этого процесса показывает число

заявок, которые находятся в системе. В зависимости от номера состояния заявки могут отсутствовать в системе, обслуживаться в канале или находиться в очереди (при наличии). Для такого случайного процесса вероятности пребывания в каждом состоянии описываются с помощью систем обыкновенных дифференциальных или линейных алгебраических уравнений. Наглядным способом описания этого случайного процесса является *граф состояний (переходов)*, где вершины графа обозначают состояния, ребра же отображают возможные переходы между ними [115, 128]. В подобных моделях поток заявок представляется совокупностью элементов с общим направлением движения. Однако возможен учет индивидуального поведения заявок.

По результатам проведенного обзора можно заключить, что для построения модели функционирования микро-ЛТС подходит аналитический вероятностный подход, а для ее реализации – модели на основе СМО. Отметим, что они часто применяются для моделирования транспортных систем, многие исследователи отмечают удобство и эффективность их использования [84, 115, 128].

1.2.3. Теоретические основы построения вероятностных моделей

При использовании аналитического вероятностного подхода исследователь неизбежно сталкивается с необходимостью сбора статистических данных и их анализа. Приведем необходимые теоретические основы для проведения такого анализа, которые мы будем использовать в главах 2 и 5.

Выборочной совокупностью или просто **выборкой** называют совокупность случайно отобранных объектов (элементов) a_i , $i = \overline{1, n}$ [27].

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка [27].

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число элементов n этой совокупности [27]. При этом предполагается, что число объектов в выборке ограничено, а количество элементов генеральной совокупности велико (много больше количества объектов в выборке либо бесконечно) [19].

Прежде чем приступать к анализу имеющихся выборок, их необходимо представить в удобном для исследования виде. Для этого строят вариационные ряды.

Вариационный ряд. Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_i наблюдалось n_i раз, где $i = \overline{1, k}$, и $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Наблюдаемые значения x_i называются *вариантами*, числа наблюдений n_i – *частотами*, $n_i / n = w_i$ – *относительными частотами*, а упорядоченная последовательность вариантов и соответствующих им частот (относительных частот) – *дискретным вариационным рядом* [27]. Будем называть w_i , которые получены по статистическим данным, *эмпирическими относительными частотами* или *эмпирическими частотами*.

Интервальные вариационные ряды применяют в случае, если варианты могут отличаться друг от друга на сколь угодно малую величину, либо элементы выборки принимают такое большое количество значений, что составленный по ним дискретный ряд является практически необозримым.

В интервальных вариационных рядах, в отличие от дискретных, весь диапазон наблюдаемых значений из выборки делят на конечное число интервалов. Для каждого из них определяют: b_i и b_{i+1} – границы интервала с номером i ; варианту x_i – середину; частоту n_i – число элементов выборки, значения которых попали в этот интервал, и $w_i = n_i / n$ – относительную частоту. В дальнейшем будем считать, что все интервалы имеют равную длину $h = b_i - b_{i+1}$ (при всех i).

Случайная величина и ее характеристики. Случайная величина (СВ) является количественной характеристикой результата опыта и может принимать различные числовые значения, заранее неизвестные и зависящие от случайных причин, которые не могут быть учтены [120]. СВ характеризуется областью возможных значений, которые она может принять в результате опыта, и вероятностью приобретения этих значений.

Целью анализа выборки является получение информации о свойствах генеральной совокупности. Предполагается, что значения, которые могут принимать элементы генеральной совокупности, характеризуются некоторой случайной величиной (СВ), поэтому для установления свойств генеральной совокупности необходимо определить закон распределения этой СВ, т.е. найти ее функцию распределения или же плотность распределения вероятностей. Определения этих математических объектов представлены далее.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что СВ X в результате испытания примет значение меньше x , т.е. $F(x) = P(X < x)$ [27].

Если функция распределения СВ X является непрерывной, то и сама СВ называется *непрерывной случайной величиной* (НСВ). Для описания НСВ часто используют не функцию распределения, а плотность распределения вероятностей.

Плотностью распределения вероятностей (или просто *плотностью вероятности*) НСВ X называют функцию $f(x) = F'(x)$ [19].

Если функция распределения СВ X задается в виде таблицы, в которой перечислены все возможные значения x_i этой СВ и соответствующие им вероятности $p(x_i)$, то эту СВ называют *дискретной случайной величиной* (ДСВ).

Существуют также другие виды случайных величин, например, смешанные или сингулярные, однако в рамках данной диссертации они не применяются [19, 27].

При описании случайных величин так же выделяют ряд числовых характеристик, наиболее важными из которых являются математическое ожидание и дисперсия [19, 27]. Их определения представлены ниже.

Математическое ожидание (M) или просто *среднее значение* СВ X – определяет положение значений СВ на оси абсцисс с учетом того, что эти значения имеют различные вероятности. Оно находится для ДСВ по формуле $M = \sum_i x_i p(x_i)$, для НСВ по формуле $M = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, где $f(x)$ – функция плотности распределения.

Дисперсия (D) – мера разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания. Она находится для ДСВ по формуле $D = \sum_i (x_i - M)^2 p_i$, для НСВ – по формуле $D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M)^2 f(x)dx$.

Введем стандартные **законы распределения случайных величин** [26], которые будут применяться в исследовании далее.

Непрерывное равномерное распределение. Говорят, что случайная величина имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$, если функция плотности распределения $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}.$$

Нормальное распределение – НСВ, функция плотности распределения которой имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где μ – математическое ожидание, σ – среднеквадратическое отклонение. Дисперсия $D = \sigma^2$. Нормальное распределение с параметрами μ и σ будем обозначать $N(\mu, \sigma)$.

Гамма-распределение – НСВ с функцией плотности распределения вида

$$f(x) = x^{k-1} \frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)},$$

где $\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} dt$ – гамма функция Эйлера, k и θ – параметры формы и масштаба соответственно. Математическое ожидание $M = k\theta$, дисперсия $D = k\theta^2$.

Экспоненциальное распределение – НСВ, функция плотности распределения которой задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина. Математическое ожидание $M = \lambda^{-1}$, дисперсия $D = \lambda^{-2}$. Экспоненциальное распределение с параметром λ будем обозначать $\text{Exp}(\lambda)$.

Геометрическое распределение. ДСВ X , распределенная по этому закону, принимает значения $1, 2, \dots, m, \dots$, а вероятности появления этих значений определяются по формуле $P_m = p^{m-1}q$, где $0 \leq p \leq 1$, $q = 1 - p$. Геометрическое распределение с параметром p будем обозначать $\text{Geom}(p)$.

Статистической гипотезой называют предположение о виде закона распределения неизвестной случайной величины, или о параметрах закона распределения известных СВ. Возможны и другие гипотезы: о равенстве параметров законов распределений двух или нескольких СВ, о независимости выборок и т.д.

В рамках данной работы мы будем рассматривать два типа статистических гипотез: предположение о законе распределения генеральной совокупности, т.е. о виде

функции распределения $y = F(x)$; и об однородности двух независимых выборок, т.е. о том, что эти выборки получены из одной генеральной совокупности.

Формирование статистической гипотезы о законе распределения генеральной совокупности на основе данных выборки происходит в два этапа.

Эмпирическая и теоретическая функции распределений. На первом этапе выполняется структурная идентификация функции распределения СВ. Для этого путем анализа построенного вариационного ряда определяется эмпирическая функция распределения, и по ее виду подбирается теоретическая.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки или статистической функцией распределения) случайной величины X называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Тогда по определению $F^*(x) = n_x / n = w_x^*$, где n_x – число вариантов, меньших x [27].

Функцию распределения генеральной совокупности $F(x)$ называют *теоретической функцией распределения*. Она, как правило, заранее неизвестна и ее определение обычно является одной из целей статистического анализа данных. Так как $F(x) = P(X < x)$ определяет вероятность события, а $F^*(x)$ – его относительную частоту, то при больших n значения $F(x)$ и $F^*(x)$ мало отличаются друг от друга в том смысле, что $\lim_{n \rightarrow \infty} [F(x) - F^*(x)] < \varepsilon = 1 (\varepsilon > 0)$ (см. [27, с. 193]). Этот факт отражен в теореме Я. Бернулли, которая входит в ряд других теорем, составляющих «закон больших чисел».

Статистические оценки параметров распределения. На втором этапе формирования статистической гипотезы выполняется параметрическая идентификация функции распределения СВ X , т.е. оцениваются параметры $a_i, i = \overline{1, s}$ теоретической функции распределения.

Применяемые далее в исследовании теоретические функции распределения зависят не более, чем от двух параметров a_1 и a_2 , оценки которых мы будем находить с помощью *метода моментов* [19]. Согласно ему, a_1 и a_2 подбираются так, чтобы две важнейшие числовые характеристики теоретического закона распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам. Следовательно, параметры a_1 и a_2 будем подбирать так, чтобы математическое ожидание M и дисперсия D теоретического закона распределения совпадали с соответствующими статистическими

характеристиками выборки: математическим ожиданием M^* и исправленной дисперсией D^* , которые определяются по следующим формулам [27]

$$M^* = \sum_{i=1}^n x_i w_i, \quad \sigma^* = \sqrt{D^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - M)^2 / (n-1)},$$

где x_i – варианты, n_i – частоты, w_i – эмпирические частоты, $i = \overline{1, k}$, $\sum_{i=1}^k n_i = n$ – размер выборки, σ^* – исправленное среднее квадратическое отклонение.

Рассмотрим теоретические законы распределения НВС, которые были представлены выше, и найдем оценки их параметров по методу моментов.

Так, оценки параметров нормального распределения μ и σ будут равны статистическим характеристикам $\mu = M^*$, $\sigma = \sigma^*$. Оценки параметров гамма-распределения k и θ можно получить из системы уравнений $\begin{cases} k\theta = M^*, \\ k\theta^2 = D^*. \end{cases}$ Для

теоретического экспоненциального распределения оценка параметра λ определяется по формуле $\lambda = 1 / M^*$.

Отметим, что с помощью метода моментов не всегда удастся наилучшим образом оценить параметры теоретического распределения. Иногда их необходимо подобрать, исходя из более тонких соображений, в частности, из условия минимума некоторой функции многих переменных. Для решения этой задачи будем применять метод покоординатного спуска.

Метод покоординатного спуска [106]. Пусть нужно найти с заданной точностью ε наименьшее значение функции $y = f(N)$, где N – точка n -мерного пространства с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Выберем какую-нибудь начальную точку $N_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ и рассмотрим функцию при фиксированных значениях всех переменных, кроме первой: $f(x_1, x_{20}, \dots, x_{n0})$. Тогда она превратится в функцию одной переменной x_1 . Изменяя эту переменную, будем двигаться от начальной точки $x_1 = x_{10}$ в сторону убывания функции с выбранным шагом h_f , пока не дойдем до некоторого значения $x_1 = x_{11}$, после которого она начинает возрастать. Точку с координатами $(x_{11}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ обозначим как N_1 , при этом $f(N_1) \leq f(N_0)$.

Проведя такую же минимизацию функции y по остальным переменным x_i , $i = \overline{2, n}$, снова вернемся к x_1 и продолжим процесс. Рано или поздно возникнет ситуация, когда движение с шагом h_f не приводит к уменьшению функции ни по одной

переменной. В этом случае мы уменьшаем величину шага в два раза и продолжаем минимизацию с меньшим значением h_f .

Поиск останавливается, как только будет выполнено условие $h_f \leq \varepsilon$.

Критерии согласия. Для проверки статистических гипотез применяют критерии согласия. Приведем описание следующих критериев: Пирсона, Колмогорова-Смирнова и Вилкоксона [19, 26].

Суть использования критериев Пирсона и Колмогорова-Смирнова для проверки статистической гипотезы заключается в сравнении двух значений: наблюдаемого (эмпирического), которое получено на основе анализа статистических данных, и критического. Если наблюдаемое значение не превосходит критическое, то говорят, что нет оснований отвергнуть выдвинутую гипотезу [19].

Критерий Пирсона (χ^2). Наблюдаемое значение критерия Пирсона $\chi^2_{набл}$ определяется по формуле

$$\chi^2_{набл} = n \sum_i \frac{(w_i - p_i)^2}{p_i}. \quad (1.1)$$

Здесь n – размер выборки, w_i – эмпирические частоты. Если оцениваемая СВ X дискретна то $p_i = P(i = x)$, иначе $p_i = \int_{b_i}^{b_{i+1}} f(x)dx$, где $f(x)$ – функция плотности распределения, b_i и b_{i+1} – границы интервала i .

Критические значения критерия $\chi^2_{крит}$ известны и представлены в различных источниках, например, в [19, 27, 120]. Они определяются по двум параметрам: *уровню значимости α* и *количеству степеней свободы r* .

Уровень значимости выбирает пользователь в зависимости от особенностей конкретной задачи. Для инженерных задач применяется $\alpha = 0,05$, реже $\alpha = 0,01$ [19, 26, 120]. Рассматриваемые далее задачи относятся к данному типу, поэтому более высокий уровень значимости, чем $\alpha = 0,05$, не требуется. Количество степеней свободы r определяется по формуле $r = k - s - 1$, где s – количество параметров выбранного закона распределения, k – число интервалов в рассматриваемом вариационном ряду.

Критерий Колмогорова-Смирнова (далее *критерий Колмогорова, K*) [19, 26, 120] в качестве меры расхождения рассматривает максимальное значение модуля разности между эмпирической функцией распределения $F^*(x)$ и соответствующей теоретической

$F(x): D_K = \max_{1 \leq i \leq k} |F^*(x_i) - F(x_i)|$, где $F^*(x_i) = \sum_{j=1}^i w_j$, $F(x_i) = P(X < x_i) = \sum_{j=1}^i p_j$ [26, 120], k –

количество интервалов (вариант), w_j и p_j определяются так же, как и в критерии Пирсона.

Если параметры функции $F(x)$ оцениваются по данным выборки, то критерий Колмогорова может быть использован для проверки соответствия опытных данных лишь некоторым функциям распределений.

Для проверки соответствия гипотезы нормальному распределению определяется величина

$$K_{набл} = D_K \left(\sqrt{n} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{n}} \right), \quad (1.2)$$

где n – размер выборки. Критические значения $K_{крит}$ составляют: $K_{крит} = 0,89$ при $\alpha = 0,05$ и $K_{крит} = 1,04$ при $\alpha = 0,01$ [120].

Наблюдаемое значение критерия Колмогорова для проверки соответствия гипотезы семейству гамма-распределений отличается от соответствующего значения для нормального распределения (1.2) и вычисляется по формуле

$$K_{набл} = \left(D_K - \frac{0,2}{n} \right) \left(\sqrt{n} + 0,26 + \frac{0,5}{\sqrt{n}} \right). \quad (1.3)$$

Критические значения в этом случае составляют: $K_{крит} = 1,09$ при $\alpha = 0,05$ и $K_{крит} = 1,31$ при $\alpha = 0,01$ [120].

Т-критерий Вилкоксона используется для проверки гипотезы об однородности двух независимых выборок [27]. Если выборки однородны, то считается, что они извлечены из одной генеральной совокупности, следовательно, обладают одной функцией плотности распределения.

Выборки считаются однородными, если наблюдаемое значение критерия $W_{набл}$ и критические $W_{нижн.кр}$ и $W_{верхн.кр}$ удовлетворяют условию $W_{нижн.кр} < W_{набл} < W_{верхн.кр}$.

Чтобы найти значение $W_{набл}$, необходимо расположить элементы выборок по возрастанию значений. Далее, каждому элементу одной из выборок, обычно первой из сравниваемых, присваивается порядковый номер i и находится $W_{набл} = \sum i$.

Критические значения Т-критерия Вилкоксона определяются по формулам

$$W_{\text{нижн.кр}}(\alpha, n_1, n_2) = \left\lfloor \frac{(n_1 + n_2 + 1)n_1 - 1}{2} - z_{\text{кр}} \sqrt{\frac{(n_1 + n_2 + 1)n_1 n_2}{12}} \right\rfloor, \quad W_{\text{верхн.кр}} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - W_{\text{нижн.кр}},$$

где n_1 и n_2 – размеры выборок, α – уровень значимости, $z_{\text{кр}}$ находится по таблице функции Лапласа из равенства $z_{\text{кр}} = \Phi^{-1}((1 - \alpha) / 2)$, $\lfloor a \rfloor$ означает целую часть числа a .

1.3. Системы массового обслуживания и их место в исследовании транспортных систем

Как уже отмечалось в п.1.1, характерной особенностью функционирования микро-ЛТС является циклический характер их работы. В большинстве случаев в микро-ЛТС выполняются однотипные действия: принятие груженого транспортного средства, разгрузка, распределение товара по партиям, отправка и так далее. Поведение микро-ЛТС представляет собой случайный процесс, потому как число заявок (грузовых единиц, пассажиров) в системе в фиксированный момент времени зависит от множества различных, в том числе стохастических, факторов, т.е. является случайной величиной. При этом максимальное число заявок в системе конечно и принимает только целые положительные значения. Тогда процесс функционирования микро-ЛТС представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Подобные процессы изучаются в рамках специального раздела теории вероятностей, который называется «теории массового обслуживания» (ТМО), в англоязычной литературе «queueing theory» – т.е. «теория очередей» [165].

Под *системой массового обслуживания* (СМО) понимают систему, которая предназначена для обслуживания каких-либо заявок одного или нескольких типов, поступающих в нее в случайный момент времени [25, 92, 122].

Опишем функционирование микро-ЛТС с помощью аппарата теории массового обслуживания. Значительный вклад в развитие данного научного направления внесли А.А. Смехов [115], G. Potthoff [102], F.A. Haight [128] и др.

Формальное описание. Одним из важных этапов использования теории массового обслуживания является формальное описание функционирования изучаемого объекта. Для каждой СМО описываются следующие компоненты:

- входящий поток заявок (событий, требований);
- количество и типы обслуживающих каналов;

- времена обслуживания заявок в канале;
- длина очереди, в которой заявки пребывают перед обслуживанием;
- дисциплина обслуживания очереди (определяет порядок обработки заявок из очереди).

На данный момент существует множество классификаций СМО, но только классификация Д. Кендалла, предложенная в 1953 году, является общепринятой. Согласно данной классификации описание системы состоит из четырех символов, разделенных вертикальной либо косой чертой [7, 22, 25],

$$A/B/m/n. \quad (1.4)$$

Первые две позиции состоят из букв или буквенных комбинаций. Первая отвечает за входящий поток заявок, вторая – за закон распределения времени обслуживания. Приняты следующие обозначения: M – стационарный пуассоновский поток заявок; E – эрланговский поток (время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по закону Эрланга); D – детерминированный поток; G – произвольный стационарный поток, т.е. закон распределения промежутков времени между поступлением двух последовательных заявок неизвестен; H – гиперэкспоненциальное распределение промежутков времени между поступлением двух последовательных заявок; HE – гиперэрланговский поток; $*$ – произвольный нестационарный поток.

В литературе также встречаются дополнительные обозначения: M^X – пуассоновский неординарный поток, где X означает групповое поступление заявок; PH – распределение фазового типа; SM – полумарковский поток; $BMAR$ – групповой марковский входящий поток.

Последние две позиции в (1.4) – целые числа, m ($m \geq 1$) означает количество параллельно работающих каналов, n ($n \geq 0$) – максимальную длину очереди. Каждый канал, в зависимости от модели, может обслуживать одну или несколько заявок одновременно. Они могут быть специализированы на определенные типы заявок, в таком случае канал обрабатывает только заявки «своего» типа, остальные игнорируются. В случае, когда $n = \infty$, четвертая позиция при описании СМО может быть опущена.

Если в описании системы первые две позиции занимают символы M , E , H , HE , то такие системы называются *марковскими* СМО. Главная особенность таких систем заключается в том, что они могут быть представлены дискретными марковскими

процессами с непрерывным временем. Зачастую для их описания применим процесс гибели и размножения [92, 122]. Подобные системы хорошо исследованы еще в первой половине XX века, когда было решено большинство основных задач ТМО и разработаны математические методы, которые себя хорошо зарекомендовали [15, 25]. В случае, когда в описании первые две позиции занимают другие символы (G , PH , SM , $BMAP$ и др.), эти СМО называют *немарковскими*. Для таких систем достаточно сложно или невозможно составить систему уравнений равновесия, которая описывает стационарное распределение вероятностей состояний системы (распределение вероятностей состояний, не зависящее от времени, подробнее см. в п. 3.1) [22]. Немарковские СМО довольно часто применяются в практических задачах, например, в крупных сферах деятельности, таких как транспортная логистика [64, 65] и информационно-телекоммуникационные системы [31, 33].

В классе немарковских СМО [22, 92, 165] наибольший интерес представляют системы с неординарными потоками заявок, т.е. с групповым поступлением и (или) обслуживанием, а также с меняющимися интенсивностями. Подобные СМО появляются при описании процессов, в которых происходит дробление первичных заявок, например, при передаче данных в сетях с коммутацией пакетов. Другим примером может служить прибытие групп пассажиров (самолетом, автобусом и т.п.), когда их интенсивность поступления меняется в зависимости от периода суток.

Схема простейшей СМО с неординарным потоком представлена на рис. 1.1.

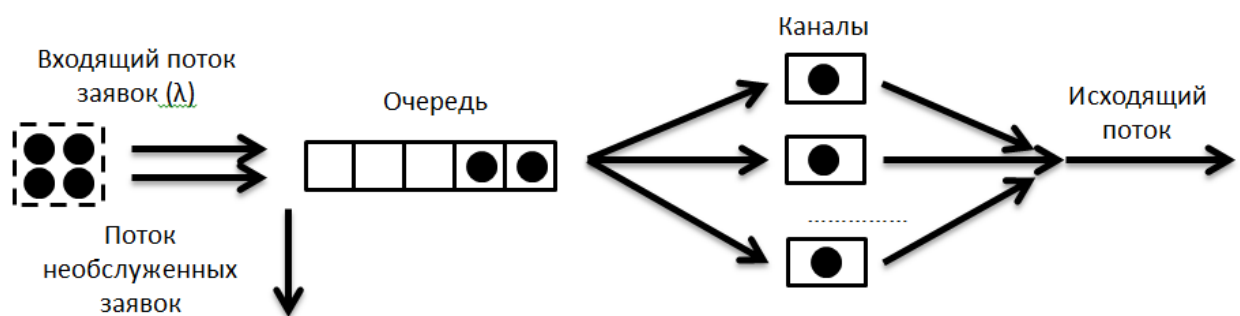


Рис. 1.1. Схема СМО с неординарным потоком заявок

Групповое поступление заявок ухудшает показатели СМО в сравнении с ординарным потоком той же средней интенсивности и усложняет методы анализа системы. Исследованиями в этом направлении занимаются такие известные зарубежные и отечественные ученые, как M.F. Neuts [167, 168], D.M. Lucantoni [158, 159, 160], С. Kim [155, 156], A.D. Banik [135-138], П.П. Бочаров [10-13], А.Н. Дудин [31, 32, 145-146],

А.И. Зейфман [57, 58, 59], А.А. Назаров [90, 91, 92], В.И. Клименок [73, 74, 75], С.П. Моисеева [88, 91], Ю.И. Рыжиков [107, 108] и др.

Вторым важным этапом формального описания СМО является определение правила, по которому будут обслуживаться заявки, находящиеся в очереди, т.е. выбор *дисциплины обслуживания очереди*.

Дисциплины обслуживания очереди делятся на несколько видов [92].

– Беспriorитетные дисциплины: в порядке поступления (FIFO) – выбирается заявка с максимальным временем пребывания в очереди; инверсионный порядок (LIFO) – выбирается заявка с минимальным временем пребывания в очереди, произвольный выбор (RANDOM) – из очереди выбирается случайная заявка; циклические алгоритмы – алгоритм выбора заявок методом перебора, согласно какому-либо правилу.

– Priorитетные дисциплины: фиксированный приоритет – заявка с наивысшим приоритетом обслуживается первой; динамический приоритет – приоритет заявки определяется в зависимости от ее времени нахождения в очереди или обслуживания; неупорядоченная очередь – заявки размещаются в порядке поступления, но на выбор самой приоритетной требуется время (FIFO с приоритетами); и др.

Третьим этапом в случае систем с неординарным потоком и конечной очередью является выбор дисциплины принятия групп заявок. В связи с допущением возможности прибытия групп какого угодно размера, существуют три основные дисциплины [30]:

частичное принятие (partial admission, PA) заключается в том, что принимается такое число заявок из группы, сколько имеется места в системе, а остальные теряются;

полный отказ (complete rejection, CR): если не хватает места хотя бы для одной заявки из группы, то теряется вся группа заявок;

полное принятие (complete admission, CA): если есть место хотя бы для одной заявки из группы, то принимается вся группа.

Выше были рассмотрены системы, в которых заявки обслуживаются одним каналом или одним из нескольких параллельно работающих каналов, такие системы называются *однофазными*. Существуют работы, в которых модель микро-ЛТС основана на марковских СМО (например, [20, 21]), но такой подход неоправданно упрощает процесс и пригоден лишь для получения первичной оценки характеристик изучаемого объекта.

В реальных системах процесс обслуживания может предполагать обработку одной заявки на нескольких последовательно расположенных обслуживающих устройствах. СМО такого типа получили название *многофазные* СМО. Эти системы подходят для описания многоуровневых систем, хорошим примером служат грузовые железнодорожные станции [84, 126] и ТПУ [56]. Данное направление теории массового обслуживания активно развивается, в том числе в связи с приложениями [7, 10, 129].

Классификация Кендалла была создана для описания однофазных СМО. Однако ее аналог используется и для многофазных систем

$$A_1 / B_1 / m_1 / n_1 \rightarrow^* / B_2 / m_2 / n_2 \rightarrow \dots \rightarrow^* / B_r / m_r / n_r. \quad (1.5)$$

В системе (1.5) присутствует r фаз обслуживания, символ A_1 характеризует входящий поток в первую фазу. Символы $A_1, B_k, n_k, m_k, k = \overline{1, r}$ означают то же, что и соответствующие символы в описании однофазных систем. Символом $\rightarrow$ обозначен переход заявки на вход следующей фазы обслуживания при завершении ее обработки на предыдущей [22].

В случае, если известен закон распределения времени между выходами заявок с какой-либо фазы, после знака $\rightarrow$ указывается соответствующий символ, например, $M / M / 1 \rightarrow M / G / 1 / 10 \rightarrow / M / 2 / 10$, иначе символ опускается или ставится «*».

В данном примере на первой фазе входящий поток заявок и поток обслуживания являются марковскими, имеется бесконечная очередь, следовательно, исходящий поток с первой фазы также будет марковским [22]. На второй фазе закон распределения времени обслуживания неизвестен. В этом случае невозможно установить характеристики исходящего потока заявок с данной фазы, поэтому символ, обозначающий структуру входящего потока, на третьей фазе опущен.

В случае, если очередь на какой-либо фазе конечна $n_k < \infty$, возникает вопрос о поведении многофазной системы в ситуации, когда данная очередь заполняется, а на вход продолжают поступать заявки. Обычно рассматривают следующие варианты поведения системы: 1) поступающая заявка теряется; 2) остается в канале, ожидая освобождения места в очереди следующей фазы и временно блокируя работу данного канала.

В многофазных системах выделяют два типа очередей [22]: *общая очередь* и *отдельные очереди* перед каждым каналом. В случае общей очереди заявка может

попасть в любой свободный канал обслуживания на соответствующей фазе. В случае отдельных очередей заявка, попавшая в очередь к определенному каналу, не может перейти в другую, и будет обслужена именно данным каналом. Тогда можно считать, что эта фаза состоит из набора одноканальных СМО, каждая со своей очередью.

Иногда в реальных системах необходимо учитывать направление движения заявок внутри них. Существуют два способа решения этой проблемы.

- Вводится маршрутная матрица, в которой задаются вероятности перехода заявки из узла в узел. Очевидное преимущество – необходимо хранить минимум информации – только саму маршрутную матрицу.

- Используются различные типы заявок. Заявки определенного типа могут быть обслужены лишь соответствующим каналом. Преимущество данного способа – точное определение маршрута каждой заявки и, как следствие, возможность нахождения дополнительных характеристик системы, например, среднего время пребывания в системе заявки какого-либо типа.

Многофазные СМО, как и однофазные, могут быть двух видов: замкнутые и открытые. В замкнутом виде заявки циркулируют внутри системы по некоторому маршруту, поступление новых заявок не допускается, а находящиеся в системе заявки не могут ее покинуть. В открытой системе характеристики потока заявок не зависят от того, в каком состоянии находится сама СМО, в замкнутых – зависят. Микро-ЛТС являются открытыми системами, поэтому в дальнейшем рассматриваются только открытые СМО.

Отметим, что многофазные СМО являются частным случаем сетей массового обслуживания (СеМО). В диссертации используются модели многофазной СМО вместо полноценной СеМО, поскольку базовая структура микро-ЛТС обладает последовательно расположенными подсистемами (см. п. 1.1), т.е. направления движения заявок в системе строго определено, поэтому модель на основе СеМО была бы в данном случае избыточной. При этом аналитическое изучение многофазных СМО более простая задача, нежели изучение СеМО. Так, на данный момент значимые результаты для ТМО имеются лишь для некоторых частных случаев СеМО [7, 10, 22, 152, 157].

Представление микро-ЛТС как СМО является эффективным и удобным способом их изучения. Применение такого подхода при достаточно общих предположениях о характеристиках рассматриваемой системы позволяет получить уравнения

протекающих в ней процессов и провести весьма общие исследования. На этом пути появляется возможность для развития аналитического аппарата, позволяющего в приемлемом для специалистов-практиков виде проводить технический расчет эффективности сложных систем. На данный момент изучению и применению СМО посвящено огромное количество работ. В п. 1.5 приведен обзор основных исследований в указанных направлениях.

Следует отметить, что точность описания работы микро-ЛТС зависит не только от правильности выбора структуры СМО, но и от корректности математического описания свойств поступающих потоков заявок, т.е. от выбора их модели.

1.4. Случайный поток событий и его свойства

Рассмотрим наиболее распространенные модели входящего потока заявок.

Случайный поток событий (заявок) t_i ($i=1,2,\dots$) на временном интервале $[0,+\infty)$ есть неубывающая случайная последовательность моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$, в которые происходят определенные события [25]. Аналогично можно определить случайный поток событий (случайный поток) для любого временного отрезка $[a,b]$, $0 \leq a < b$.

Далее *случайным потоком* будем называть поступающий в микро-ЛТС, либо исходящий из нее поток заявок, соответственно, *событием* – поступление или уход заявки из системы.

Отметим, что, если взять какой-либо поток заявок $f(t)$, поступивших за время $[0,t]$, то получим случайный процесс, который принимает целые положительные значения и является непрерывным и неубывающим. Из этого можно сделать вывод, что существует взаимное и однозначное соответствие между случайными процессами и потоками заявок (случайными, непрерывными и неубывающими) [13].

Случайный поток задается функцией вида

$$F_{T_1, T_2, \dots, T_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = P\{T_1 < x_1, T_2 < x_2, \dots, T_k < x_k\}$$

для промежутков времени $T_i = t_i - t_{i-1}$ ($i=1,2,\dots$), $t_0 = 0$, $k \geq 1$ между последовательными заявками.

Можно выделить три ключевых свойства случайных потоков: *отсутствие последствия*, *ординарность* и *стационарность*.

Отсутствие последствия означает, что заявки поступают в систему независимо друг от друга. Иначе говоря, количество заявок, поступивших за время $[t_{i-1}, t_i]$, никак не влияет на число заявок, поступивших в следующие интервалы времени [13, 15, 22].

Ординарность потока задает следующее соотношение: $P\{f(t, t + \Delta t) > 1\} = o(\Delta t)$, где $f(t, t + \Delta t)$ – число наступивших событий на интервале $[t, t + \Delta t]$, т.е. вероятность появления за бесконечное малое время Δt более чем одной заявки, есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δt [7, 15, 22].

Стационарность означает, что вероятностные свойства потока не меняются со временем, т.е. вероятность поступления определенного числа заявок за время Δt зависит лишь от длины интервала $\Delta t = (t + \Delta t) - t$ и не зависит от точки t начала этого интервала [13, 15, 22].

Рассмотрим некоторый стационарный поток. Обозначим через $P(t)$ вероятность прибытия одной и более заявок за время t , а через $\Lambda(t) = Mf(t)$ – среднее число поступивших за это время заявок, то из свойства стационарности следует, что $P(t)$ и $\Lambda(t)$ не зависят от расположения интервала длины t на временной оси и при этом $\Lambda(t)$ удовлетворяет равенству

$$\Lambda(t + s) = \Lambda(t) + \Lambda(s), \quad (1.6)$$

которое вытекает из свойства математического ожидания.

Поскольку $\Lambda(t)$ – неубывающая функция, зависящая от t , то из равенства (1.6) следует, что $\Lambda(t) = \lambda t$, $\lambda \geq 0$. Величина λ называется *интенсивностью* поступления потока заявок и характеризует *среднее число заявок, поступающих в систему за единицу времени* [13].

Стационарный пуассоновский поток. Случайный поток, обладающий всеми перечисленными свойствами (отсутствие последствия, ординарность и стационарность), называется *стационарным пуассоновским* или *простейшим потоком* [7, 26, 92].

Вероятность поступления i заявок за любой интервал времени длины t определяется по формуле

$$p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad i \geq 0,$$

т.е. вероятности $p_i(t)$ распределены по закону Пуассона с *параметром* λt .

Отметим, что в стационарном пуассоновском потоке интервал времени между последовательным поступлением двух заявок подчиняется *экспоненциальному закону распределения с параметром λ* [13].

Пуассоновский неординарный поток. Случайный поток, обладающий только свойствами стационарности и отсутствие последействия называется *пуассоновским неординарным потоком* [13, 25, 92]. Структуру такого потока можно описать следующим образом. Моменты поступления групп заявок образуют простейший поток, т.е. время между поступлением групп распределено по экспоненциальному закону, но в каждый момент с вероятностью l_k , $k \geq 1$, $\sum l_k = 1$ возможно поступление k заявок.

Интенсивность данного потока определяется по формуле $\gamma = \lambda l$, где $l = \sum_{k=1}^{\infty} k l_k$ – средний размер поступающей группы, λ – интенсивность поступления стационарного пуассоновского потока.

ВМАР-поток. Развитие теории массового обслуживания привело к появлению новых моделей потоков, устроенных гораздо сложнее, чем пуассоновские потоки и в определенном смысле обобщающих их. Активные исследования в данном направлении, в первую очередь М.Ф. Neuts [167, 168] и его учеников, включая D.M. Lucantoni [158, 160], S. Maragathasundari [162, 163] и F. Machihara [161], привели к появлению так называемых ВМАР-потоков.

ВМАР-поток впервые был представлен в 1991 году в статье D.M. Lucantoni [158], в которой было дано решение проблемы исследования системы ВМАР/G/1, используя идеи М.Ф. Neuts. Аббревиатура ВМАР – Batch Markovian Arrival Process — на русский язык переводится как групповой марковский входной поток (процесс) [30].

При разработке ВМАР-потока преследовалась цель создать модель потока с изменяющейся интенсивностью при сохранении пуассоновской структуры. Представим описание модели ВМАР-потока согласно работе А.Н. Дудина и В.И. Клименок [30].

Предположим, что существует цепь Маркова (ЦМ) v_t с непрерывным временем и конечным пространством состояний $\{0, 1, \dots, W\}$. Этот процесс называется управляющим процессом ВМАР-потока. Время пребывания ЦМ в состоянии v задано экспоненциальным распределением с параметром λ_v , $v = \overline{0, W}$. После завершения времени пребывания в состоянии v система с вероятностью $p_{v,r}^{(k)}$ перейдет в состояние

$r, r = \overline{0, W}$, и прибудет группа размера $k \geq 0$, т.е. возможно непоступление заявок (поступит группа размера ноль). Отметим, что переход цепи v_t из состояния v в это же состояние возможен только вместе с поступлением размера группы $k \geq 1$, т.е. $p_{v,v}^{(0)} = 0$. Соответственно предполагается, что вероятности $p_{v,r}^{(k)}$ удовлетворяют условию нормировки $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^W p_{v,r}^{(k)} = 1, v = \overline{0, W}$.

Следовательно, *ВМАР*-поток полностью определяется размерностью $W + 1$ управляющего процесса, интенсивностями пребывания этого процесса в своих состояниях $\lambda_v, v = \overline{0, W}$ и набором вероятностей $p_{v,r}^{(k)}, v, r = \overline{0, W}, k \geq 0$.

Всю эту информацию удобно хранить в матрицах размера $(W + 1) \times (W + 1)$. Для $k \geq 0$ определяются матрицы $D_k = \left(d_{v,r}^{(k)} \right)_{v,r=\overline{0,W}}$, элементы которых задаются следующим образом:

$$d_{v,r}^{(0)} = \begin{cases} -\lambda_v, & v = r, v, r = \overline{0, W}, \\ \lambda_v p_{v,r}^{(0)}, & v \neq r, v, r = \overline{0, W}, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$d_{v,r}^{(k)} = \lambda_v p_{v,r}^{(k)}, k \geq 1.$$

Естественное требование к матрицам $D_k, k \geq 1$ заключается в том, что все они ненулевые. При выполнении этого требования матрица D_0 является невырожденной и более того, устойчивой, т.е. все ее собственные значения обладают отрицательной действительной частью [30, 158].

Ввиду того, что последовательность матриц D_k может быть бесконечной, Д.М. Lucantoni предложил хранить информацию о *ВМАР*-потоке в виде их матричной производящей функции

$$D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k, |z| < 1.$$

Заметим, что в точке $z = 1$ значение этой производящей функции (матрица $D(1)$) является инфинитезимальным генератором управляющего процесса v_t , т.е. распределение стационарных вероятностей управляющего процесса (вектор-строка π) определяется из решения системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\pi D(1) = \vec{0}, \quad \pi \mathbf{1} = 1, \quad (1.8)$$

где $\vec{0}$ – вектор-строка размерности $W+1$, состоящий из нулей, а $\mathbf{1}$ – вектор-столбец той же размерности, состоящий из единиц. Средняя интенсивность *ВМАР*-потока $\bar{\lambda}$ вычисляется по формуле

$$\bar{\lambda} = \pi D'(z) |_{z=1} \mathbf{1}. \quad (1.9)$$

Таким образом, из определения *ВМАР*-потока видно, что он не обладает свойствами отсутствия последействия, стационарности и ординарности. Однако он является матричным аналогом стационарного пуассоновского потока. В самом деле, если вероятность поступления k заявок на интервале времени $[0, t)$ равна $P(k, t)$, то ее производящая функция запишется как $P(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k, t) z^k = e^{D(k)t}$, $|z| < 1$. Матричную экспоненту $e^{D(k)t}$ можно вычислить через степенной ряд.

Сравнивая эту функцию с производящей функцией $p(z, t) = e^{-\lambda t(1-z)} = e^{\lambda t(z-1)}$ для простейшего потока, мы видим, что *ВМАР*-поток, действительно, есть матричный аналог стационарного пуассоновского потока. Данные потоки схожи и по отношению к операциям суперпозиции и просеивания [13, 25, 30].

ВМАР-поток обобщает многие известные модели потоков, приведем некоторые из них: пуассоновский поток; если $D_k, k \geq 2$ – нулевые матрицы, то поток перестает быть групповым и превращается в *МАР*-поток – Markovian Arrival Process – марковский входной поток; *SM*-поток – полумарковский поток; *PH* – Phase Type – поток фазового типа и др.

Модель *ВМАР* можно применить для объединения нескольких входящих потоков с индивидуальными характеристиками в единую структуру, что позволяет существенно упростить аналитическое описание и исследование микро-ЛТС, особенно в условиях изменения характеристик входящих потоков.

1.5. Современное состояние исследований в области теории массового обслуживания

Пик наиболее активного развития теории массового обслуживания пришелся на 50-70 годы. В этот период ежегодно появлялось множество статей и монографий,

освещающие решения различных проблем ТМО. Затем интерес к этой области математики ослаб. Этому способствовало несколько причин, одна из главных – математическая. Так, с одной стороны, особенность аналитического решения задач ТМО заключается в том, что практически для каждого вида СМО необходимо искать свои методы исследования. С другой – высокий интерес исследователей в данном направлении привел к тому, что большинство задач ТМО, имеющих относительно простое решение, были изучены [13].

В настоящее время интерес к задачам ТМО вновь возрос. С развитием информационных, телекоммуникационных технологий и крупных транспортных систем появились задачи, для решения которых применим аппарат теории массового обслуживания. Далее представлен краткий обзор современных результатов в области ТМО.

1.5.1. Исследования СМО с групповым поступлением заявок

Системы с неординарным потоком. Научные работы по аналитическому исследованию СМО с групповым поступлением заявок впервые появились в 70-х годах прошлого века. Первоначально рассматривались одноканальные системы с пуассоновскими неординарными потоками [1, 61, 124]. В 1994 году П.П. Бочаров и С.В. Якутина [12] получили стационарные распределения длины очереди и числа заявок в немарковской СМО вида $G^X/G/1/n$. Размер поступающей группы случаен, но ограничен емкостью системы, а если число заявок в группе превосходит число свободных мест в накопителе, то оставшиеся заявки теряются. Затем появилась первая из серии работ А.Н. Дудина по изучению систем обслуживания с групповым поступлением [146]. В этой статье была проанализирована СМО типа $M^X/G/1$ с двумя моделями обслуживания, отличающимися различными распределениями времени обработки заявок, было получено стационарное распределение длины очереди и ряд других характеристик. Намного позднее А. Чудзинский [142], независимо от А.Н. Дудина, исследовал данную модель с конечной длиной очереди. Чудзинский вывел и доказал несколько теорем о поведении очереди большой размерности под влиянием группового поступления заявок, подкрепляя результаты наглядным численным примером с геометрическим распределением числа заявок в поступающей группе.

Стоит отметить несколько интересных работ. Первая, работа А.В. Лебедева [80] 1996 года, в которой изучался особый тип систем обслуживания – системы с бесконечным числом каналов – модель типа $M^X/G/\infty$. Он ввел и доказал теорему асимптотики максимумов, т.е. асимптотика для максимального числа заявок, одновременно находящихся в системе с ограниченным размером прибывающих групп. Вторая, работа 2013 года [163], в которой была проанализирована система с тремя различными видами обслуживания поступающих заявок. Заявки поступают группами, вид обслуживания отдельной заявки выбирается случайным образом.

В это время появились новые методы к изучению систем с неординарными потоками. Так, в работе М. Schleyer и К. Furmans [172] исследована СМО $G^X/G/1$ с дискретным временем, изучено влияние группового прибытия заявок на распределение времени ожидания обслуживания, представлен новый метод определения меры загрузки для такой системы.

Ю.И. Рыжиков [108] предложил способ нахождения распределения количества присутствующих заявок и групп заявок в многоканальной системе. Поток является пуассоновским с размером групп случайного размера. Для установления распределения количества находящихся в СМО групп использовалась H_2 аппроксимация, кроме того, описан способ получения начальных приближений и стационарных вероятностей состояний системы.

В 2009 году G. Bolch с соавторами [140] выполнили аналитический обзор имеющихся на тот момент результатов исследований марковских и немарковских процессов, СМО и СеМО. В частности, в работе представлены результаты изучения процесса потери заявок в системе $M^X/G/1/n$ при групповом поступлении и дисциплине полного отказа принятия групп.

Системы с ВМАР-потоком. Напомним, что модель ВМАР-потока была представлена в статье D.M. Lucantoni [158], в которой была изучена система типа ВМАР/G/1. Позже в литературе отмечается [30, 134, 143], что ВМАР-потоки хорошо подходят для описывания реальных нестационарных, неординарных и коррелированных потоков. Этот факт и определил их последующую популярность.

В первую очередь получила дальнейшее развитие модель СМО типа ВМАР/G/1. В 1994 году S.K. Matendo [164] изучил более сложный случай – систему с политикой отпусков (vacation policy), т.е. с промежутками бездействия. В этой же работе были

рассмотрены частные случаи *ВМАР*-потока: пуассоновский неординарный поток, *МАР*-поток, поток фазового типа (*PH*), поток с коррелированными временами между поступающими заявками и др. Затем в работе А.Н. Дудина [32] были представлены результаты по анализу этой СМО, функционирующей в случайной среде.

В 2000 году появилась монография А.Н. Дудина и В.И. Клименок [30], в которой для исследования систем с *ВМАР*-потоками был предложен математический аппарат многомерных квазитеплицевых и асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова и представлены аналитические результаты для стационарных характеристик ряда систем, включая системы с произвольным и полумарковским обслуживанием и повторными вызовами. Способ задания *ВМАР*-потока в данной монографии считается классическим в отечественной литературе.

Далее, в 2001 году в [148] представлены результаты исследования процесса ухода (departure processes) заявок из *ВМАР/G/1/n* (рассмотрена также бесконечная очередь) с «отпусками». Путем численных экспериментов авторы изучали влияние процесса ухода на обслуживание и распределение «отпусков», а также пропускную способность системы.

В.И. Клименок продолжила исследование систем с повторными вызовами. В статье [73] получено достаточное условие существования стационарного распределения вероятностей состояний СМО типа *ВМАР/M/m* с повторными вызовами, а также разработан алгоритм их вычисления.

Кроме того, многие авторы исследовали СМО с полумарковским обслуживанием. Так, F. Machihara в своей статье [161] продолжил исследования D.M. Lucantoni и M.F. Neuts, изучая систему *ВМАР/SM/1* со временем обслуживания, зависящим от состояния системы. Его работа была одной из первых, в которой получены стационарные распределения времени ожидания одной заявки и распределение числа заявок в системе. В работе Г.Ш. Цициашвили и М.А. Осиповой [130] представлены результаты анализа одноканальной системы с изменяющейся интенсивностью обслуживания. Авторами предложен алгоритм вычисления стационарного распределения вероятностей для дискретных процессов с конечным числом состояний достаточно общего вида. Данный алгоритм основан на известном методе вложенных цепей Маркова (см. [22, 106]). Чуть позже появилась статья В.И. Клименок по исследованию СМО *ВМАР/SM/1* с гибридным механизмом функционирования [74], который меняется под воздействием случайной

среды. В работе описан процесс определения стационарного распределения вероятностей состояний СМО и ее характеристик.

Для системы типа *ВМАР/SM/1* А.В. Казимирский в статье [67] доказал формулу Литтла, используя метод введения дополнительной переменной (см. [22]). Этот факт наглядно подтверждает схожесть структуры *ВМАР*-потоков и стационарных пуассоновских потоков.

В работах [147] и [136] коллективами под руководством А.Н. Дудина и А.Д. Vanik соответственно, изучено поведение системы *ВМАР/G/1/n* с различными дисциплинами обслуживания. А.Н. Дудиным рассмотрены дисциплины полного принятия и полного отказа (*complete rejection*). А.Д. Vanik с коллегами исследовал модель с «отпусками», а также дисциплинами частичного и полного отказа принятия групп заявок. Получены стационарные вероятности состояний, распределение длины очереди и некоторые другие важные характеристики таких систем.

Ч.С. Ким с коллегами в 2006 году провели исследование систем с фазовым распределением времени обслуживания [72]. Ими представлены результаты по многоканальной системе *ВМАР/PH/m/n* с тремя дисциплинами принятия групп заявок. При этом, помимо обычных (положительных) заявок, в систему также поступает *МАР*-поток отрицательных заявок. В статье представлен метод вычисления стационарных вероятностей состояний для такой системы.

В это же время вышла монография А.А. Назарова и С.П. Моисеевой [91]. В ней изложен метод асимптотического анализа для изучения различных потоков заявок и СМО, также представлены авторский способ описания *ВМАР*-потоков и некоторые важные результаты ТМО в этом направлении, полученные авторами ранее.

Позднее появился ряд работ по детальному описанию *ВМАР*-потоков. J.R. Artalejo [134] и J.D. Cordeiro [143] провели всесторонний анализ групповых марковских потоков. Рассмотрены как непрерывный, так и дискретный (*D-ВМАР*) варианты, а также несколько методов исследования аналогичных процессов с их описанием. В [171] подробно рассмотрены *МАР*- и *ВМАР*-потоки, на наглядных примерах представлены способы построения матриц $D_k, k \geq 1$ (см. п. 1.4).

Стоит отметить статью С.П. Моисеевой [88], в которой исследованы СМО с бесконечным числом каналов и групповым входящим потоком посредством оригинального метода просеянного потока. Данный метод позволяет проводить

изучение немарковских СМО с неограниченным числом обслуживающих каналов различной конфигурации и неэкспоненциальным временем обслуживания.

В работах А.И. Зейфмана и Я.А. Сатина [57, 58, 59, 111] проведен систематический анализ свойств неоднородных марковских цепей с непрерывным временем. Описаны возможности приложения этих результатов к некоторым типам СМО, представленных процессами рождения и гибели с катастрофами. Кроме того, рассмотрены СМО с групповым поступлением заявок.

1.5.2. Исследования СМО с групповым обслуживанием

Во многих реальных системах помимо группового поступления, часто встречается и групповое обслуживание, например, такова работа железнодорожных сортировочных станций, где происходит переформирование прибывшего поезда [102]. В этом случае несколько заявок обслуживается одновременно одним каналом (локомотивом).

Системами с групповым обслуживанием начали заниматься еще в 60-е годы прошлого века (например, [167]). Однако активное исследование данного направления началось лишь с середины 90-х годов в связи с развитием телекоммуникационных технологий, см. например, [5]. В настоящее время в отечественной и зарубежной литературе представлено большое число результатов по изучению СМО с групповым обслуживанием, далее приведены некоторые из них.

С.В. Аль-натор в работе [5] представила метод анализа стационарных характеристик СМО с очередью конечной длины и групповым марковским обслуживанием специального вида, на основе которого были получены стационарные распределения длины очереди в произвольные моменты времени, в моменты поступления заявок и выхода групп из системы.

В статье [93] представлено детальное изучение модели СМО типа $M^X/G^X/1/n$ с повторными заявками. Автором доказана теорема, позволяющая упростить анализ системы с многомерным пуассоновским потоком и свести его к исследованию более простой системы с одномерным потоком. Кроме того, предложен алгоритм отыскания стационарных вероятностей состояний системы для случая ограниченного времени на повторный запрос.

В работе 2002 года А.Н. Дудин и S. Chakravarthy [145] рассмотрели одноканальную систему с конечной очередью и *ВМАР*-поток. Обслуживание ведется в двух режимах. В первом заявки обслуживаются по одной, во втором – группами различных размеров. Учитываются затраты на присутствие заявки в очереди, на обслуживание и переключение режимов обслуживания.

Позднее A.D. Banik [135, 137, 138] изучил одноканальную СМО с конечной и бесконечной очередями, входящим *ВМАР*-поток и случайным размером обслуживаемой группы заявок. Выбранная для обслуживания группа имеет верхнее и нижнее ограничения на размер. Им получены распределение длины очереди для следующих моментов времени: момент перед прибытием, произвольный момент, момент выхода заявки из системы и т.д., также были получены некоторые показатели эффективности системы.

В работах А.Н. Старовойтова [117, 118] рассмотрена СМО с групповым поступлением, групповым обслуживанием и потоком катастрофических сбоев, которые полностью очищают очередь системы, если она не пуста, и не оказывают никакого влияния на систему в противном случае. Были установлены необходимые и достаточные условия существования стационарного распределения вероятностей состояний системы.

Отдельно стоит отметить работу R. Germs и N. van Foreest [150]. В данной статье исследован обобщенный случай для систем с конечной очередью $(M(n)^{X(n)} / G(n)^{Y(n)} / 1/n + b)$, в которых интенсивность и размер прибывающих и обслуживаемых групп зависят от количества заявок в очереди и размера обслуживаемой группы. Авторы разработали единую методику для изучения эффективности этого общего класса СМО с конечной очередью и предложили метод определения распределения длины очереди.

1.5.3. Исследования многофазных систем массового обслуживания

Аналитическое исследование многофазных СМО является сложной задачей. Для анализа таких систем необходимо знать не только длину очереди, время ожидания обслуживания, нагрузку каждой подсистемы, но и характеристики исходящего потока на каждом этапе обслуживания (фазе). Поэтому имеется множество работ по исследованию таких систем аппроксимационными методами, например, [157, 174].

Многофазные СМО являются важным частным случаем СеМО, поэтому их исследование актуально и для развития данного направления ТМО. С обзором работ по СеМО можно ознакомиться в [7, 144, 153, 165]. Далее рассматриваются несколько работ с немарковским входящим потоком, для которых были получены результаты аналитическими методами.

В работе [14] группой исследователей (Л. Бройер, А.Н. Дудин, В.И. Клименок, Г.В. Царенков) рассмотрена двухфазная СМО $BMAP/G/1/n_1 \rightarrow /PH/1/n_2-1$ с блокировками фаз. Суть метода исследования, использованного в данной работе, заключается в изучении каждой фазы как отдельной СМО. Авторы используют модель *BMAP* для описания входящего потока заявок в следующую фазу, за счет чего существенно повышается точность метода.

Затем в работе [75] В.И. Клименок и О.С. Тарамин рассмотрели двухфазную систему с *BMAP*-потоком и повторными вызовами. Авторами отмечается, что многофазные СМО могут быть использованы для моделирования реальных телекоммуникационных сетей и их фрагментов, а также для проверки алгоритмов декомпозиции СеМО. В работе найдено стационарное распределение вероятностей состояний системы во вложенные и произвольные моменты времени, и основные характеристики производительности системы.

Следует отметить статьи [154, 155, 156] коллектива под руководством С. Kim. В них рассмотрены двухфазные СМО с конечными и бесконечными очередями, разными типами заявок и повторными требованиями на обслуживание. В работах представлены алгоритмы вычисления стационарного распределения вероятностей состояний. Авторами отмечается, что многофазные СМО являются удобной математической моделью для описания передачи информации в различных коммуникационных системах и сетях.

В 2017 году совместно российскими и белорусскими исследователями опубликовано несколько статей по изучению многофазных СМО с *BMAP* и *MAP* потоками заявок. В статье [175] приведен обзор литературы, посвященной изучению СМО с марковскими и *BMAP*-потоками и их применению к моделированию телекоммуникационных сетей. В данном обзоре отмечены наиболее значимые работы по изучению как однофазных, так и многофазных СМО (в основном – двухфазных). В [176] проведено сравнительное исследование различных методов сокращения числа

состояний многофазных СМО с МАР-потокм заявок. Полученные результаты показывают, что с помощью МАР-потока можно решить проблему взрывного роста числа состояний многофазных СМО. В статье [76] рассмотрена двухфазная СМО с ВМАР-потокм заявок, первая фаза которой представлена одноканальной системой с повторными вызовами, вторая – многоканальная система без очереди. Авторами выведено условие существования стационарного режима и найдены стационарные характеристики производительности такой СМО.

Одними из последних вышедших работ являются [139, 169]. В первой представлен аппроксимационный метод определения стационарных характеристик двухфазных СМО. Во второй – численные результаты исследования двухфазной СМО с МАР-потокм и без блокировок.

Можно видеть, что аналитический аппарат в области немарковских СМО с групповым поступлением активно развивается, рассматриваются все более сложные задачи, включая многофазные системы. Однако приходится констатировать, что в литературе не уделяется достаточного внимания СМО с двумя и более фазами, групповым поступлением и обслуживанием заявок на какой-либо фазе. Автору удалось найти лишь одну работу [173], в которой представлены результаты аналитического исследования частного случая трехфазной СМО. Причина этого, по-видимому, связана со сложной структурой системы и большим количеством влияющих на нее факторов. Поэтому, наряду с аналитическим исследованием, необходимо использовать также и методы имитационного моделирования.

1.6. Применение имитационного моделирования в изучении систем массового обслуживания

Имитационное моделирование – метод моделирования, при котором воспроизводится функционирование исследуемой системы с помощью специальных компьютерных программ и технологий программирования путем последовательного выполнения большого количества элементарных операций [101].

Данный метод применяется в случае, когда аналитическое исследование модели сложно, а применение точных численных методов требует огромных вычислительных ресурсов. Например, для нахождения обратной матрицы известна формула, но обратить

неразрезанную матрицу большой размерности достаточно сложно [71]. При имитационном моделировании процесс функционирования системы воспроизводится с помощью вычислительного алгоритма и специально спланированного вычислительного эксперимента. Имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания, что позволяет при заданных начальных условиях и числовых параметрах оценить любые характеристики функционирования изучаемого объекта [71, 122], предусмотренные программой исследования.

Напомним, что имитационное моделирование, как и любой численный метод, обладает определенными недостатками. Во-первых, для получения требуемой точности решения задачи необходимо, как правило, многократно повторять эксперимент, при этом скорость сходимости обычно достаточно низкая. Во-вторых, не гарантируется отыскание глобального решения, поэтому приходится многократно моделировать процесс функционирования системы, варьируя начальные данные. В этом случае широко применяется метод статистических испытаний, также известный, как метод Монте-Карло [4, 71, 122].

Зарождение имитационного моделирования связано с работой N. Metropolis и S. Ulam [166] в конце 1940 гг., в которой был представлен метод Монте-Карло. Этот метод применялся в работах по ядерной технике, затем получил распространение и в других областях.

Несмотря на указанные недостатки, метод имитационного моделирования часто является единственным доступным методом исследования сложных систем. Для реализации имитационных моделей используются различные инструментальные средства.

1.6.1. Инструментальные средства имитационного моделирования

Существуют два направления развития средств имитационного моделирования (ИМ). Первое из них – универсальные языки программирования (C++, Object Pascal и др.), которые обеспечивают широкие возможности для построения имитационных моделей. Второе направление представляют комплексы имитационного моделирования (AnyLogic, Arena, GPSS World и т.д.). Такие комплексы используют

специализированные языки программирования и особые процедуры, в частности, автоматическое формирование определенных типов данных, необходимых в процессе имитационного моделирования. Комплексы имитационного моделирования позволяют за сравнительно короткий срок составлять программные модели довольно сложных систем.

Комплексы имитационного моделирования появились довольно давно, почти одновременно с языками Fortran и Algol1. В начале своего развития в 70-х годах они развивались экстенсивно, в основном из-за увеличения их числа и расширения областей применения [71, 83]. К настоящему времени их развитие сменилось на интенсивное, т.е. за счет расширения функциональных возможностей. Это привело к тому, что на рынке остались наиболее известные и универсальные, не считая узкоспециализированных программ.

Наиболее широко используемые в настоящее время комплексы имитационного моделирования и реализующие их инструментальные средства подразделяются на несколько больших групп [83]:

- динамические системы (Dynamo, СЛАМ, Matlab + Simulink и др.);
- дискретно-событийные системы (AnyLogic, Arena, GPSS World и др.);
- системы агентного моделирования (AnyLogic, NetLogo и др.);
- системная динамика (AnyLogic, Arena, Simulab и др.).

Проанализируем некоторые из них.

Программный комплекс имитационного моделирования Arena от компании Rockwell Automation на данный момент занимает одно из лидирующих мест на рынке. Arena имеет множество модулей, набор шаблонов и графический интерфейс, в этом комплексе применяется язык имитационного моделирования SINAM и иерархическая структура создаваемых моделей, что повышает гибкость моделей и упрощает моделирование.

Второй популярный комплекс ИМ – AnyLogic. Этот программный продукт, предназначенный для создания моделей сложных объектов, процессов и систем. В AnyLogic поддерживается несколько методов имитационного моделирования: системная динамика, дискретно-событийное и агентное моделирование. Управление работой комплекса осуществляется через графический интерфейс.

GPSS World – общецелевая система имитационного моделирования, разработанная компанией Minuteman Software. Данный инструмент включает как дискретный, так и непрерывный методы моделирования, обладает некоторым уровнем интерактивности и визуального представления информации.

Следует отметить, что при использовании комплексов имитационного моделирования главной проблемой может стать недостаток встроенных функций для реализации имитационной модели, в частности, в вышепредставленных комплексах отсутствуют функции генерирования *ВМАР*-потоков, т.е. необходимо самостоятельно добавлять требуемый функционал. Таким образом, в значительной степени нивелируется главное преимущество комплексов имитационного моделирования – сокращение затрат времени на реализацию имитационной модели.

Применение комплексов имитационного моделирования (GPSS, AnyLogic и т.д.) для изучения сложных систем ограничено еще и по следующим причинам:

- вследствие «универсальности» интерпретатора счет в данных средах замедляется в десятки раз [107];
- использование моделирующих систем не всегда позволяет реализовать нужные вычисления. Так, в GPSS World нельзя, к примеру, непосредственно получить распределение времени пребывания в системе заявки в зависимости от номера в группе и др. [108];
- готовые комплексы сложны и используют собственную структуру входных и выходных данных, что осложняет их использование в качестве модуля для других программных систем.

Универсальные языки программирования в свою очередь, предоставляют более широкие возможности при программной разработке моделируемой системы. Минусом их использования является существенные затраты времени на реализацию имитационной модели.

1.6.2. Примеры решения задач массового обслуживания методом имитационного моделирования

В работе Э.Ф. Бабурова и В.К. Маригодова [6] предложена имитационная модель системы распределения электроэнергии между потребителями, основанная на замкнутой

многоканальной СМО. Авторами представлен алгоритм функционирования замкнутой СМО специального вида. Для программной реализации имитационной модели были использованы универсальные языки программирования. В результате моделирования были получены оценки вероятности отказа в обслуживании заявок, среднего числа заявок в системе и другие характеристики.

В статье [23] С.В. Гаевой рассмотрел процесс обслуживания в многоканальной СМО. Им была исследована задача отыскания вероятности отказа в обслуживании для заявки в динамическом режиме, а также создано средство для определения вероятностного статуса отдельной заявки в системе путем имитации. Разработка имитационной модели велась с использованием компилятора GCC (язык программирования C, C++). Для простейшего примера получены вероятностно-временные характеристики, которые позволяют предсказать будущее поведение заявки.

В статье А.А. Орловой [96] исследована работа сервера с коррелирующим неоднородным входящим потоком заявок, который представляет собой связанные между собой заявки, т.е. заявка не может быть обработана до тех пор, пока в очереди есть заявки, связанные с данной. В статье рассмотрены различные способы обработки такого потока в немарковской СМО, а также вариант обработки заявки для случая отсутствия связанных заявок. Автор утверждает, что для подобных СМО достаточно трудно, а порой и невозможно получить аналитическое решение. В связи с этим была построена имитационная модель, чтобы проанализировать процесс обслуживания коррелирующего потока заявок в немарковской СМО. Для программной реализации имитационной модели применялся дискретно-событийный метод и универсальные языки программирования.

В работе [4] изучались крупные транспортные системы, в частности, промышленные. Для исследования таких систем авторы применили разработанную ими имитационную систему. Ее особенностью является то, что элементы транспортных систем такие, как железнодорожные пути и грузовые фронты, представлены в виде «бункера» с определенной вместимостью, а локомотивы и бригады осмотра – логические элементы с двумя возможными состояниями – «занято» или «свободно». Можно видеть, что «бункер» является аналогом очереди, а логический элемент – канал в СМО. Имитационная система реализована с использованием универсальных языков программирования. Близкой по тематике является работа [37], в которой проведено

моделирование топливно-энергетического комплекса при воздействии крупных возмущений.

Особенности моделирования пассажирских микро-ЛТС освещены в статье [35], в которой движение пассажиропотоков определенной структуры моделируется с использованием пакета имитационного моделирования (AnyLogic). Предполагается, что пассажиры движутся в непрерывном пространстве, реагируя на различные виды препятствий в виде стен и других пассажиров. Поскольку каждая микро-ЛТС имеет уникальную планировку и структурные особенности, применение последней модели ограничено.

Стоит отдельно упомянуть работы по изучению объектов, относящихся к сфере железнодорожного транспорта, проводимые в научной школе А.Л. Казакова.

Так, в [84] предложена модель вагонопотока, входящего на железнодорожную грузовую станцию со стороны ж/д транспорта с учетом его суточной неравномерности. Для исследования этой системы была создана двухуровневая имитационная модель, позволяющая оптимизировать технические параметры функционирования станции с учетом суточной неравномерности вагонопотока для повышения ее производительности. При этом использован метод статистических испытаний, реализация модели осуществлена в среде программирования MatLab.

В диссертационной работе Р.Н. Phu [126] создана модель железнодорожной станции общего пользования в виде двухфазной СМО. Поскольку модель имеет многоуровневую структуру (уровень потока и две фазы обслуживания), исследовать ее аналитически оказалось невозможно, поэтому разработана имитационная модель, с помощью которой удалось получить качественные и количественные оценки показателей процесса переработки грузов с учетом влияния случайных факторов. Имитационная модель реализована на языке программирования Pascal в среде разработки Delphi в виде модуля к программной системе «МодФорТ».

Выводы по главе 1

Микрологистические транспортные системы являются сложными многоуровневыми объектами, подверженными влиянию различных, как внешних, так и внутренних факторов. Автором проведен анализ структуры микро-ЛТС, математических

моделей, применяемых для их описания, а также современного состояния исследований в области теории массового обслуживания и имитационного моделирования. В результате сделаны следующие выводы:

Во-первых, в микро-ЛТС, как правило, выполняются однотипные действия: принятие транспортного средства, его разгрузка, складирование товара, погрузка для дальнейшей отправки и так далее, поэтому для описания поведения таких систем хорошо подходят модели ТМО (СМО).

Во-вторых, из-за сложной структуры микро-ЛТС заявка проходит через несколько подсистем обслуживания, поэтому использование однофазных СМО приведет к сильному обобщению модели объекта, потере точности и адекватности описания внутренних процессов. В этой связи, необходимо использовать многофазные СМО, применение которых позволит отразить базовую структуру, определить в ней «узкие места» и описать особенности функционирования изучаемой системы.

В-третьих, процессы прибытия в микро-ЛТС во многих случаях не отвечают свойству ординарности, при этом в систему может одновременно поступать несколько независимых потоков заявок, поэтому для описания транспортных потоков с микро-ЛТС целесообразно применять *ВМАР*-модель.

В-четвертых, вследствие сложности изучения многофазных СМО аналитическими методами, необходимо в ходе исследования использовать также и методы имитационного моделирования.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА ЗАЯВОК В МИКРОЛОГИСТИЧЕСКИЕ ТРАНСПОРТНЫЕ СИСТЕМЫ

Глава посвящена построению моделей входящих материальных потоков в две различные микро-ЛТС и состоит из трех разделов. В первом строится предметная модель входящего материального (грузового, пассажирского) потока и проводится выбор математического аппарата для ее описания. Во втором строится математическая модель поступающего на железнодорожную станцию вагонопотока. В третьем – математическая модель входящего в транспортно-пересадочные узлы мегаполиса пассажиропотока. Статистические данные для моделирования были получены по результатам натурных обследований, выполненных автором лично либо при его участии. Часть имеющихся данных использовалась для построения моделей, остальные – для ее верификации путем сравнения с результатами моделирования по Т-критерию Вилкоксона.

2.1. Выбор модели входящего потока заявок в микрологистические транспортные системы

Как уже отмечалось в главе 1, микро-ЛТС являются сложными системами, функционирование которых зависит от двух составляющих: входящего материального потока и структуры системы. Построение модели подобных объектов рекомендуется начать с выбора адекватного способа математического описания входящих материальных потоков, учитывающего их особенности и структуру [15].

Согласно канонам математического моделирования [106], после определения объекта исследования необходимо составить его предметную модель, затем уже на ее основе строить математическое описание.

Предметной моделью называют упрощенное описание объекта исследования в рамках той области знаний, в которой рассматриваются подобные объекты [106].

Предметная модель. Рассмотрим структуру поступающих в микро-ЛТС материальных потоков и выделим наиболее значимые параметры – элементы и их свойства, которые будем учитывать в модели. Отметим, что материальные потоки

определяется двумя факторами: поступающим в систему транспортным потоком и перевозимыми в нем грузами (пассажирами).

Под *транспортным потоком* будем понимать упорядоченное движение транспортных средств (поездов, автобусов, автомобилей и др.) [104].

Во входящем материальном потоке значимыми параметрами являются: вид поступающего транспорта, время его прибытия в микро-ЛТС и число перевозимых грузов (пассажиров) [102].

В микро-ЛТС, как правило, стыкуются несколько видов транспорта: железнодорожный, автомобильный и др. Следовательно, в систему поступает несколько транспортных потоков с различными характеристиками: временем прибытия транспортного средства в микро-ЛТС и числом перевозимых в нем грузов (пассажиров).

В большинстве случаев моменты времени поступления транспортных единиц являются случайными величинами в силу воздействия различных непредвиденных факторов, например, дорожной обстановки, погодных условий, скорости погрузки/выгрузки и т.п. [98]. Отметим, что распределение этой СВ зависит от конкретного вида транспортного потока и может меняться от внешних факторов, в частности, суточного цикла.

Поступившую транспортную единицу необходимо рассматривать как группу элементов (пассажиров, товаров и др.), которые обслуживаются отдельно друг от друга. Размеры групп примем СВ, так как они, в большинстве случаев, заранее неизвестны [102]. Максимальный размер и распределение числа элементов в прибывшей группе зависит от вида транспорта.

К параметрам, которые явно не учитываются в модели относятся: а) направление движения транспортного потока; б) пройденное расстояние; в) время и скорость в пути; г) наличие грузов (пассажиров), не предназначенных для рассматриваемой микро-ЛТС; д) тип и свойства груза (размер, вес, и др.); е) стоимость груза и затраты на его перевозку. Параметры а), б) и в) не учитываются, поскольку в рамках данной работы микро-ЛТС рассматривается как самостоятельный элемент транспортно-логистической системы, данные характеристики не влияют на ее функционирование и могут быть опущены. Параметр г) учитывается опосредованно – через случайный размер поступающей группы грузов (пассажиров) в микро-ЛТС. Параметр д) не рассматривается в модели входящего материального потока. Однако он опосредованно

учитывается при построении модели работы микро-ЛТС (п. 3.1) – через определенный маршрут движения заявки данного типа сквозь систему и ее обслуживания в специализированных устройствах. Определение финансово-экономических показателей материального потока е) находятся за рамками данного диссертационного исследования.

Таким образом, входящий материальный поток в микро-ЛТС состоит из транспортных потоков различных видов, каждый из которых характеризуется случайными временем поступления транспорта в систему и размерами партий перевозимых грузов (групп пассажиров). Отметим, что интенсивность поступления транспортных средств в микро-ЛТС зависит от его вида и может изменяться со временем.

Математическая модель. Входящий материальный поток в микро-ЛТС можно рассматривать как последовательность событий (заявок), возникающих в системе в случайные моменты времени, т.е. случайный поток событий (см. 1.4).

В п. 1.4 были рассмотрены наиболее известные и используемые модели случайного потока событий: а) простейший поток, б) пуассоновский неординарный поток и в) *ВМАР*-поток. Для математического описания входящих материальных потоков в микро-ЛТС предлагается использовать *ВМАР*. Так, в отличие от моделей а) и б), в в) возможно одновременно учитывать поступление заявок группами случайного размера, изменение интенсивности поступления групп со временем, а также наличие нескольких потоков заявок с разными параметрами. Последнее позволяет описывать набор различных потоков заявок единой структурой, т.е. как один сложный поток.

Отметим, что изучение системы, в которую поступают несколько различных материальных потоков, может оказаться более трудной задачей, чем исследование системы с одним потоком сложной структуры [30]. Поэтому применение *ВМАР*-потока актуально для целей данного исследования.

Для построения *ВМАР* модели входящих материальных потоков необходимы следующие данные: количество отдельных потоков заявок, входящих в микро-ЛТС; распределения времени между поступлением групп заявок и размеров групп в каждом потоке. Можно видеть, что эти данные в основном носят стохастический характер. Для их получения мы используем теоретические основы, представленные в п. 1.2.3. Количество типов заявок и вероятности их появления зависят от свойств работы микро-ЛТС, поэтому они определяются при описании структуры системы в п. 3.1.

Забегаая вперед, отметим: в ходе выполнения исследования установлено (см. п. 2.2.4 и п. 2.3.1), что потоки заявок, входящие, как в грузовые, так и в пассажирские транспортные системы, имеют схожую структуру с потоками информации в телекоммуникационных системах. Так, они состоят из нескольких отдельных групповых потоков, время между прибытиями групп заявок имеет экспоненциальное распределение, а их размеры – случайные величины. Поэтому *ВМАР* оказался адекватной и универсальной моделью для описания рассмотренных потоков заявок. Полученные модели далее применяются при решении модельной (глава 4) и практических задач (глава 5).

Далее представлено построение входящих потоков в грузовую (п. 2.2) и пассажирские (п. 2.3) микро-ЛТС в виде *ВМАР*-потоков.

2.2. Математическая модель входящего на железнодорожную станцию вагонопотока

Поездопоток – число поездов, которые поступают, проследуют или отправляются с железнодорожной станции за определенный промежуток времени [102].

Под *вагонопотоком* будем понимать число вагонов, поступающих или следующих через железнодорожную станцию за определенный промежуток времени [102]. Вагонопоток определяется двумя факторами: интенсивностью поездопотока и распределением вагонов в поездах.

Для построения математической модели входящего вагонопотока используем статистические данные, которые были получены П.А. Парсюровой путем натурного обследования одной из находящихся на главном ходу Транссибирской железнодорожной магистрали промежуточных железнодорожных станций. Данные собраны в период с 02.05 по 20.05.2013 года и включают в себя информацию о 17 дневных (с 6.00 до 18.00) и 16 ночных (с 18.00 до 6.00) сменах. Общее количество прибытий составило 2857 поездов. По каждому поезду фиксировались пять моментов первичного технологического учета (МПТУ): количество вагонов, время прибытия по расписанию, время отправления по расписанию, фактическое время прибытия, фактическое время отправления. Таким образом, выборка Ψ включает 2857 векторных элементов, компонентами которых являются МПТУ.

Рассмотрим две выборки Ξ и Ω из Ψ . Первая (Ξ) необходима для верификации стохастической модели входящего вагонопотока после построения последней (п. 2.2.4). Как известно [68], минимальный объем репрезентативной выборки в подобных случаях составляет 350 элементов. Примем размер выборки Ξ равным удвоенному значению от минимального, причем элементы отберем случайным образом. Вторую выборку Ω используем для построения стохастической модели входящего вагонопотока (пп. 2.2.1–2.2.4). Она включает в себя оставшуюся после извлечения Ξ часть выборки Ψ и состоит из 2157 векторных элементов.

2.2.1. Определение закона распределения количества вагонов в поезде

Пассажирские и грузовые поезда будем рассматривать отдельно, поскольку их характеристики существенно отличаются. Во-первых, средняя длина пассажирских поездов составляет 12 вагонов, грузовых – 70. Во-вторых, к данным категориям поездов предъявляют различные требования по выполнению графика движения [86]. Рассмотрим две выборки из Ω :

- выборка Ω_{nacc} , которая включает 511 векторных элементов, полученных при обследовании пассажирских поездов;
- выборка Ω_{gp} , включающая 1646 векторных элементов, которые получены при обследовании грузовых поездов.

Распределение количества вагонов в пассажирских поездах. Рассмотрим количество вагонов в пассажирском поезде как случайную величину X_1 . Ее выборка ω_1^{nacc} приведена в табл. 6.1 Приложения и содержит $n = 511$ элементов из Ω_{nacc} . Поезда, у которых количество вагонов равно 2, 3 и 4, относятся к категории поездов специального назначения (рабочие), поэтому элементы с такими значениями не будем учитывать. Таким образом, рассмотрим число вагонов в поезде в диапазоне [5;20], в который попало 507 элементов выборки.

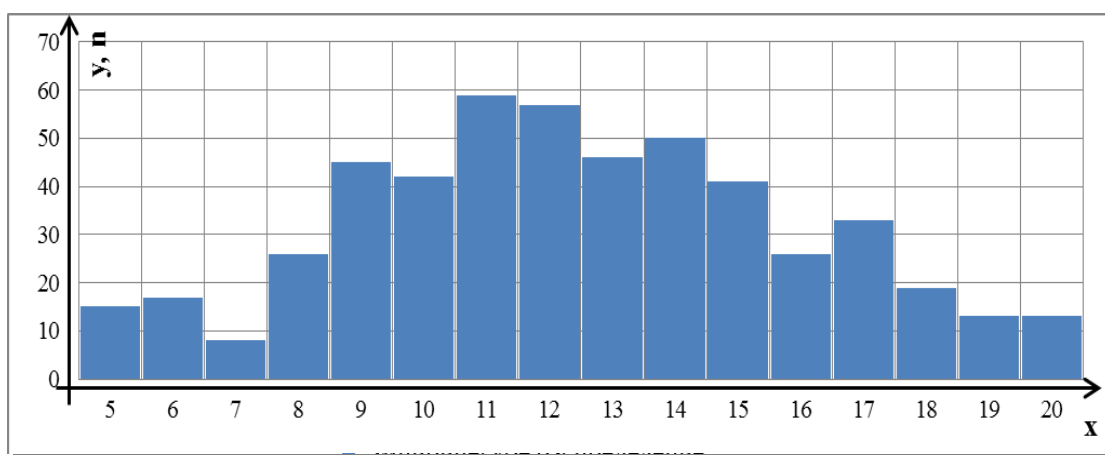
Далее в табл. 2.1 *a* представлен дискретный вариационный ряд выборки ω_1^{nacc} с числом вариантов $k = 16$. В строке d_i содержатся варианты, а в строке n_i – частоты.

Таблица 2.1 а. Дискретный вариационный ряд выборки ω_1^{nacc}

d_i	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	15	17	8	26	45	42	58	57	46	50	41	27	33	19	13	13

По дискретному вариационному ряду построим гистограмму выборки ω_1^{nacc} (рис. 2.1).

По оси Ox представлено количество вагонов в составе, по Oy – число поездов соответствующей длины.

Рис. 2.1. Гистограмма выборки ω_1^{nacc}

По виду гистограммы (рис. 2.1) можно предположить, что ДСВ X_1 подчинена биномиальному закону. Однако для описания СВ X_1 будем использовать нормальный закон распределения. Во-первых, этот закон имеет большое значение в математической статистике, поскольку тесно связан с центральной предельной теоремой [19, 81]. Во-вторых, он применяется для описания дискретных данных при решении различных технических, экономических и других типов задач [2, 81].

Поскольку ДСВ аппроксимируется непрерывным законом распределения, то для удобства далее применим интервальные вариационные ряды, которые строятся следующим образом: весь диапазон наблюдаемых значений из выборки делим на конечное число интервалов равной длины $h = 1$; для каждого из них найдем границы b_i и b_{i+1} таким образом, чтобы середины интервалов (варианты) d_i являлись целыми числами; далее определим частоту n_i – число элементов выборки, значения которых попали в интервал i .

В табл. 2.1 б представлен интервальный вариационный ряд выборки ω_1^{nacc} с числом интервалов $k = 16$ и $h = 1$. В строке $b_i - b_{i+1}$ содержатся границы интервалов, в d_i – варианты, а в n_i – частоты.

Таблица 2.1 б. Интервальный вариационный ряд выборки ω_1^{nacc}

$b_i - b_{i-1}$	4,5 – 5,5	5,5 – 6,5	6,5 – 7,5	7,5 – 8,5	8,5 – 9,5	9,5 – 10,5	10,5 – 11,5	11,5 – 12,5	12,5 – 13,5	13,5 – 14,5	14,5 – 15,5	15,5 – 16,5	16,5 – 17,5	17,5 – 18,5	18,5 – 19,5	19,5 – 20,5
d_i	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	15	17	8	26	45	42	58	57	46	50	41	27	33	19	13	13

Найдем статистические оценки параметров нормального распределения по представленному в табл. 2.1 б интервальному вариационному ряду. С помощью метода моментов (см. п. 1.2.3) мы получили: выборочное среднее $\mu = 12,89$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3,88$. Таким образом, можно высказать следующую статистическую гипотезу: количество вагонов в пассажирском поезде подчинено нормальному закону распределения с параметрами $\mu = 12,89$ и $\sigma = 3,88$.

Далее на рис. 2.2 построена гистограмма числа вагонов в пассажирских поездах и график функции плотности нормального распределения $N(12,89; 3,88)$. По оси Ox представлено количество вагонов в поезде, Oy – эмпирические частоты и значения плотности распределения.

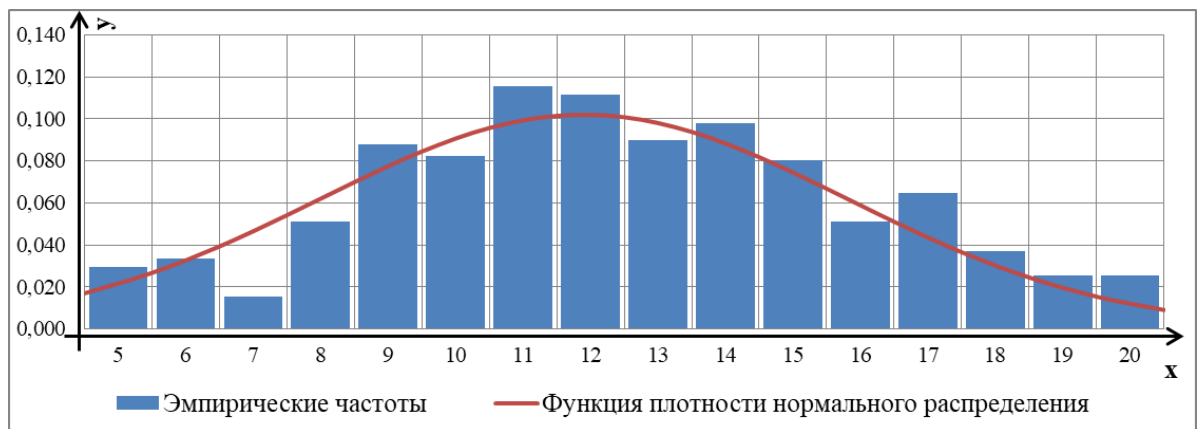


Рис. 2.2. Гистограмма выборки ω_1^{nacc} и график функции плотности нормального распределения с параметрами $\mu = 12,89$ и $\sigma = 3,88$

Можно видеть (см. рис. 2.2), что геометрическая иллюстрация может служить косвенным подтверждением корректности гипотезы.

Проверим высказанную гипотезу о том, что СВ X_1 распределена по $N(12,89; 3,88)$ с использованием двух критериев согласия: Пирсона (χ^2) и Колмогорова (K) (см. п. 1.2.3).

Наблюдаемое значение критерия Пирсона определим по формуле (1.1), где $w_i = n_i / n$, n_i представлены в табл. 2.1, $\sum_{i=1}^k n_i = n$, $p_i = \int_{b_i}^{b_{i+1}} f(x)dx$, $f(x)$ – функция плотности нормального распределения с параметрами $\mu = 12,89$ и $\sigma = 3,88$, b_i и b_{i+1} – границы интервала с вариантой d_i (табл. 2.1). В результате мы получили $\chi^2_{набл} = 22,27$. Критическое значение составило $\chi^2_{крит} = 22,4$ при количестве степеней свободы $r = k - s - 1 = 16 - 2 - 1 = 13$ и уровне значимости $\alpha = 0,05$. Наблюдаемое значение критерия Колмогорова для тех же данных по формуле (1.2) равно $K_{набл} = 0,889$, критическое – $K_{крит} = 0,89$ при $\alpha = 0,05$.

Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$ и $K_{набл} < K_{крит}$, можно заключить, что нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении с параметрами $\mu = 12,89$ и $\sigma = 3,88$ числа вагонов в пассажирских поездах по обоим критериям.

Распределение числа вагонов в грузовых поездах. За период наблюдения проследовало 1646 грузовых поездов, в которых число вагонов изменялось от 4 до 100. Рассмотрим интервал $[30;100]$, в него попало 1570 элементов из $\Omega_{гр}$ (т.е. подавляющее большинство), которые объединим в выборку ω_1^{gp} . На рис. 2.3 представлена гистограмма выборки ω_1^{gp} . По Ох отложены середины интервалов, по Оу – частоты.



Рис. 2.3. Гистограмма выборки ω_1^{gp}

Подобрать какой-либо стандартный закон распределения по этой выборке не удалось. Однако для поездов дальнего следования (наиболее значимая и интересующая нас группа поездов), длина которых изменяется от 60 до 80 вагонов, оказалось возможным построить комбинированное распределение.

Далее будем рассматривать только грузовые поезда дальнего следования. Остальные категории грузовых поездов (местные, почтово-багажные и др.) не исследуются.

Рассмотрим СВ X_2 – число вагонов в грузовом поезде, которое изменяется от 61 до 79. Поезда такой длины встретились в 1051 случаях, обозначим эту выборку через ω_2^{cp} . По аналогии с пассажирскими поездами построим для выборки ω_2^{cp} интервальный вариационный ряд с числом интервалов $k = 19$ и шириной каждого интервала $h = 1$. В табл. 2.2 строка $b_i - b_{i+1}$ содержит границы интервалов, d_i – их середины, n_i – частоты.

Таблица 2.2. Интервальный вариационный ряд выборки ω_2^{cp}

$b_i - b_{i+1}$	60,5 – 61,5	61,5 – 62,5	62,5 – 63,5	63,5 – 64,5	64,5 – 65,5	65,5 – 66,5	66,5 – 67,5	67,5 – 68,5	68,5 – 69,5	69,5 – 70,5	70,5 – 71,5	71,5 – 72,5	72,5 – 73,5	73,5 – 74,5	74,5 – 75,5	75,5 – 76,5	76,5 – 77,5	77,5 – 78,5	78,5 – 79,5
d_i	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
n_i	22	22	20	40	49	49	123	153	80	102	80	62	69	41	43	38	33	16	9

На основе вариационного ряда построим гистограмму, изображенную на рис. 2.4. По ее виду можно (по аналогии с пассажирскими поездами) высказать гипотезу о том, что СВ X_2 подчинена нормальному закону распределения, параметры которого мы оценили с помощью метода моментов и равны $\mu = 69$ и $\sigma = 6,4$.

Далее на рис. 2.4 по оси Ox отложено количество вагонов в поезде (варианты), по оси Oy – эмпирические частоты и значения плотности распределения.

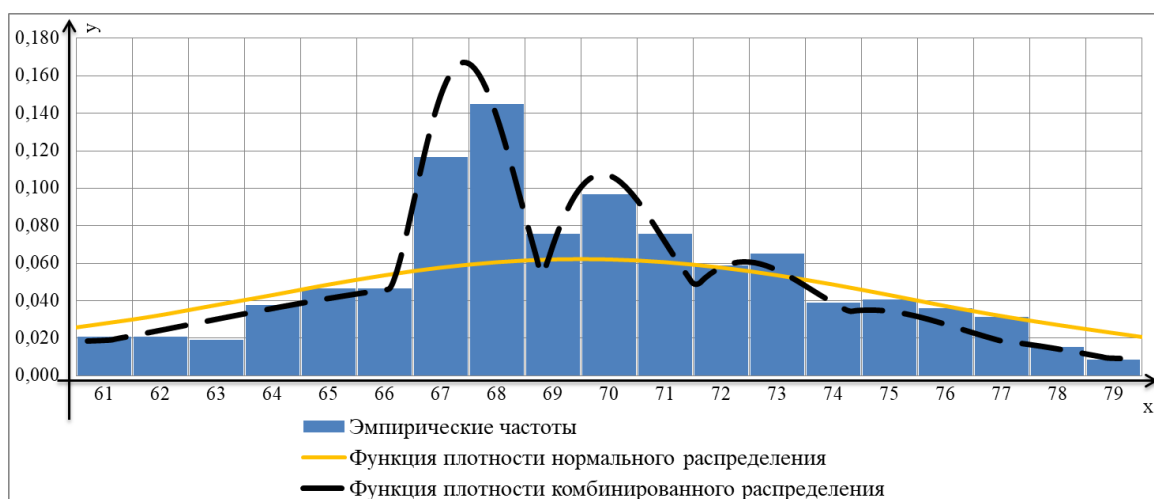


Рис. 2.4. Гистограмма выборки ω_2^{cp} , графики функций плотности нормального распределения с параметрами $\mu = 69$ и $\sigma = 6,4$ и комбинированного распределения с параметрами $\mu = 69$; $\sigma = 6,4$; $\nu = 1,15$; $\varphi = 0,86$; $\theta = 1,74$; $\kappa = 1,73$; $\rho = 0,4876$

В результате проверки данное предположение, однако, отвергается как по критерию Пирсона, так и по критерию Колмогорова.

При внимательном рассмотрении статистических и теоретических данных видно (см. рис. 2.4), что эмпирические частоты при значениях абсциссы 67, 68, 70, 71 и 73 существенно превосходят значения функции плотности нормального распределения (теоретические значения). Для вариант 63, 66 и 74 эмпирические частоты, наоборот, меньше теоретических значений. Учитывая то, что число наблюдений достаточно велико (1051), можно заключить, что эти различия носят неслучайный характер.

В [125, 127] применен специальный закон распределения для описания числа вагонов в прибывающем поезде, который строится на основе комбинации двух законов распределения.

Поступим аналогичным образом, применим для описания числа вагонов в грузовом поезде комбинированный закон распределения (КРЗ).

Функция плотности комбинированного распределения (ФПКР) имеет следующий вид:

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 61), (79; \infty), \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} - 0,01, & x \in [61; 66], \\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} - 0,01 + \rho B(x-66, \kappa, \theta) |\cos((x-60)\nu + \varphi)|, & x \in (66; 79]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь $B(x, \kappa, \theta)$ – функция плотности гамма-распределения, которая включена в $B(x, \kappa, \theta) |\cos(\nu x + \varphi)|$ – функцию затухающего колебания, $\kappa, \theta, \nu, \varphi$ – их параметры; μ и σ – параметры нормального распределения; ρ – коэффициент нормировки. В основе функции затухающего колебания лежит гамма-распределение, так как с помощью него удалось получить такую функцию плотности распределения, при которой теоретические вероятности соответствуют эмпирическим частотам в вариантах 67, 68, 70, 71 и 73 (табл. 2.2).

Далее найдем параметры КЗР.

Носителем функции будем называть множество, на котором эта функция отлична от нуля.

Обозначим носитель ФПКР (2.1) через X_f , носитель функции плотности нормального распределения – X_N , а носитель функции затухающего колебания – X_B . Можно видеть, что $X_N = \{x | x \in (-\infty, \infty)\}$ и $X_B = \{x | x \in [0, \infty)\}$. В этом случае при $\forall \mu, \sigma, v, \varphi, \theta, \kappa, \rho \in f_k(x)$ выполнение $X_f = \{x | x \in [61, 79]\}$ не гарантировано. Из этого следует $f_k(x) \neq 0 | \forall \mu, \sigma, v, \varphi, \theta, \kappa, \rho \in \mathbb{R}, \forall x \notin [61, 79]$, при этом учитывая свойство функции распределения $\int F(x)dx = 1$ получаем, что $\int_{61}^{79} f_k(x)dx \neq 1$. Поэтому подберем параметры ФПКР (2.1) так, чтобы $f_k(x) = 0 | x \notin [61, 79]$ и $J = \left| \int_{61}^{79} f_k(x)dx - 1 \right| \rightarrow \min_{\mu, \sigma, v, \varphi, \theta, \kappa, \rho}$.

В основе КЗР лежит нормальный закон, для параметров которого μ и σ ранее уже найдены оценки: $\mu = 69$ и $\sigma = 6,4$. Найдем оставшиеся $v, \varphi, \theta, \kappa$ и ρ , чтобы $J \rightarrow \min_{v, \varphi, \theta, \kappa, \rho}$.

Их значения подберем с помощью метода покоординатного спуска на области $v > 0$, $\varphi > 0$, $\theta > 0$, $\kappa > 0$, $0 < \rho \leq 1$ с шагом $h_f = 0,01$ и точностью $\varepsilon = 0,0001$. Наименьшее значение $J^* = 0,00004$ достигается при $v = 1,1498$; $\varphi = 0,8617$; $\theta = 1,7389$; $\kappa = 1,7309$; $\rho = 0,4876$.

Чувствительность функции J по отношению к параметрам v, φ, θ и κ низкая, поэтому округлим их значения до двух знаков после запятой; ρ чувствительность выше, поэтому его значение оставим с четырьмя знаками после запятой.

Выдвинем гипотезу о том, что СВ X_2 подчинена комбинированному закону с ФПКР (2.1) и следующими параметрами: $\mu = 69$; $\sigma = 6,4$; $v = 1,15$; $\varphi = 0,86$; $\theta = 1,74$; $\kappa = 1,73$; $\rho = 0,4876$. При таких параметрах $\int_{61}^{79} f_k(x)dx = 0,99996$. Подобное отличие от единицы является для целей исследования несущественным. График ФПКР представлен на рис. 2.4.

Проверим выдвинутую гипотезу. Наблюдаемые значения критерия Пирсона равно $\chi^2_{набл} = 19,21$, критерия Колмогорова – $K_{набл} = 0,53$. Они не превосходят критические $\chi^2_{крит} = 19,68$ и $K_{крит} = 0,89$ (см. п. 1.2.3) при $r = 11$ и $\alpha = 0,05$. Следовательно, нет оснований отвергнуть выдвинутую гипотезу.

2.2.2. Исследование отклонений движения поездов от графика

Исследуем другие важные характеристики входящего вагонопотока – отклонения движения поездов от графика.

Железнодорожное сообщение в России осуществляется по графику движения поездов (ГДП). При этом в силу причин техногенного характера или из-за человеческого фактора могут возникать различные отклонения. Основным нормативным документом для ведения статистики о выполнении ГДП является эталонное расписание движения [86].

Далее исследуется характер отклонений движения поездов от ГДП: процент проследований поездов по расписанию; выдвигаются гипотезы о виде закона распределения отклонений для пассажирских и грузовых поездов; находятся статистические оценки параметров этих законов; осуществляется проверка выдвигаемых гипотез по критериям Пирсона и Колмогорова.

Проверка гипотез о соответствии статистических данных и предполагаемого закона распределения проводится при уровне значимости $\alpha = 0,05$ для пассажирских поездов и при $\alpha = 0,01$ для грузовых поездов. Разный уровень значимости применяется из-за наличия большого числа категорий у грузовых поездов (специальные, сквозные поезда дальнего следования, передаточные составы и т.д.), к которым предъявляются различные требования по выполнению ГДП [86].

Анализ отклонений движения от графика для общей совокупности пассажирских поездов. Отклонения движения от графика (ОДГ) принимают как положительные (опережения), так и отрицательные (опоздания) значения. Автору не удалось установить отдельные законы распределения для выборок ОДГ с положительными и отрицательными значениями, поэтому данные значения рассматриваются по модулю.

Нам заранее неизвестно, какие именно значения примут ОДГ. При этом они могут отличаться друг от друга на сколь угодно малую величину, поэтому будем рассматривать их как НСВ. На рис. 2.5 представлена гистограмма выборки ω_2^{nacc} значений ОДГ по модулю в промежутке от 0 до 10 мин., в котором содержится 467 наблюдений из выборки Ω_{nacc} .

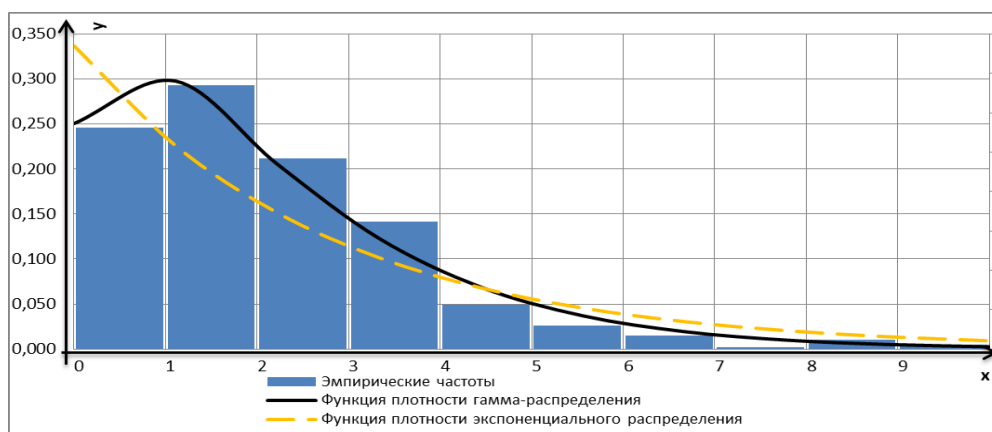


Рис. 2.5. Гистограмма выборки ω_2^{nacc} и графики функций плотности гамма-распределения с параметрами $\kappa = 1,757$, $\theta = 1,292$ и экспоненциального распределения с параметром $\lambda = 0,431$

На рис. 2.5 по Ох отложены интервалы времени в минутах, по Оу – эмпирические частоты и значения плотности распределения. Значения ОДГ, превышающие 10 мин., рассматриваются отдельно. По виду гистограммы предположим, что генеральная совокупность значений ОДГ подчинена гамма-распределению.

Как известно, чем меньше наблюдаемые значения критериев Пирсона и Колмогорова, тем, вообще говоря, лучше согласуются теоретическое и эмпирическое распределения. Однако минимальные значения этих критериев обычно достигаются при различных числовых параметрах закона распределения. Поэтому статистические оценки параметров гамма-распределения κ и θ определим в два этапа.

На первом этапе воспользуемся методом моментов для приближенного определения оценок κ и θ .

На втором этапе по полученным на предыдущем этапе оценкам найдем χ_M^2 и K_M – первичные наблюдаемые значения критериев Пирсона и Колмогорова соответственно. Далее уточним κ и θ с помощью метода покоординатного спуска с начальным шагом $h_f = 0,01$ и точностью $\varepsilon = 0,001$ (см. п. 1.2.3) по следующему комбинированному критерию, который основан на критериях Пирсона и Колмогорова

$$\eta = \delta \frac{K_{набл}}{K_M} + (1 - \delta) \frac{\chi_{набл}^2}{\chi_{\kappa, \theta}^2} \rightarrow \min. \quad (2.2)$$

Наблюдаемые значения критерия Пирсона определяется по (1.1), Колмогорова по (1.3). Параметр δ примем равным 0,5, поскольку используемые критерии значимости здесь равноправны. Переменными, по которым выполняется минимизация, являются κ и θ .

В результате получаются следующие статистические оценки параметров предполагаемого закона распределения $\kappa = 1,757$ и $\theta = 1,292$.

Выдвинем статистическую гипотезу, что генеральная совокупность значений ОДГ подчинена гамма-распределению с параметрами $\kappa = 1,757$ и $\theta = 1,292$. В этом случае критерии Пирсона и Колмогорова будут иметь следующие значения: $\chi^2_{набл} = 12,6$, $\chi^2_{крит} = 14,07$, $K_{набл} = 0,72$, $K_{крит} = 1,09$ (см. п. 1.2.3) при $r = 7$ и $\alpha = 0,05$. Так как $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$ и $K_{набл} < K_{крит}$ можно заключить, что нет оснований отвергнуть выдвинутую гипотезу по обоим критериям.

Результаты анализа ОДГ по категориям пассажирских поездов представлены в табл. 6.3 и табл. 6.5 Приложения.

Процент проследований пассажирских поездов по расписанию составляет $\zeta = 22,5\%$ (115 из 511 поездов), что является достаточно низким показателем. Тем не менее, основной процент ОДГ пассажирских поездов (93,1% от общего числа) сосредоточен в промежутке времени до 6 мин., что сопоставимо с показателями Немецкой железной дороги (Deutsche Bahn) [41]. На основании этого можно заключить, что системы диспетчерского управления реализуют график движения для пассажирских поездов на должном уровне с малыми отклонениями на участке.

Анализ отклонений движения от графика общей совокупности грузовых поездов. В результате анализа статистических данных мы обнаружили, что выборка ОДГ грузовых поездов ω_3^{zp} содержит большое число отклонений, превышающих допустимые требования по выполнению ГДП. При этом отрицательные отклонения (опережения) составляют 25,3% от общего числа наблюдений и в большинстве случаев принимают значения в интервале от 0 до 30 мин. Выполним анализ ОДГ по модулю, как и в случае с пассажирскими поездами.

Рассмотрим выборку ω_3^{zp} , которая включает 1562 элемента из выборки Ω_{zp} . Для нее построим гистограмму (рис. 2.6) с интервалами времени в один час. Отметим, что все наблюдаемые ОДГ из выборки ω_3^{zp} сосредоточены на промежутке времени от 0 до 15 часов. Также на рис. 2.6 представлены графики функций плотности гамма-распределения с параметрами $\kappa = 0,393$ и $\theta = 266$ и экспоненциального распределения с параметром $\lambda = 0,02$. По Ox отложены интервалы времени в часах, по Oy – эмпирические частоты и значения плотности распределения.

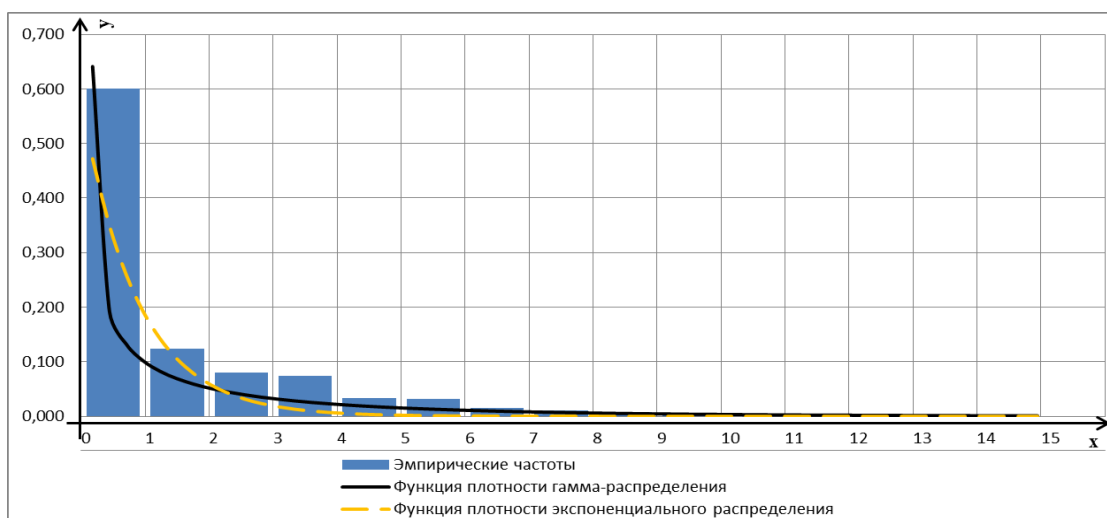


Рис. 2.6. Гистограмма выборки ω_3^{zp} и графики функции плотности гамма-распределения с параметрами $\kappa = 0,393$ и $\theta = 266$ и экспоненциального распределения с параметром $\lambda = 0,02$

По виду гистограммы (рис. 2.6) предположим, что генеральная совокупность подчинена гамма-распределению. Статистические оценки параметров этого закона распределения $\kappa = 0,393$ и $\theta = 266$ были получены также, как и при анализе ОДГ для общей совокупности пассажирских поездов: их первое приближение получено по методу моментов, а уточнение проведено методом покоординатного спуска по критерию (2.2).

Выдвинем гипотезу: генеральная совокупность подчинена гамма-распределению с параметрами $\kappa = 0,393$ и $\theta = 266$. Согласно критериям Пирсона и Колмогорова нет оснований отвергнуть ее, поскольку $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$ и $K_{набл} < K_{крит}$ при $\chi^2_{набл} = 23,41$, $\chi^2_{крит} = 26,2$, $K_{набл} = 0,56$, $K_{крит} = 0,99$, $\alpha = 0,01$ и $r = 12$.

Результаты анализа ОДГ грузовых поездов по категориям представлены в табл. 6.7 Приложения.

Выводы об ОДГ. В ходе анализа ОДГ получены следующие результаты.

1. Для пассажирских поездов график следования по расписанию реализуется должным образом, т.е. отклонения в 93,1% случаев не превышают 10 мин. Установлено, что ОДГ по модулю подчиняются гамма-распределению.

2. Для грузовых поездов ОДГ по модулю также подчиняется гамма-распределению. Точное выполнение ГДП грузовым транспортом составляет $\zeta = 41,4\%$, что выше, чем у пассажирского, это связано с менее жесткими требованиями к реализации ГДП для грузовых поездов [86]. Однако отклонения в половине случаев

превышают 60 мин., в 5% случаев ОДГ превышают 8 часов, т.е. на исследуемом участке для грузовых поездов наблюдается неустойчивое выполнение ГДП с существенными отклонениями.

3. Для большинства категорий поездов ОДГ не подчиняются наиболее естественному и распространенному нормальному закону распределения (исключение составили некоторые категории пассажирских поездов).

4. Для описания отклонений движения от графика по модулю практически во всех случаях оказалось пригодно гамма-распределение, причем для пассажирских поездов параметр формы k всегда не меньше единицы (равен единице для пригородных поездов), а для грузовых поездов всегда меньше единицы. Причины такого положения дел, по-видимому, кроются в технологии диспетчерской работы и требуют дополнительного изучения.

5. Наличие значительных ОДГ позволяет предположить, что поездопоток может быть представлен как поток событий, где время между прибытиями поездов – случайная величина.

2.2.3. Определение закона распределения времени между поступлениями поездов

Рассматриваемая железнодорожная станция находится на главном ходу Транссибирской магистрали, на нее поступают пассажирские и грузовые поезда, при этом они следуют в двух направлениях: нечетное – на запад; четное – на восток. Исследуем законы распределения межпоездного интервала в зависимости от вида поезда и его направления.

Под *межпоездным интервалом* будем понимать интервал времени между последовательным поступлением поездов на станцию.

Рассмотрим межпоездной интервал для различных категорий поездов как случайную величину, для которой определим закон распределения и статистические оценки параметров этих законов. Исследуем следующие четыре случайные величины:

– T_1 и T_2 – межпоездной интервал пассажирских поездов, следующих в нечетном и четном направлениях соответственно. Выборки этих СВ t_1 и t_2 представлены в табл. 6.8 Приложения;

– T_3 и T_4 – межпоездной интервал грузовых поездов, которые следуют в нечетном и четном направлениях соответственно. Выборки этих СВ t_3 и t_4 представлены в табл. 6.9 Приложения.

Элементы t_i^j выборок $t_i, i = \overline{1,4}$ получены следующим образом. Из Ω выбраны элементы $\bar{t}_i^j$ – фактическое время прибытия (или время отправления, если производилась стоянка) j -го поезда категории i . Далее найдены разности $t_i^j = \bar{t}_i^{j+1} - \bar{t}_i^j$ для $t_i, i = \overline{1,4}$.

Для выборок $t_i, i = \overline{1,4}$ (табл. 2.3) высказаны и проверены гипотезы о том, что значения межпоездного интервала во всех случаях подчинены экспоненциальному распределению с различными параметрами. Формирование статистических гипотез и их проверка проводились так же, как и в п. 2.2.2.

В табл. 2.3 приведены статистические оценки параметров экспоненциальных распределений и значения критериев Пирсона и Колмогорова для рассмотренных СВ.

Таблица 2.3. Результаты исследования выборок $t_i, i = \overline{1,4}$

Выборка	Размер	Параметр $\text{Exp}(\lambda)$	r	α	$\chi^2_{\text{набл}}$	$\chi^2_{\text{крит}}$	$K_{\text{набл}}$	$K_{\text{крит}}$
t_1	242	$\lambda_{1,1} = 0,57$	3	0,05	4,79	7,82	0,15	0,99
t_2	254	$\lambda_{1,2} = 0,59$	3	0,05	7,73	7,82	0,77	0,99
t_3	796	$\lambda_{1,3} = 2,1$	7	0,01	16,63	18,48	0,87	1,31
t_4	752	$\lambda_{1,4} = 1,92$	7	0,01	17,28	18,48	0,95	1,31

Сравнивая наблюдаемые значения критериев Пирсона и Колмогорова с критическими (табл. 2.3), делаем вывод о том, что нет оснований отвергать гипотезы об экспоненциальном распределении межпоездного интервала для рассмотренных категорий поездов.

Таким образом, во всех случаях для описания распределения времени между последовательным поступлением поездов на рассматриваемую станцию подходит экспоненциальное распределение.

По результатам представленного в п. 2.2.1 и п. 2.2.3 анализа составим сводные таблицы 2.4 и 2.5 с характеристиками входящих поездопотоков.

Таблица 2.4. Характеристики числа вагонов в поездах, входящих на ж/д станцию

Категория поезда	Закон распределения числа вагонов	Параметры
Пассажирские	Нормальное распределение	$\mu = 12,89; \sigma = 3,88$
Грузовые	КЗР (2.1)	$\mu = 69; \sigma = 6,4; v = 1,15;$ $\varphi = 0,86; \theta = 1,74; \kappa = 1,73;$ $\rho = 0,4876$

Таблица 2.5. Характеристики межпоездного интервала для входящих поездов на рассматриваемую ж/д станцию

№	Категория поезда	Направление	Распределение межпоездного интервала	Параметр
1	Пассажирские	Нечетное	Экспоненциальное	$\lambda_{1,1} = 0,57$
2		Четное	Экспоненциальное	$\lambda_{1,2} = 0,59$
3	Грузовые	Нечетное	Экспоненциальное	$\lambda_{1,3} = 2,1$
4		Четное	Экспоненциальное	$\lambda_{1,4} = 1,92$

Данные из таблиц 2.4 и 2.5 будут использованы далее для построения математической модели входящего на рассматриваемую ж/д станцию вагонопотока.

2.2.4. Применение модели *ВМАР* для математического описания входящих вагонопотоков

Выше было показано, что общий транспортный поток, прибывающий в микро-ЛТС, может иметь в своей структуре несколько различных потоков. Для единого описания таких потоков воспользуемся моделью *ВМАР*, которая представлена в п. 1.4.

Законы распределения, необходимые для построения математической модели входящего вагонопотока, были получены в пп. 2.2.1 – 2.2.3 и представлены в табл. 2.4 и 2.5.

Примем, что общий поездопоток состоит из пассажирских и грузовых поездов, движущихся по двум направлениям (четное и нечетное), т.е. является сложным и состоит из четырех отдельных поездопотоков. Значение межпоездного интервала для каждого поездопотока подчинено экспоненциальному распределению с различными параметрами (табл. 2.6). Также примем, что поезда поступают на станцию независимо друг от друга [41], тогда их прибытие можно описать как пуассоновские потоки событий.

Поток пассажирских вагонов определяется интенсивностью поступления пассажирских поездов $\lambda_{1,7} = \lambda_{1,1} + \lambda_{1,2} = 1,18$ в час и числом вагонов в них, которое распределено по нормальному закону с параметрами $\mu = 12,89$ и $\sigma = 3,88$;

Поток грузовых вагонов определяется интенсивностью поступления грузовых поездов $\lambda_{1,8} = \lambda_{1,5} + \lambda_{1,6} = 0,43$ в час с числом вагонов, которое распределено по КЗР (2.1) с параметрами $\mu = 69$; $\sigma = 6,4$; $\nu = 1,15$; $\phi = 0,86$; $\theta = 1,74$; $\kappa = 1,73$; $\rho = 0,4876$.

В п. 2.2.2 установлено наличие существенных ОДГ, из чего можно предположить, что заранее неизвестно, какой поезд (пассажирский или грузовой) прибудет на станцию в произвольный момент времени. Основываясь на данном предположении, найдем вероятности прибытия пассажирских и грузовых вагонов, которые необходимы для составления матриц ВМАР-потока. Интенсивность поступления пассажирских поездов на ж/д станцию равна 1,18 в час, грузовых – 0,43 поезда в час. Тогда общая интенсивность поступления поездов составит $\lambda = 1,61$ в час. Следовательно, вероятность прибытия группы пассажирских вагонов равна $1,18 / 1,61 = 0,73$, грузовых $0,43 / 1,61 = 0,27$.

Составим матрицы ВМАР-потока на основе полученных интенсивностей и вероятностей поступления различных типов вагонов, а также распределения их количества в прибывающей группе. Элементы матриц D_i , $i \geq 0$ вычисляются по формулам (1.7), где $\lambda_v = \lambda = \lambda_{1,7} + \lambda_{1,8} = 1,61$ – суммарная интенсивность поступления всех вагонопотоков. Максимальный размер прибывающей группы вагонов равен 79. В результате получаем 80 матриц D_i , $i = \overline{0, 79}$ размера 2×2 . При этом матрицы D_i , $i = \overline{1, 4}$ и D_i , $i = \overline{21, 60}$ будут нулевыми, в матрицах D_i , $i = \overline{5, 20}$ нулевые вторые строки, а в D_i , $i = \overline{61, 79}$ нулевые первые строки.

Вычислим среднюю интенсивность сконструированного ВМАР-потока. По формуле (1.8) найдем стационарные вероятности управляющего процесса $\pi = (0,73; 0,27)$, они равны вероятностям поступления пассажирских и грузовых вагонов. Далее по формуле (1.9) получаем

$$\bar{\lambda} = (0,73; 0,27) \begin{pmatrix} 1,175 & 0,435 \\ 1,175 & 0,435 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,61 = \lambda,$$

т.е. средняя интенсивность *ВМАР*-потока равна общей интенсивности поступления поездов. Следовательно, полученные матрицы можно использовать для описания входящего на ж/д станцию вагонопотока.

Таким образом, математическая модель входящего вагонопотока имеет вид *ВМАР*-потока, состоящего из матриц $D_i, i = \overline{0, 79}$ (табл. 6.10 Приложения).

Проверка однородности.

Верификация созданной модели входящего вагонопотока проводится по Т-критерию Вилкоксона (п. 1.2.3) с уровнем значимости $\alpha = 0,05$. Данный критерий используем для проверки соответствия имеющихся статистических данных и результатов генерирования *ВМАР*-потока, которые получим с помощью «Программного комплекса для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания» (глава 4).

Как упоминалось ранее, для верификации построенной модели используем выборку Ξ . Она включает 700 векторных элементов, компонентами которых являются пять значений моментов первичного технологического учета для прибывающих поездов. Отметим, что в созданной модели входящего вагонопотока учитываются только пассажирские и грузовые поезда дальнего следования с числом вагонов [5-20] и [61-79] соответственно. Поэтому уберем из выборки Ξ векторные элементы, которые не относятся к поездам рассматриваемых категорий. Далее, по аналогии с п. 2.2.3, из Ξ получим выборку ξ_1 , содержащую значения межпоездного интервала для интересующих нас категорий поездов. Также из Ξ извлечем выборку δ_1 , в которой находятся значения числа вагонов в поезде. Таким образом, мы получили две выборки по 556 элементов в каждой: ξ_1 – межпоездной интервал, δ_1 – число вагонов.

На основе построенного *ВМАР*-потока были сгенерированы две выборки по 556 значений ξ_2 – межпоездного интервала и δ_2 – числа вагонов в поезде для сравнения с имеющимися данными.

Найдены следующие наблюдаемые значения Т-критерия Вилкоксона: $W_{набл}(\alpha, \xi_1, \xi_2) = 304\,291$, $W_{набл}(\alpha, \delta_1, \delta_2) = 306\,177$. Они удовлетворяют условию $W_{нижн.кр} < W_{набл} < W_{верхн.кр}$, при $W_{нижн.кр} = 298\,918$ и $W_{верхн.кр} = 319\,910$ (для всех пар выборок), т.е. нет оснований отвергнуть гипотезу о том, что эмпирическая и сгенерированная выборки взяты из одной генеральной совокупности.

Таким образом, можно высказать обоснованное предположение об адекватности построенной модели входящего вагонопотока.

В данном разделе показана применимость модели *ВМАР* для описания потоков транспорта в грузовых железнодорожных микро-ЛТС. Так, выясняется, что входящие транспортные потоки в рассматриваемые системы схожи по структуре с потоками данных в телекоммуникационных системах, например, в плане наличия нескольких групповых потоков заявок с различными характеристиками. Это позволило использовать разработанный математический аппарат [30] для построения стохастической модели входящего на железнодорожную станцию вагонопотока. В последующих разделах будет показано, что *ВМАР*-модель является универсальным и адекватным инструментом для математического описания входящих потоков в городские пассажирские системы.

2.3. Математические модели входящих пассажиропотоков в транспортно-пересадочные узлы

В настоящем разделе строятся математические модели общего входящего пассажиропотока в транспортно-пересадочные узлы мегаполиса в виде *ВМАР*-потоков.

Под *транспортно-пересадочным узлом* (ТПУ) будем понимать комплексный пассажирский терминал, предназначенный для перераспределения пассажиропотоков между различными видами транспорта и/или направлениями движения с целью оптимизации перевозочного процесса.

Рассмотрим ТПУ «Владыкино» и «Кутузово», которые являются действующими транспортными объектами в Москве. Они выбраны по следующим причинам.

Во-первых, по ним имеются открытые данные о пассажиропотоках, см. например, [70, 131]. Во-вторых, эти системы представляют собой типичные ТПУ, формируемые на основе «конкорса»: в их структуру включен терминал, позволяющий пассажирам перейти с платформы Московского центрального кольца на станцию метро по принципу «сухие ноги», т.е. без выхода на улицу. В-третьих, они являются одними из наиболее загруженных на Московском центральном кольце. Среднесуточный пассажиропоток в конце 2016 г. составлял 18,3 тыс. чел. для ТПУ «Владыкино» и 14,9 тыс. чел. для ТПУ «Кутузово» [70]. Предполагаемый пассажиропоток в час пик на расчетный период (2025

год) – 12 тыс. чел. [131]. Рассматриваемые ТПУ введены в эксплуатацию в конце 2016 года. Поэтому они обеспечены современными техническими средствами [62, 95, 112], отвечают строительным нормам и стандартам безопасности [121].

Часть статистических данных для построения моделей общего входящего пассажиропотока в ТПУ «Владыкино» и «Кутузово» собрана автором путем натурального наблюдения в 2017 г. Другая часть взята с официального сайта Московского метрополитена [131].

Далее определим характеристики входящих потоков пассажиров и на их основе построим математические модели общего входящего пассажиропотока в ТПУ «Владыкино» и «Кутузово» (п. 2.3.1). После построения моделей мы проведем их уточнение с помощью модельного эксперимента (п. 2.3.2).

2.3.1. Определение характеристик входящих пассажиропотоков в транспортно-пересадочные узлы

Общий входящий пассажиропоток в ТПУ складывается из суммы нескольких различных транспортных потоков. ТПУ, как правило, обеспечивают пересадку между следующими видами транспорта в различных комбинациях [36]: внешний транспорт – обеспечивает межрегиональное транспортное сообщение (авиатранспорт, водный и железнодорожный транспорт); региональный транспорт – обеспечивает транспортные связи между городом и пригородом (междугородние автобусы и электрички); городской внеуличный транспорт (метро, монорельс); городской общественный транспорт (автобусы, трамваи и др.); личный транспорт.

В структуру рассматриваемых ТПУ входят следующие виды транспорта: поезда Московского метрополитена, поезда Московского центрального кольца, автобусы, личный транспорт. Также в ТПУ прибывают пешеходы с прилегающих территорий. Охарактеризуем каждый из них. Работа ТПУ исследуется в самый загруженный промежуток времени с 7.00 ч. до 9.00 ч., в час пик. Рассмотрим отдельно каждый из видов транспорта.

М) Станция метро при ТПУ «Владыкино» относится к Серпуховско-Тимирязевской линии, метро «Кутузово» – к Филёвской линии. В настоящее время в Московском метрополитене используются вагоны серии 81-717 (головной) и 81-714

(промежуточный) по 8 вагонов в поезде. Максимальная вместимость одного вагона при плотности стоящих пассажиров 10 чел./кв.м площади пола составляет 300 чел. для головного и 330 чел. для промежуточного. Далее примем среднюю плотность стоящих пассажиров равной 6 чел./кв.м. Рассматриваемые станции являются промежуточными по пути следования. В результате натурного наблюдения установлено, что в среднем 11% пассажиров выходят из поезда на данных станциях, при этом максимальный размер группы пассажиров не превосходит 20% от вместимости поезда метро. Таким образом, средний размер группы составит 170 человек, а максимальное число пассажиров в прибывающей группе – 310 человек.

Московский метрополитен обеспечивает движения составов близкое к регулярному. В модели примем, что на станции метро осуществляется движение поездов в двух направлениях со средним интервалом прибытия поездов 2,5 мин. для каждого к [94], тогда интенсивность прибытия составит $\lambda_{2,1} = 0,80$ состава в минуту. Максимальный размер прибывающей группы пассажиров примем равным 310 человек. Размер группы пассажиров – случайная величина, распределенная по нормальному закону, который, как уже отмечалось, выбирается по следующим причинам: во-первых, он является предельным законом, т.е. к нему приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях [19]; во-вторых, этот закон наиболее часто встречается в практических задачах [19, 27], в частности, при описании дискретных данных [2]. Параметры закона распределения следующие: математическое ожидание $\mu = 170$; среднеквадратическое отклонение $\sigma = 46,66$, которое подобрано с помощью «правила трех сигм» так, чтобы значения этой СВ попадали в интервал [30;310] с вероятностью 0,9973.

МЦК) Станция Московского центрального кольца (МЦК). На МЦК курсируют поезда модели ЭС2Г «Ласточка» длиной 6 вагонов с максимальной вместимостью 1200 пассажиров [100]. Примем, что число пассажиров, которые готовы сойти на данной станции, подчиняется нормальному распределению (см. предыдущий абзац) с параметрами $\mu = 120$ и $\sigma = 40$, максимальный размер группы равен 240 человек. Математическое ожидание и максимальный размер группы получены на основе натурного наблюдения по видеокамерам. Среднеквадратическое отклонение подобрано с помощью «правила трех сигм» (см. поток **М**). Интервал движения поездов МЦК в час

пик – 6 минут для каждого из двух направлений, тогда интенсивность поступления поездов на станцию составляет $\lambda_{22} = 0,33$ в минуту.

А) Автобусная остановка. Через автобусные остановки при ТПУ «Владыкино» проходит 10 маршрутов, при ТПУ «Кутузово» – 13 маршрутов наземного общественного транспорта (автобусы и маршрутные микроавтобусы) [89]. В табл. 2.6 представлены характеристики движения автобусов, маршруты которых проходят через остановки при рассматриваемых ТПУ.

Таблица 2.6. Характеристики автобусных маршрутов при ТПУ «Владыкино» и «Кутузово»

	№ группы (j)	1	2	3	4	5	Сумма
ТПУ «Владыкино»	t_j	10-12	13-15	16-18	19-21	21-23	-
	№ маршрута	154, 637, 238, М9, 76к	76, 33, 24к	24	85	-	-
	c_j	5	3	1	1	0	10
	n_j	27,37	12,86	3,53	3	0	46,66
ТПУ «Кутузово»	t_j	7-10	11-14	15-18	19-22	23-26	-
	№ маршрута	91, 205, 523, 560м, 840	7, Т39, 157	454, 818	116, 474	477	-
	c_j	5	3	2	2	1	13
	n_j	35,29	15,65	8,28	6,86	2,93	69,00

Здесь строка t_j содержит интервалы времени между прибытием автобусов в минутах; строка c_j – число маршрутов, в которых интервалы движения транспортных средств равны t_j ; строка n_j – среднее число поступлений автобусов на остановку при ТПУ в минуту.

Установим закон распределения промежутков времени между поступлениями транспорта на остановку. Будем рассматривать промежутки времени между прибытиями автобусов как случайную величину, поскольку движение транспорта подвержено множеству различных случайных факторов, например, поломки техники, дорожные пробки и т.д. Автору не удалось получить натурные данные о движении транспортных средств на автобусных остановках при ТПУ «Владыкино» и «Кутузово». Поэтому выборку промежутков времени между прибытиями автобусов получим с помощью компьютерного эксперимента.

Для проведения компьютерного эксперимента используются характеристики автобусных маршрутах, которые представлены в табл. 2.6. Введем следующие переменные: $g_{ij} > 0$ – момент времени прибытия автобуса на остановку, где i – номер

маршрута, j – номер группы к которой этот маршрут относится (табл. 2.6); $n > 1$ – число автобусов, поступающих на остановку при ТПУ и относящихся к одному маршруту; $g > 0$ – сумма всех g_{ij} для одного маршрута; $k > 0$ – счетчик числа разыгрываний g_{ij} для отдельного маршрута, принимает целые значения. Также введем множества $\{g\}$ и $\{y\}$. В $\{g\}$ мы будем хранить промежуточные данные, в $\{y\}$ – итоговые.

Суть компьютерного эксперимента заключается в следующем. С помощью переменных n , k , g_{ij} разыгрываются значения моментов времени g , в которые автобусы различных маршрутов прибывают на остановку при ТПУ. Полученные значения добавляются в $\{g \mid g_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$, затем упорядочиваются по возрастанию. Далее вычисляются y – разности между двумя соседними элементами $\{g\}$ и добавляются в $\{y\}$.

Алгоритм компьютерного эксперимента:

Шаг 1. Выбираем i и n , по i определяем j из табл. 2.6, $\{g\} := \emptyset, \{y\} := \emptyset$; Шаг 2. $g := 0, k := 0$; Шаг 3. Генерируем значение g_{ij} , которое подчинено непрерывному равномерному распределению. Его параметры a и b определяем по значениям в ячейке на пересечении строки t_j и столбца j в табл. 2.6; Шаг 4. $g := g + g_{ij}, k := k + 1$; Шаг 5. Добавляем g в множество $\{g\}$; Шаг 6. Если $k < n$, то переходим к шагу 3, иначе – к шагу 7; Шаг 7. Выбираем следующий номер маршрута i из табл. 2.6, по нему определяем j и переходим к шагу 2. Если перебор маршрутов завершен, то переходим к шагу 8; Шаг 8. Сортируем элементы множества $\{g\}$ в порядке возрастания; Шаг 9. Находим $y = g_{i+1} - g_i, g_i \in \{g\}$ (для всех i) и добавляем y в $\{y\}$.

В результате получим множество $\{y\}$, элементами которого являются промежутки времени между последовательным поступлением транспортных средств на остановку.

Установим законы распределения времени между последовательным поступлением автобусов на остановки при ТПУ «Владыкино» и «Кутузово». Обозначим СВ Y_1 и Y_2 – время между поступлением транспортных средств соответственно на остановки при ТПУ «Владыкино» и «Кутузово», y_1 и y_2 – выборки значений данных СВ. Обе выборки были сгенерированы с помощью компьютерного эксперимента и содержат по 100 элементов.

Составим интервальные вариационные ряды по выборкам y_1 и y_2 (табл. 2.7). СВ Y_1 принимает значения от 0 до 6 мин., СВ Y_2 – от 0 до 5 мин. Интервалы в обоих

вариационных рядах примем равными одной минуте, следовательно, их число k равно 6 для y_1 и 5 для y_2 .

Таблица 2.7. Интервальные вариационные ряды выборок y_1 и y_2

	$b_i - b_{i+1}$	1 – 2	2 – 3	3 – 4	4 – 5	5 – 6	6 – 7
y_1	d_i	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
	c_i	57	25	8	5	4	1
y_2	d_i	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	-
	c_i	65	23	7	3	2	-

Здесь строка $b_i - b_{i+1}$ содержит границы интервалов, строка d_i – их середины, строка c_i – частоты.

На основе данных вариационных рядов построим гистограммы предположим, что СВ Y_1 и Y_2 распределены по экспоненциальному закону. Статистические оценки его параметров $\lambda_{2,3} = 0,78$ и $\lambda_{2,4} = 1,15$, соответственно для СВ Y_1 и Y_2 , были получены аналогично п. 2.2.2: первое приближение найдено по методу моментов, далее с помощью метода покоординатного спуска проведено их уточнение по критерию (2.2).

Выдвинем следующие статистические гипотезы: СВ Y_1 и Y_2 распределены по экспоненциальному закону с параметрами $\lambda_{2,3} = 0,78$ и $\lambda_{2,4} = 1,15$ соответственно.

Проверим выдвинутые гипотезы. Наблюдаемые и критические значения критериев Пирсона и Колмогорова для выборок y_1 и y_2 представлены в табл. 2.8.

Таблица 2.8. Наблюдаемые и критические значения критериев Пирсона и Колмогорова для выборок y_1 и y_2

Выборка	Параметр $\text{Exp}(\lambda)$	α	r	$\chi^2_{\text{набл}}$	$\chi^2_{\text{крит}}$	$K_{\text{набл}}$	$K_{\text{крит}}$
y_1	$\lambda_{2,3} = 0,78$	0,05	4	2,76	9,49	0,29	1,09
y_2	$\lambda_{2,4} = 1,15$		3	3,30	7,82	0,02	

Наблюдаемые значения критериев меньше критических во всех случаях, следовательно, нет оснований отвергать обе гипотезы.

Размер прибывающей группы пассажиров. В настоящее время большую часть столичного автобусного парка составляют автобусы: ЛиАЗ, МАЗ, СитиРитм, Mercedes-Benz, Fiat Ducato, Ford Transit, Ikarus, Yutong. Средний размер групп пассажиров, которые прибывают на остановку в автобусе и далее направляются в ТПУ, равен 27 человек. Данные сведения были получены путем натурного наблюдения по видеокамерам. Отметим, что детализация изображения не позволила различить номера автобусов, в которых прибывали люди, однако удалось определить число пассажиров, выходящих из транспортного средства.

Количество пассажиров в автобусе, прибывающем на остановку, заранее неизвестно. Поэтому размер поступающей группы пассажиров будем считать случайной величиной. Примем, как и при исследовании потока **М**, что данная СВ распределена по нормальному закону с параметрами $\mu = 27$ (см. предыдущий абзац) и $\sigma = 8,66$, где σ подобрано по «правилу трех сигм» так, чтобы размер прибывающей группы пассажиров был не менее единицы, т.е. значения этой СВ находились в интервале $[1;53]$ с вероятностью 0,9973.

Время между прибытиями автобусов на остановку подчиняется экспоненциальному закону распределения (см. табл. 2.8). Маршруты движения автобусов можно считать независимыми между собой. Поэтому поступление групп пассажиров можно описать пуассоновским неординарным потоком (п. 1.4), интенсивность поступления которого для ТПУ «Владыкино» составляет $\lambda_{23} = 0,78$, для «Кутузово» – $\lambda_{24} = 1,15$ групп в минуту (см. табл. 2.8).

Р) Перехватывающая парковка. У ТПУ «Владыкино» функционирует перехватывающая парковка вместимостью 380 автомобилей. Естественным предположением является то, что на парковку в большинстве случаев поступают легковые автомобили, в которых среднее число пассажиров в салоне составляет 1,34 человека [17].

Количество человек в салоне автомобиля, который прибывает на перехватывающую парковку, заранее неизвестно. Поэтому будем считать, что оно является ДСВ. Учитывая среднее число пассажиров в салоне [17], примем, что эта ДСВ подчиняется геометрическому закону распределения (см. п. 1.2.3) с параметром, равным $1 / 1,34 = 0,75$, и принимает значения $1, 2, \dots, m, \dots$

Данные для исследования интенсивности поступления автомобилей на парковку при ТПУ «Владыкино» получены из [97]. Отметим, что информация по парковке при ТПУ «Владыкино» не отражается на этом ресурсе, поэтому используем усредненный показатель интенсивности прибывающего потока автомобилей на перехватывающие парковки Москвы. При выполнении наблюдений фиксировалось число занятых мест на 16 парковках (суммарно 5240 машиномест) в следующие моменты времени: 7:00, 8:00 и 9:00 (по МСК). Период наблюдения составил 12 рабочих дней с 10.04.17 по 24.04.17. В табл. 2.9 представлено суммарное число занятых мест на 16 парковках за период наблюдений.

Таблица 2.9. Статистика числа занятых мест на 16 перехватывающих парковках при ТПУ в Москве

Дата / время	7:00	8:00	9:00	Дата / время	7:00	8:00	9:00
07.04.2017	1062	3448	3935	17.04.2017	1065	2966	3331
10.04.2017	910	3040	3884	18.04.2017	1052	3170	3757
11.04.2017	749	2976	3338	19.04.2017	1146	3235	3706
12.04.2017	425	2328	2902	20.04.2017	1156	3375	3914
13.04.2017	966	2942	3743	21.04.2017	1047	3089	3745
14.04.2017	670	2780	3539	24.04.2017	1050	2839	3925

Анализируя статистические данные, получаем, что средняя интенсивность поступления автомобилей на перехватывающие парковки в период с 7:00 до 9:00 составляет $\lambda_{2,5} = 1,41$ единиц в минуту. Будем считать, что автомобили приезжают независимо друг от друга и промежутки времени между двумя последовательными прибытиями подчиняются экспоненциальному закону [128], т.е. поток является пуассоновским.

Б) Пешеходы. Оба рассматриваемых ТПУ расположены в жилых районах, средняя плотность населения которых составляет 16,3 тыс. чел./кв.км. при ТПУ «Владыкино» и 9 тыс. чел./кв.км. при ТПУ «Кутузово» (данные за 2016 год).

Автору не удалось получить данные о потоках пешеходов, которые прибывают в рассматриваемые ТПУ в утренний час пик. По этой причине оценим количество пешеходов, проходящих в ТПУ «Владыкино» и «Кутузово» с 7.00 до 9.00, и на их основе получим приближенные характеристики исследуемых пассажиропотоков.

В зоне пешей доступности, которая составляет 500-700 м, проживают примерно $a_1 = 15,6$ и $a_2 = 7,07$ тыс. чел. соответственно для ТПУ «Владыкино» и «Кутузово». Эти показатели основаны на средней плотности населения в районах при рассматриваемых ТПУ. Метро обладает высокой популярностью – в среднем 35% населения Москвы пользуется метро [63]. Согласно [119] 36% объема пассажиропотоков в утренний период приходится на час пик.

На основе этих данных оценим количество пешеходов в утренний час пик по формуле $V = abc$, где a – средняя численность населения, проживающего в зоне пешей доступности от ТПУ, $b = 0,35$ – отношение численности населения, пользующегося метро, к общей численности населения Москвы, $c = 0,36$ – отношение объема пассажиропотока в утренний час пик к объему пассажиропотока в метро с 6:00 до 12:00. Получим следующие оценки $V_B = 1965,6$ чел. для ТПУ «Владыкино» и $V_K = 890,8$ чел.

для ТПУ «Кутузово». Тогда средняя интенсивность прибытия пешеходов равна $\lambda_B = V_B / 120 = 16,38$ и $\lambda_K = V_K / 120 = 7,42$ чел./мин.

При построении ВМАР-потока вероятность поступления заявок из отдельного потока зависит от его интенсивности. Поэтому при таких λ_B и λ_K вероятность поступления заявок из потока **Б** (пешеходы) будет много больше, чем у **М**, **МЦК**, **А** и **Р**. Приблизим вероятности поступления заявок из потока **Б** к вероятностям поступления заявок из других потоков путем введения группового поступления и уменьшения значений λ_B и λ_K . Размер группы примем случайной величиной, распределенной по нормальному закону (см. исследование потока **М**).

Параметры нормального распределения подберем следующим образом. Поскольку число заявок (пешеходов) в группе, очевидно, должно быть целым, в качестве μ выберем наименьшее целое число, при делении на которое значения λ_B и λ_K приблизятся к $\lambda_{2,5} = 1,41$ и $\lambda_{2,4} = 1,15$ соответственно. Интенсивности $\lambda_{2,5}$ и $\lambda_{2,4}$ выбраны как наибольшие среди пассажиропотоков **М**, **МЦК**, **А** и **Р**. Тогда $\mu = 7$. Среднеквадратическое отклонение найдем с помощью «правила трех сигм» так, чтобы возможные значения этой СВ были не менее единицы. Получим $\sigma = 2$.

Далее разделим интенсивности λ_B и λ_K на μ , чтобы число поступающих в единицу времени пешеходов при групповом поступлении соответствовало бы аналогичной характеристике при одиночном поступлении. Интенсивности поступления групп пешеходов составят $\lambda_{2,6} = 2,34$ и $\lambda_{2,7} = 1,06$ в мин. соответственно для ТПУ «Владыкино» и «Кутузово». Размер групп – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $\mu = 7$, $\sigma = 2$ (см. предыдущий абзац).

Выдвинем гипотезу, что промежутки времени между двумя последовательно прибывающими в ТПУ группами пассажиров из какого-либо входящего потока (**М**, **МЦК**, **А**, **Р** или **Б**) подчинены экспоненциальному распределению. Данная гипотеза основана на следующих предположениях. Во-первых, поток групп пассажиров, поступающих на автобусные остановки при рассматриваемых ТПУ, может быть описан как пуассоновский неординарный поток (см. исследование потока **А**). Во-вторых, для входящих потоков **Р** и **Б** можно принять, что время между поступлениями групп пассажиров распределено по экспоненциальному закону с различными параметрами [25], при этом прибывающие группы в этих потоках независимы между собой, следовательно, данные потоки также можно описать как пуассоновские неординарные

потоки (см. п. 1.4). В-третьих, потоки **М** и **МЦК** можно считать регулярными [92], однако их суммарная интенсивность меньше суммы интенсивностей потоков **А**, **Р** и **Е**, т.е. влияние регулярных потоков на распределение времени между последовательным поступлением групп пассажиров меньше, чем влияние пуассоновских потоков, к которым относятся **А**, **Р** и **Е**.

Покажем, что выдвинутая гипотеза не противоречит имеющимся данным на примере входящих пассажиропотоков в ТПУ «Владыкино».

Выборка $y_{\text{общ}}$, включающая 200 значений промежутков времени между последовательно прибывающими группами пассажиров в ТПУ «Владыкино», получена с помощью компьютерного эксперимента, алгоритм которого описан при исследовании потока **А**. В данном случае число пассажиропотоков равно пяти (**М**, **МЦК**, **А**, **Р** и **Е**). Исследование выборки $y_{\text{общ}}$ проводилось так же, как и в п. 2.2.2. В результате установлено, что группы пассажиров поступают через промежутки времени, которые распределены по экспоненциальному закону с параметром $\lambda_{\text{общ}} = 5,71$. Можно видеть, что значение $\lambda_{\text{общ}}$ близко к суммарной интенсивности всех потоков пассажиров $\lambda_{\text{сумм}} = \sum_{i=1}^5 \lambda_{2,i} = 0,80 + 0,34 + 0,78 + 1,41 + 2,34 = 5,67$. Расхождение $\lambda_{\text{общ}}$ и $\lambda_{\text{сумм}}$ вызвано наличием фактора случайности при генерировании элементов выборки $y_{\text{общ}}$, а также округлением $\lambda_{\text{общ}}$ до сотых.

Параметры входящих пассажиропотоков. По результатам проведенного в п. 2.3 анализа составим сводную табл. 2.10, в которой представлены следующие характеристики входящих пассажиропотоков: интенсивности и найденные на их основе вероятности поступления групп заявок, законы распределения размеров этих групп.

Таблица 2.10. Характеристики входящих пассажиропотоков в ТПУ

	Пассажиропоток	М	МЦК	А	Р	Е
<i>ТПУ Владыкино</i>	Интенсивность	$\lambda_{2,1} = 0,80$	$\lambda_{2,2} = 0,34$	$\lambda_{2,3} = 0,78$	$\lambda_{2,5} = 1,41$	$\lambda_{2,6} = 2,34$
	Вероятность поступления p_i	0,141	0,060	0,138	0,249	0,412
<i>ТПУ Кутузово</i>	Интенсивность	$\lambda_{2,1} = 0,80$	$\lambda_{2,2} = 0,34$	$\lambda_{2,4} = 1,15$	-	$\lambda_{2,7} = 1,06$
	Вероятность поступления p_i	0,268	0,114	0,262	-	0,356
Закон распределения размера групп		$N(170; 46,66)$	$N(120; 40)$	$N(27; 8,66)$	$\text{Geom}(0,75)$	$N(7; 2)$

Информация из этой таблицы будет использована далее при построении математических моделей входящего пассажиропотока.

2.3.2. Построение математической модели общего входящего пассажиропотока на основе ВМАР-потока и проведение модельного эксперимента

При моделировании микро-ЛТС одно из центральных мест занимает описание входящего потока заявок. При этом исследование системы с одним потоком заявок сложной конструкции может оказаться проще, чем изучение системы, в которую поступают несколько различных потоков. Для объединения нескольких входящих потоков в единую структуру используем модель ВМАР-потока (см. п. 1.4).

Построим математическую модель общего входящего пассажиропотока в ТПУ «Владыкино». Модель общего пассажиропотока, прибывающего в ТПУ «Кутузово», создается аналогично.

В ТПУ «Владыкино» поступает пять пассажиропотоков, характеристики которых представлены в табл. 2.10. Максимальный размер прибывающей группы пассажиров равен 310 (см. п. 2.3.1 поток **М**), следовательно, построим 311 матриц, нумерация которых начинается с нуля. Матрицы $D_i, i = \overline{0, 310}$ будут размера 5×5 , их элементы вычисляются по формулам (1.7), где вероятности переходов $p_{v,r}^{(i)}$ и интенсивности поступления заявок из различных потоков λ_r находятся следующим образом:

$$p_{v,r}^{(i)} = p_r f_r(i), \quad \lambda_r = \lambda = \sum_{j=1}^5 \lambda_{2j} = 5,67, \quad v, r = \overline{0, 5}, \quad i = \overline{0, 310}.$$

Здесь p_r – вероятности поступления r -го потока пассажиров, $f_r(i)$ – вероятность поступления группы размера i из потока r (см. табл. 2.10). Максимально возможный размер группы пассажиров для потока **А** равен 50, для потока **Р** равен 7. Следовательно, в матрицах $D_i, i = \overline{50, 310}$ будут нулевыми третьи строки, в матрицах $D_i, i = \overline{8, 310}$ – четвертые строки.

Модельный эксперимент.

В данном эксперименте решается задача восстановления значения интенсивностей поступления групп заявок λ для входящих ВМАР-потоков, при которых число поступающих заявок будет соответствовать планируемому показателю числа прибывающих в ТПУ пассажиров за час пик на 2025 г (12 т. чел. за час пик для обоих ТПУ).

Генерирование ВМАР-потоков осуществлялось с помощью «Программного комплекса для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания»,

описание которого представлено в главе 4. Время моделирования – два часа виртуального времени.

Далее в табл. 2.11 (для ТПУ «Владыкино») и 2.12 (для ТПУ «Кутузово») представлены данные по 10 разыгрываниям ВМАР-потока при: λ_a – суммарная интенсивность всех пассажиропотоков; $\lambda_b = \lambda_a / 2$; $\lambda_c = \lceil \lambda_b \rceil$.

Таблица 2.11. Результаты разыгрывания ВМАР-потока для ТПУ «Владыкино»

№	$\lambda_a = 5,64$		$\lambda_b = 2,82$		$\lambda_c = 3$	
	Групп	Заявок	Групп	Заявок	Групп	Заявок
1	627	20774	292	9650	354	10171
2	639	21153	323	10071	382	11508
3	654	21279	328	9773	327	10806
4	620	20076	327	11600	362	12621
5	633	21542	301	9121	391	11757
6	645	21690	311	10418	356	10850
7	646	23102	332	12022	362	11380
8	597	19119	373	13503	359	11938
9	607	21463	334	11363	351	11568
10	643	20108	345	11388	377	12306
Среднее	631,1	21030,6	326,6	10890,9	362,1	11490,5

Таблица 2.12. Результаты разыгрывания ВМАР-потока для ТПУ «Кутузово»

№	$\lambda_a = 2,98$		$\lambda_b = 1,49$		$\lambda_c = 2$	
	Групп	Заявок	Групп	Заявок	Групп	Заявок
1	340	19438	212	12547	253	13059
2	419	24391	183	9762	217	11733
3	411	21586	214	12014	220	12150
4	384	21544	211	11521	238	13246
5	421	22513	202	12611	223	13136
6	422	22292	192	8665	251	12175
7	431	22866	201	10273	238	12439
8	329	22205	213	10931	244	13278
9	377	20262	180	9454	238	12177
10	456	24222	200	10721	218	11767
Среднее	399,0	22131,9	200,8	10849,9	234,0	12516,0

По результатам модельного эксперимента можно видеть, что при $\lambda_c = 3$ для ТПУ «Владыкино» и $\lambda_c = 2$ для ТПУ «Кутузово» среднее число прибывающих в ТПУ пассажиров за час пик приближается к планируемому (на 2025 г.) показателю.

Таким образом, для обоих ТПУ найдены параметры основных входящих пассажиропотоков (табл. 2.10) и созданы их математические модели в виде ВМАР-потоков, особенностями которых является то, что время между двумя последовательно прибывающими группами заявок подчинено экспоненциальному распределению. С помощью модельного эксперимента определены значения интенсивностей поступления

групп заявок для входящих *ВМАР*-потоков, при которых количество заявок, получаемое при разыгрывании созданных моделей входящего пассажиропотока, соответствует ожидаемому [131] показателю числа прибывающих в ТПУ «Владыкино» и «Кутузово» пассажиров в час пик на 2025 г.

Выводы по главе 2

В данной главе проведено исследование входящего вагонопотока на железнодорожную станцию (грузовая микро-ЛТС) и поступающих пассажиропотоков в транспортно-пересадочные узлы (пассажирские системы).

Во время проведения исследования мы обнаружили, что оба вида входящих потоков состоят из нескольких различных (отдельных) потоков с групповым поступлением. При этом каждый отдельный поток может быть представлен как случайный поток событий (заявок), где время между прибытиями групп заявок и их размер – случайные величины.

По результатам анализа имеющихся данных найдены законы распределения размеров групп заявок и времени между их прибытиями для всех отдельных потоков. На основе полученной информации установлено, что общие входящие потоки заявок в грузовые и пассажирские системы обладают схожей структурой: состоят из нескольких различных потоков заявок с групповым поступлением, где размер групп является случайной величиной; время между двумя последовательно прибывающими группами заявок подчинено экспоненциальному распределению. Такая структура входящих потоков позволяет применить обобщенную математическую модель для их описания.

При построении стохастических моделей входящих потоков заявок на железнодорожную станцию и в транспортно-пересадочные узлы была использована модель *ВМАР*-потока. Ранее такого рода способ математического описания транспортных потоков не встречался в литературе. Применение теории *ВМАР*-потоков позволяет объединить в единую структуру несколько различных потоков заявок, что облегчает описание сложных систем, таких как микро-ЛТС. Построенные модели входящих потоков будут использованы для решения прикладных задач в главе 5.

ГЛАВА 3. МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАБОТЫ МИКРОЛОГИСТИЧЕСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МНОГОФАЗНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В данной главе представлены разработанная автором методика математического моделирования работы микрологистических транспортных систем с использованием теоретико-вероятностных методов; ее реализация в виде математической модели, которая является многофазной системой массового обслуживания; а также приведены результаты аналитического и численно-аналитического изучения некоторых частных случаев последней.

Глава состоит из трех разделов. В первом предлагается новая методика построения математических вероятностных (стохастических) моделей работы микро-ЛТС, главными особенностями которого являются учет группового поступления заявок на обслуживание, а также многоуровневой структуры системы, и построенная на ее основе модель в виде многофазной (обычно – трехфазной) СМО с обратными связями между фазами. Во втором – представлены полученные рекуррентные формулы, с помощью которых вычисляются стационарные характеристики многофазных СМО в некоторых частных случаях. В третьем разделе представлен численно-аналитический метод получения предельных вероятностей многофазных СМО, в которые поступает пуассоновский неординарный поток заявок.

3.1. Методика моделирования работы микрологистических транспортных систем

Прежде чем перейти к представлению разработанной методики и построению математической модели работы микро-ЛТС опишем ее предметную модель.

Предметная модель. Рассмотрим структуру микро-ЛТС. В ней присутствует множество различных параметров – элементов, связей между ними и их свойств. Выделим из них наиболее значимые, которые будем учитывать в модели.

В главе 1 было установлено, что работа микро-ЛТС зависит от двух основных составляющих: входящего материального потока и структуры системы (см. п. 1.1).

В главе 2 мы установили, что входящий материальный поток обладает стохастической природой и сложной конструкцией – состоит из нескольких отдельных потоков с различными характеристиками.

Рассмотрим структуру микро-ЛТС. Несмотря на то, что каждая микро-ЛТС имеет определенные особенности, например, назначение, технические параметры, место расположения, планировочная структура, можно выделить подсистемы с одинаковыми (или схожими) функциями.

При использовании системного анализа [15] удалось выделить следующие главные подсистемы, которые расположены последовательно:

- *приемно-распределительная подсистема* обеспечивает прием, сортировку, расформирование и подачу транспорта под погрузку и разгрузку;
- *подсистема обслуживания* осуществляет разгрузку и погрузку прибывшего транспорта, упаковку и пакетирование груза, обслуживание пассажиров;
- *подсистема отправки* обеспечивает отправку транспорта из системы.

Схематично обобщенная структура микро-ЛТС изображена на рис. 3.1.

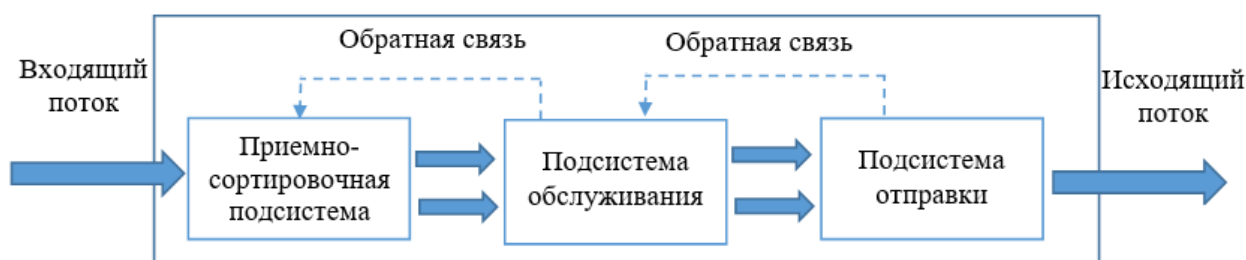


Рис. 3.1. Схема обобщенной структуры микро-ЛТС

Так, железнодорожная сортировочная станция (грузовые системы) [109, 116] включает парк приема с сортировочной горкой (приемно-распределительная подсистема), в котором осуществляется накопление прибывающих поездов, их расформирование и направление отдельных групп вагонов в сортировочный парк. В транспортно-пересадочном узле (пассажирские системы) [8, 21] аналогичной подсистемой можно считать перехватывающую парковку, которая отвечает за «перехват» личного транспорта (аналогия с расформированием поезда) и направление групп пассажиров в терминал.

В подсистеме обслуживания выполняются сортировка заявок и определение будущего характера их обслуживания в зависимости от категории. Так, на сортировочной станции вагоны проходят сквозь сортировочный парк, попутно их

собирают в состав и определяют направление движения, в зависимости от которого состав направляют на определенный путь в следующей подсистеме; в транспортно-пересадочном узле пассажиры проходят сквозь терминал, при этом они выбирают свое направление, в зависимости от которого следуют к нужной платформе (метро, автобусная остановка и др.).

В подсистеме отправки заявки группируются и покидают микро-ЛТС. На сортировочной станции такой подсистемой является парк отправления, в котором происходит окончательное формирование поездов, т.е. прицепление локомотива к составу, в транспортно-пересадочном узле – платформа (метро, автобусная остановка и др.), с которой пассажиры осуществляют посадку в транспортное средство. Таким образом, микро-ЛТС являются сложными системами и имеют общую базовую структуру.

Все подсистемы микро-ЛТС взаимозависимы, т.е. обладают как прямыми, так и обратными связями. Прямые связи определяют последовательность передачи материальных потоков между подсистемами, обратные связи – выбор поведения системы при изменяющихся условиях, в частности, при перегрузках.

Помимо структуры микро-ЛТС в модели также необходимо учесть и параметры подсистем – технические характеристики и внутренние производственные процессы, а также факторы, воздействующие на работу всей системы в целом.

К техническим характеристикам относятся: число обслуживаемых устройств; их тип, т.е. какой вид транспорта (тип грузов или пассажиров) они обрабатывают; количество грузов (пассажиров), которые могут находиться в подсистеме, т.е. ее вместимость.

Внутренние производственные процессы в большинстве случаев однотипны: принятие транспорта, разгрузка, распределение грузов по партиям и т.д. Их можно разделить на главные и вспомогательные [34, 102, 104]. Главными являются процессы технического характера, т.е. те, от которых явно зависит эффективность функционирования микро-ЛТС. Они подразделяются на следующие группы: накопление, переработка (обслуживание), формирование и отправка (т.е. формирование исходящего потока) [102]. Остальные процессы, например, ожидание отправления, выбор маршрута перевозки и технический осмотр транспорта, рассматриваются как вспомогательные [102]. Они играют второстепенную роль, однако могут оказывать

значительное воздействие на поведение системы, в частности, увеличить среднее время обслуживания. Вспомогательные процессы в некоторых случаях можно учесть с помощью введения специального параметра или СВ [34].

Работа микро-ЛТС во многом определяется плановыми показателями, в частности, обслуживание определенного числа транспортных единиц за смену или детерминированное время выполнения технических операций (принятие транспорта в систему, его отправление и др.) [102]. Однако, как упоминалось ранее (п. 1.1), такие системы являются сложными. На их работу оказывает воздействие столь большое число второстепенных факторов, как внешних, так и внутренних [34], что практически невозможно зарегистрировать и учесть их все. К таким факторам мы относим природные (различные погодные условия) и техногенные (сбои в работе техники, человеческий фактор и др.) воздействия. В модели мы учитываем их влияние тем, что поступление транспорта в микро-ЛТС и технические операции, протекаемые в ней, считаем случайными процессами.

Теперь выделим параметры системы, которые явно не учитываются в модели: а) месторасположение системы; б) ее планировочное решение; в) выход обслуживающих приборов из строя; г) обратное движение материальных потоков; д) расходы, связанные с простоем обслуживающих устройств и транспортных средств, ожидающих обслуживания. Параметры а) и б) учитываются опосредованно: а) через свойства входящего материального потока; б) через число обслуживающих устройств и вместимость системы. Параметры в), г) и д) не рассматриваются. Так, при в) система переходит в экстремальный режим работы, что не согласуется с поставленными практическими задачами (глава 5) – определение показателей эффективности работы микро-ЛТС при нормальных условиях эксплуатации. Под г) мы понимаем событие, при котором маршрут груза (пассажира) внутри системы меняется на обратный (противоположный). Вероятность его наступления считаем маловероятной, так как такое поведение не характерно для рассматриваемых систем. Финансово-экономические показатели работы системы д) находятся в данном случае за рамками исследования.

Таким образом, предметная модель работы микро-ЛТС включает следующие параметры: входящий материальный поток, в котором время между поступлениями транспортных единиц и их вместимость являются СВ; наличие трех подсистем в структуре микро-ЛТС, которые расположены последовательно и имеют обратные связи

между собой; в каждой подсистеме присутствует некоторое (конечное) число обслуживающих устройств, ее вместимость ограничена; допускается их групповое обслуживание грузов (пассажиров), время их обслуживания может быть либо детерминировано, либо СВ.

Методика моделирования работы микро-ЛТС. В соответствии с поставленными задачами опишем методику моделирования работы микро-ЛТС с групповым входящим потоком заявок. Предлагаемая методика основана на принципах математического моделирования микрологистических объектов с учетом случайных факторов, развиваемых в школе А.Л. Казакова [125, 126].

При построении математической модели работы микро-ЛТС предлагается выделение двух основных компонентов системы: входящего потока заявок и структуры системы. Для описания входящего потока заявок в микро-ЛТС используется модель *ВМАР*-потока (п. 1.4), что позволяет учитывать наличие нескольких различных потоков заявок, при этом каждый из них может быть групповым. Для описания структуры системы применяется многофазная (обычно – трехфазная) СМО с обратной связью (п. 1.3). Каждая фаза соответствует некоторой подсистеме микро-ЛТС. Обратная связь позволяет регулировать работу системы, чтобы предотвратить потерю заявок между фазами, в случае отсутствия свободных мест в очереди на второй или третьей фазах.

Построение математических моделей работы микро-ЛТС в рамках данной методики происходит в две стадии.

На первой стадии выполняется анализ структуры и математическое описание входящего потока заявок.

На второй стадии изучаются структура и процессы функционирования системы, выполняется их математическое описание. Эта стадия включает в себя следующие этапы:

- выделение и описание фаз обслуживания заявок внутри системы;
- описание движения внутренних потоков заявок;
- выявление обратных связей между фазами;
- описание структуры системы в терминах ТМО.

Затем проводится анализ структуры и описание исходящего потока заявок.

Математическая модель. Опишем процесс построения обобщенной математической модели работы микро-ЛТС более подробно.

Первая стадия – построение стохастической модели входящего потока заявок в микро-ЛТС. В такую систему, как правило, одновременно поступает несколько входящих потоков заявок с различными характеристиками, поэтому для их единого описания, как уже отмечалось в предыдущей главе, применяется модель *ВМАР*-потока, которая представлена в п. 1.4.

Отметим, в частности, что стохастические модели вагонопотока, входящего на железнодорожную сортировочную станцию [109, 116], и пассажиропотока, прибывающего в ТПУ, имеют вид *ВМАР*-потока (см. главу 2).

В *ВМАР*-потоке законы распределения времени между поступлением групп заявок T и размеров этих групп X_{in} могут меняться со временем. При этом в прибывшей группе присутствуют заявки различных типов. Тип заявки указывает на вид транспорта, с помощью которого она покидает систему. Это позволяет определить маршрут движения отдельной заявки. Введем параметр τ – время моделирования и l – случайную величину, характеризующую число заявок разных типов в поступающей группе.

Вторая стадия – изучение и математическое описание структуры микро-ЛТС, процессов обслуживания заявок, их движения внутри системы, а также обратных связей между фазами.

Первый этап – выделение и описание фаз обслуживания заявок внутри системы. Согласно базовой структуре и свойствам микро-ЛТС (п. 1.1) заявки могут находиться во входящем потоке и на трех фазах обслуживания:

- Фаза 1 – принятие групп заявок и дальнейшее направление их в систему;
- Фаза 2 – обработка заявок специализированными устройствами;
- Фаза 3 – объединение заявок в группы и отправление их из системы.

Каждую фазу опишем с помощью набора параметров и случайных величин, которые влияют на процесс обслуживания поступившей заявки [15].

Фаза i , $i = \overline{1,3}$, имеет $m_i < \infty$ каналов и очередь максимальной длины $n_i < \infty$. Каждый канал характеризуется определенным типом и обслуживает только заявки соответствующего типа. Универсальный тип канала позволяет обслуживать любые заявки. Кроме того, допускается групповое обслуживание заявок, размер выбранной группы и время ее обслуживания являются случайными величинами. Также допускается наличие отдельных очередей (см. п. 1.3) перед каналами.

Введем следующие обозначения:

$\vec{r}_i = (r_i^1, \dots, r_i^{m_i})$ – вектор, компонентами которого являются r_i^j – тип канала $j = \overline{1, m_i}$ на i -й фазе;

X_i – закон распределения размера группы заявок, выбранной для обслуживания одним каналом на фазе i ;

$T_i = ts_i + t_i$ – закон распределения, описывающий общее время обслуживания группы заявок в канале на i -й фазе, где ts_i – закон распределения времени, проходящего с момента завершения обслуживания предыдущей заявки в канале до начала обслуживания следующей заявки (группы заявок) в нем на фазе i – время межоперационного простоя, t_i – закон распределения времени обслуживания группы заявок в канале на фазе i ;

$\vec{n}_i = (n_i^1, \dots, n_i^{m_i})$ – вектор, компонентами которого являются n_i^j – максимальная длина отдельной очереди перед каналом $j = \overline{1, m_i}$ на фазе i (в случае наличия таких очередей).

Функционирование фазы i в момент времени t может быть описано следующим набором случайных величин: M_i – число работающих каналов, N_i – длина очереди, T_i и X_i .

На втором этапе описывается движение внутренних потоков заявок. При движении внутри системы заявки выходят из каналов одной фазы и направляются в очередь следующей. Обозначим через P_i – закон распределения числа заявок, которые покинули фазу i .

Третий этап – выявление обратных связей. Такая связь представляет собой временную блокировку каналов предыдущей фазы, которая происходит, когда в очереди текущей фазы нет свободных мест для принятия заявок.

Тогда предлагаемая математическая модель микро-ЛТС состоит из следующих случайных величин:

$$l, T, T_1, T_2, T_3, X_{in}, X_1, X_2, X_3, \\ M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3, P_1, P_2, P_3.$$

Отметим, что в математической модели грузового транспортного терминала [125, 126] случайные величины делятся на «входные», «промежуточные» и «исходящие». Данное разделение выглядит несколько искусственным, так как в зависимости от поставленной задачи, нас могут интересовать как «исходящие», так и «промежуточные» характеристики моделируемой системы.

Поэтому в предлагаемой модели параметры и случайные величины делятся на:

- «входные» – параметры $\tau, m_i, n_i, \vec{r}_i$ и СВ $l, T, X_{in}, T_i, X_i, i = \overline{1,3}$;
- «производные» – СВ $M_i, N_i, P_i, i = \overline{1,3}$.

Случайные величины T, T_1, T_2, T_3 непрерывные, $l, X_{in}, X_i, M_i, N_i, P_i, i = \overline{1,3}$ дискретные.

Законы распределения «производных» случайных величин M_1, N_1, P_1 определяются в зависимости от того, какие значения принимают «входные» $\tau, l, T, X_{in}, T_1, X_1$. В свою очередь от значений $M_i, N_i, P_i, i = \overline{1,2}$ и «входных» $\tau, T_i, X_i, i = \overline{2,3}$ зависят законы распределения $M_i, N_i, P_i, i = \overline{2,3}$.

Схема модели представлена на рис. 3.2.

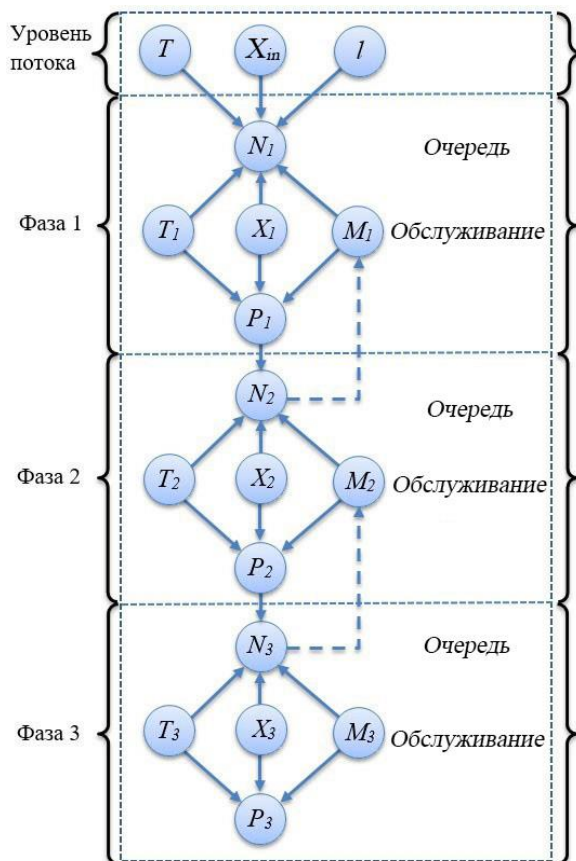


Рис. 3.2. Структурная схема математической модели работы микро-ЛТС

Между первой, второй и третьей фазами имеются обратные связи (пунктирные линии на рис. 3.2).

Опишем более подробно «производные» законы распределения:

$M_1(\tau, m_i, X_1, \vec{r}_1, T_1, N_2, T, X_{in})$ – закон распределения числа работающих каналов на фазе 1;

$M_2(\tau, m_2, X_2, \vec{r}_2, T_2, N_3, P_1)$ – закон распределения числа работающих каналов на фазе 2;

$M_3(\tau, m_3, X_3, \bar{r}_3, T_3, P_2)$ – закон распределения числа работающих каналов на фазе 3;

$N_1(\tau, n_1, X_1, T_1, T, X_{in})$ – закон распределения длины очереди на фазе 1;

$N_i(\tau, n_i, T_i, X_i, P_{i-1})$ – закон распределения длины очереди на фазе i , $i = \overline{2, 3}$;

$\vec{N}_i = (N_i^1, \dots, N_i^{m_i})$ – вектор, компонентами которого являются $N_i^j(\tau, T_i, X_i, P_{i-1})$ – закон распределения длины отдельной очереди перед каналом $j = \overline{1, m_i}$ на фазе i , $i = \overline{1, 3}$ (если отдельные очереди присутствуют в системе);

$P_1(\tau, T, X_{in}, T_1, X_1, M_1, N_1, N_2)$ – исходящий поток с первой фазы – закон распределения числа заявок, которые покинули фазу 1 в единицу времени;

$P_2(\tau, P_1, T_2, X_2, M_2, N_2, N_3)$ – исходящий поток со второй фазы – закон распределения числа заявок, покинувших фазу 2 в единицу времени;

$P_3(\tau, P_2, T_3, X_3, M_3, N_3)$ – исходящий поток из системы (с третьей фазы) – закон распределения числа заявок, покинувших систему в единицу времени.

Введем дополнительные параметры, которые необходимы для оценки эффективности моделируемой системы:

$Z(t, X_1, X_2, X_3, N_1, N_2, N_3)$ – число заявок в системе в момент t ;

$X_{cl}(t, M_1, X_{in}, T)$ – число заявок, которые были отклонены в момент t ;

$X_{all}(t)$ – число заявок, поступивших на вход системы к моменту t ,

$$X_{all}(t) = \int_0^t (X_{cl}(y) + Z(y)) dy;$$

$X_i^1(t) = M_i(t)X_i$ – количество заявок в каналах фазы i в момент t ;

$X_i^2(t) = \sum_{j=1}^{m_k} N_i^j(t)$ – количество заявок в отдельных очередях фазы i , если таких очередей нет, то $X_i^2(t) = N_i(t)$;

$X_{loss}(t) = \int_0^t X_{cl}(y) dy$ – количество заявок, получивших отказ в обслуживании к моменту t ;

$Y(t)$ – количество обслуженных заявок к моменту t .

При этом функции $X_{all}(t)$, $X_{loss}(t)$ и $Y(t)$ являются возрастающими и связаны следующим образом:

$$X_{all}(t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 X_i^j(t) + X_{loss}(t) \geq Y(t) + X_{loss}(t);$$

$$X_i^1(t) = \int_0^t X_i^2(y) dy - X_i^2(t);$$

$$X_{i+1}^2(t) = \int_0^t X_i^1(y) dy - X_i^1(t).$$

Заметим, что равенство $X_{i+1}^2(t) = X_i^1(t)$ верно, когда все заявки, поступившие в каналы фазы i , выгружаются в очередь фазы $i+1$.

Четвертый этап – изучение полученной модели с точки зрения ТМО. В терминах теории массового обслуживания созданная математическая модель работы микро-ЛТС имеет вид многофазной СМО со следующими особенностями:

- входящие в систему заявки образуют *ВМАР*-поток;
- система состоит из трех последовательно расположенных фаз, каждая из которых имеет очередь и некоторое число обслуживающих каналов;
- на максимальную длину очереди и на число каналов в фазе накладывается ограничение, предполагается, что они конечны;
- фаза может включать одну общую очередь, либо отдельные очереди перед каждым каналом;
- для определения маршрута движения заявки через систему используются разные типы заявок;
- каждому каналу присваивается определенный тип, канал может обслуживать заявки только аналогичного типа;
- каналы первой и второй фаз могут блокироваться, чтобы не допустить потерю заявок между фазами;
- группы заявок принимаются согласно дисциплине полного отказа (complete rejection);
- дисциплина обслуживания очереди FIFO (первый вошел, первый вышел);
- время обслуживания на каждой фазе является СВ;
- на каждой фазе допускается групповое обслуживание.

В терминах ТМО имеем открытую СМО (п. 1.3) типа $ВМАР / G^{X_1} / m_1 / n_1 \rightarrow / G^{X_2} / m_2 / n_2 \rightarrow / G^{X_3} / m_3 / n_3$, где X_i означает максимальный размер обслуживаемой группы заявок или закон распределения размера обслуживаемой группы на фазе i , G – время обслуживания, которое подчинено произвольному закону распределения, m_i и n_i – число каналов и длина очереди на фазе i .

В настоящем исследовании рассматривается дисциплина обслуживания очереди FIFO, которая наиболее часто встречается в микро-ЛТС. Другие виды дисциплин обслуживания очереди (LIFO, Random, приоритетные и др.) в рамках диссертационной работы не рассматриваются, так как они встречаются достаточно редко, кроме того, в модельной и прикладных задачах (главы 4 и 5) FIFO является естественной дисциплиной обслуживания очереди.

Обозначим $p_i(t)$ – вероятность того, что система находится в состоянии S_i в момент времени t . Далее будем понимать под *состоянием системы* – число заявок, которые находятся в системе.

При исследовании моделей в виде СМО ключевую роль играют *предельные* (финальные) вероятности состояний системы $\tilde{p}_i$ такие, что $\tilde{p}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t)$, иначе говоря, это среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_i [13].

Все рассматриваемые в данном исследовании СМО являются регулярными, т.е. выйдя из состояния S_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), система может в него вернуться за конечное время. В этом случае предельные вероятности совпадают со стационарными [13].

Распределение вероятностей p_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) называется *стационарным*, если распределение вероятностей состояния системы $p_i(t)$ не зависит от времени $\tilde{p}_i \equiv p_i \equiv p_i(t)$.

Зная стационарные вероятности можно найти предельные средние характеристики системы или *показатели эффективности* СМО [7, 13, 25]: A – абсолютная пропускная способность – среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; Q – вероятность обслуживания поступившей заявки или относительная пропускная способность – средняя доля пришедших заявок, обслуженных системой; P_{loss} – вероятность отказа, т.е. того, что заявка покинет СМО необслуженной; l_{oc} – среднее число заявок в очереди (при наличии); $\bar{z}$ – среднее число заявок в СМО; w – среднее время пребывания заявки в очереди; t_{ph} – среднее время в фазе; T_{sist} – среднее время пребывания заявки в системе; t_{lock} – время блокировки каналов.

Модель работы микро-ЛТС обладает сложной структурой (три фазы с блокировками, групповое поступление, произвольный закон распределения времени обслуживания на каждой фазе), поэтому определить аналитически ее стационарные характеристики в общем случае не удастся. По этой причине на ее основе строится

имитационная модель, которая представлена в главе 4. Тем не менее, для некоторых частных случаев получены аналитические результаты, представленные в п. 3.2.

3.2. Аналитическое исследование однофазных и частных случаев многофазных систем массового обслуживания

3.2.1. Исследование однофазных систем массового обслуживания с групповым поступлением заявок

Далее проводится аналитическое исследование общего класса однофазных СМО – многоканальной СМО с конечной очередью, в которую поступает пуассоновский неординарный поток заявок, при этом размер группы является ДСВ с ограниченным числом возможных значений.

Для достижения целей исследования рассмотрим одноканальную СМО с очередью конечной длины и групповым поступлением заявок, т.е. частный случай многоканальных СМО. В систему поступают группы, в которых может находиться одна или две заявки (единичное поступление или групповое поступление соответственно). Вероятность единичного поступления d_1 может отличаться от вероятности группового поступления d_2 или $d_1 = d_2$, при этом предполагается, что они известны и $d_1 + d_2 = 1$. Суммарная интенсивность поступления заявок в единицу времени равна λ . Следовательно, интенсивности поступления групп определенного размера равны $\lambda_1 = \lambda d_1$ и $\lambda_2 = \lambda d_2$. Канал обслуживает одновременно только одну заявку, время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону распределения с параметром μ .

Система может находиться в состояниях: S_0 – канал свободен, S_1 – канал обслуживает заявку, S_2 – канал занят и одна заявка в очереди, ..., S_n – максимальное число заявок в системе, когда канал занят и $n-1$ заявок ожидает обслуживания в очереди. Если канал свободен, заявка принимается к обслуживанию, иначе встает в очередь. Система при групповом поступлении переходит из состояния S_i в S_{i+2} , при единичном поступлении переходит из S_i в S_{i+1} . Дисциплина принятия групп заявок – полный отказ, т.е. если в очереди нет мест для принятия всей группы, то пришедшая группа получает отказ. Таким образом, вероятность отказа вычисляется по $P_{loss} = p_n + d_2 p_{n-1}$.

СМО можно представить в виде направленного размеченного графа [92]. Напомним, вершины графа символизируют состояния системы, а дуги – переходы между ними. Граф состояний для данной системы будет иметь следующий вид

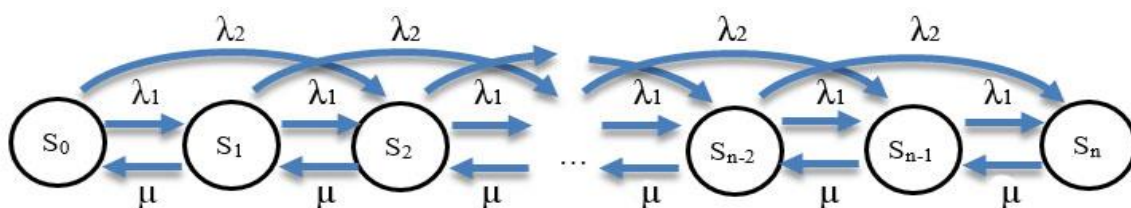


Рис. 3.3. Граф состояний одноканальной СМО с очередью и групповым поступлением заявок

Чтобы определить *показатели эффективности* СМО необходимо вычислить вероятности состояния системы $p_i(t)$. По представленному графу состояний (рис. 3.3) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова [5]

$$\begin{cases} p'_0(t) = p_0(\lambda_1 + \lambda_2) - p_1\mu, \\ p'_1(t) = p_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) - p_0\lambda_1 - p_2\mu, \\ p'_2(t) = p_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) - p_0\lambda_2 - p_1\lambda_1 - p_3\mu, \\ \dots \\ p'_{n-1}(t) = p_{n-1}(\lambda_1 + \mu) - p_{n-3}\lambda_2 - p_{n-2}\lambda_1 - p_n\mu, \\ p'_n(t) = p_n\mu - p_{n-2}\lambda_2 - p_{n-1}\lambda_1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Поскольку, как легко убедиться, рассматриваемая система является регулярной, то вместо нахождения предельных вероятностей можно определить стационарные, которые будут равны предельным. С их помощью можно легко найти требуемые показатели.

Для вычисления стационарных вероятностей в системе (3.1) положим $p'_i(t) = 0$ [7, 25], получим систему уравнений равновесия (СУР), которая является системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Такая СЛАУ состоит из n однородных (не имеющих свободных членов) уравнений, число уравнений равно числу неизвестных p_i . Определитель матрицы коэффициентов этой СЛАУ равен нулю, следовательно, система не является крамеровской, т.е. имеет бесконечное число решений. Чтобы эта система стала крамеровской, необходимо использовать условие нормировки

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1.$$

В итоге получим СЛАУ следующего вида

$$\begin{cases} p_0(\lambda_1 + \lambda_2) - p_1\mu = 0, \\ p_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) - p_0\lambda_1 - p_2\mu = 0, \\ p_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu) - p_0\lambda_2 - p_1\lambda_1 - p_3\mu = 0, \\ \dots \\ p_{n-1}(\lambda_1 + \mu) - p_{n-3}\lambda_2 - p_{n-2}\lambda_1 - p_n\mu = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Расширенная матрица данной СЛАУ будет

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} \lambda_1 + \lambda_2 & -\mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_2 + \mu & -\mu & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu & -\mu & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_1 & -\lambda_2 & \lambda_1 + \mu & -\mu & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Нетрудно видеть, что расширенная матрица СЛАУ является сильно разреженной, поэтому для решения системы (3.2) можно использовать методы типа прогонки.

Для того чтобы найти решение СУР (3.2), т.е. определить вероятности всех стационарных состояний системы $p_1, \dots, p_n$, выразим вероятность каждого состояния p_i в системе (3.2) через p_0 , получим $p_i = p_0 a_i, i = \overline{1, n}$.

Коэффициенты $a_i, i = \overline{2, n-1}$, при p_0 находится по правилу $a_i = (a_{i-2} + a_{i-1}) \frac{\lambda_2}{\mu} + a_{i-1} \frac{\lambda_1}{\mu}$. Коэффициент a_1 также определяется по данному правилу, если принять $a_0 = 1, a_{-1} = 0$. Таким образом, получаем рекуррентную формулу для нахождения i -го коэффициента при p_0

$$a_{-1} = 0; a_0 = 1; a_i = (a_{i-2} + a_{i-1}) \frac{\lambda_2}{\mu} + a_{i-1} \frac{\lambda_1}{\mu}, i = \overline{1, n-1}. \quad (3.3)$$

В связи с тем, что прибывшая группа (2 заявки) получит отказ в обслуживании, если система находится в состоянии S_{n-1} , последний коэффициент определяется по формуле

$$a_n = a_{n-2} \frac{\lambda_2}{\mu} + a_{n-1} \frac{\lambda_1}{\mu}.$$

В случае, когда $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, формулы (3.3) примут вид

$$a_i = a_{i-2} \frac{\lambda}{\mu} + 2a_{i-1} \frac{\lambda}{\mu}, i = \overline{1, n-1}.$$

Подставив выражение для a_i в условие нормировки и выразив p_0 , мы получим

$$p_0 = (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{-1}. \quad (3.4)$$

Теперь найдем вероятности состояний системы p_i , $i = \overline{1, n}$, по формуле

$$p_i = p_0 a_i. \quad (3.5)$$

Рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов a_i при поступлении групп различного размера в одноканальную СМО представлены в табл. 3.1, в формулах $a_0 = 1$, $a_{-1} = 0$.

Таблица 3.1. Рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов a_i при поступлении групп заявок различного размера в одноканальную СМО

Размер группы	Рекуррентные соотношения
2-1	$a_i = (a_{i-2} + a_{i-1}) \frac{\lambda_2}{\mu} + a_{i-1} \frac{\lambda_1}{\mu}; a_n = a_{n-2} \frac{\lambda_2}{\mu} + a_{n-1} \frac{\lambda_1}{\mu}, i = \overline{1, n-1}.$
3-2-1	$a_i = (a_{i-3} + a_{i-2} + a_{i-1}) \frac{\lambda_3}{\mu} + (a_{i-2} + a_{i-1}) \frac{\lambda_2}{\mu} + a_{i-1} \frac{\lambda_1}{\mu}, i = \overline{1, n-1};$ $a_n = a_{n-3} \frac{\lambda_3}{\mu} + a_{n-2} \frac{\lambda_2}{\mu} + a_{n-1} \frac{\lambda_1}{\mu}.$
4-3-2-1	$a_i = (a_{i-4} + a_{i-3} + a_{i-2} + a_{i-1}) \frac{\lambda_4}{\mu} + (a_{i-3} + a_{i-2} + a_{i-1}) \frac{\lambda_3}{\mu} + (a_{i-2} + a_{i-1}) \frac{\lambda_2}{\mu} + a_{i-1} \frac{\lambda_1}{\mu};$ $a_n = a_{n-4} \frac{\lambda_4}{\mu} + a_{n-3} \frac{\lambda_3}{\mu} + a_{n-2} \frac{\lambda_2}{\mu} + a_{n-1} \frac{\lambda_1}{\mu}, i = \overline{1, n-1}.$

Таким образом, мы рассмотрели одноканальные СМО с конечной очередью и получили рекуррентные соотношения для отыскания коэффициентов a_i , которые входят в формулы для вычисления стационарных вероятностей таких СМО. Теперь перейдем к изучению более сложного случая.

Рассмотрим общий случай – систему $M^X/M/m/n$, т.е. многоканальную СМО с конечной очередью и случайным размером поступающих групп заявок. Пусть в СМО m каналов, максимальная длина очереди n , интенсивность обслуживания каждым каналом – μ , суммарная интенсивность поступления групп заявок – λ . Максимальный размер поступающей группы k , вероятность поступления группы размером i примем равной d_i , $i = \overline{1, k}$. Тогда интенсивность поступления группы размером i составит $\lambda_i = \lambda d_i$, $i = \overline{1, k}$. Максимальное число заявок в данной системе равно $N = m + n$, а число возможных состояний $H = m + n + 1$. Дисциплина принятия групп – полный отказ.

СУР для описанной выше СМО будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 \sum_{j=1}^k \lambda_j = p_1 \mu; \\ p_1 \sum_{j=1}^{\min(N-1, k)} \lambda_j + p_1 \mu = p_0 \lambda_1 + 2p_2 \mu; \\ p_i \sum_{j=1}^{\min(N-i, k)} \lambda_j + ip_i \mu = \sum_{j=1}^{\min(i, k)} p_{i-j} \lambda_j + (i+1)p_{i+1} \mu, \quad i = \overline{2, m-1}; \\ p_i \sum_{j=1}^{\min(N-i, k)} \lambda_j + mp_i \mu = \sum_{j=1}^{\min(i, k)} p_{i-j} \lambda_j + mp_{i+1} \mu, \quad i = \overline{m, N-1}; \\ p_N \mu = \sum_{j=1}^k p_{i-j} \lambda_j. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Условие нормировки $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1$.

Применим к СУР (3.6) тот же подход, что и в случае одноканальной системы. В результате для СМО с дисциплиной полного отказа получим следующие рекуррентные соотношения для определения коэффициентов a_i :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1; \\ a_i &= \sum_{j=1}^{\min(i, k)} \frac{\lambda_j}{i\mu} \sum_{b=1}^j a_{i-b}, \quad i = \overline{1, m}; \\ a_i &= \sum_{j=1}^{\min(i, k)} \frac{\lambda_j}{m\mu} \sum_{b=1}^j a_{i-b}, \quad i = \overline{m+1, N-1}; \\ a_N &= \sum_{j=1}^{\min(i, k)} \frac{\lambda_j a_{N-j}}{m\mu}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Отметим, что в случае дисциплины частичного принятия групп рекуррентные соотношения для нахождения коэффициентов a_i будут иметь вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1; \\ a_i &= \sum_{j=1}^{\min(i, k)} \frac{\lambda_j}{i\mu} \sum_{b=1}^j a_{i-b}, \quad i = \overline{1, m}; \\ a_i &= \sum_{j=1}^{\min(i, k)} \frac{\lambda_j}{m\mu} \sum_{b=1}^j a_{i-b}, \quad i = \overline{m+1, N}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Вычислив коэффициенты $a_i, i = \overline{1, N}$, можно найти вероятность p_0 по формуле (3.4) и все остальные стационарные вероятности состояний системы из (3.5).

Таким образом, метод для нахождения стационарных (предельных) вероятностей состояний многоканальной СМО с конечной очередью и групповым поступлением заявок заключается в следующем:

1. вычислить вспомогательные коэффициенты $a_i, i = \overline{1, N}$ при p_0 по рекуррентным соотношениям (3.7), в случае СМО с дисциплиной полного отказа, либо по соотношениям (3.8), в случае дисциплины частичного принятия;
2. найти предельную вероятность нахождения системы в состоянии S_0 по формуле (3.4);
3. определить остальные вероятности нахождения системы в состоянии S_i из равенств (3.5).

Данный метод и рекуррентные соотношения для определения коэффициентов a_i позволяют найти распределение стационарных (предельных) вероятностей состояний СМО с конечным числом каналов и длиной очереди, а также с групповым потоком заявок. При этом размер поступающих групп есть дискретная случайная величина с ограниченным числом возможных значений.

В данном пункте мы рассмотрели однофазные системы обслуживания, далее исследуем более общий случай – многофазные СМО.

3.2.2. Исследование двухфазных и трехфазных систем массового обслуживания в некоторых частных случаях

В случае многоканальных СМО с конечной очередью, дисциплиной обслуживания FIFO, пуассоновскими потоками поступления и обслуживания заявок несложно составить размеченный граф состояний (например, рис. 3.3.), по графу составить систему уравнений равновесия и, решив ее, найти стационарные вероятности состояний системы. Однако при увеличении числа фаз СУР заметно усложняются, что сильно затрудняет аналитическое исследование. Так, СУР для простейшего случая четырехфазной системы $M/M/1/0 \rightarrow M/1/0 \rightarrow M/1/0 \rightarrow M/1/0$ имеет 23 уравнения, СУР для $M/M/1/1 \rightarrow M/1/1 \rightarrow M/1/1 \rightarrow M/1/1$ состоит уже из 114 уравнений. Отметим, что при увеличении числа каналов, мест в очереди и (или) фаз, размерность СУР будет существенно возрастать. Поэтому в дальнейшем ограничимся изучением двухфазных и трехфазных систем с конечными очередями, блокировками и простейшими потоками обслуживания заявок.

На рис. 3.4 представлены графы состояний двухфазной СМО $M/M/1/1 \rightarrow M/1/1$ (рис. 3.4 а) и трехфазной системы $M/M/1/0 \rightarrow M/1/0 \rightarrow M/1/0$ (рис. 3.4 б) с блокировками.

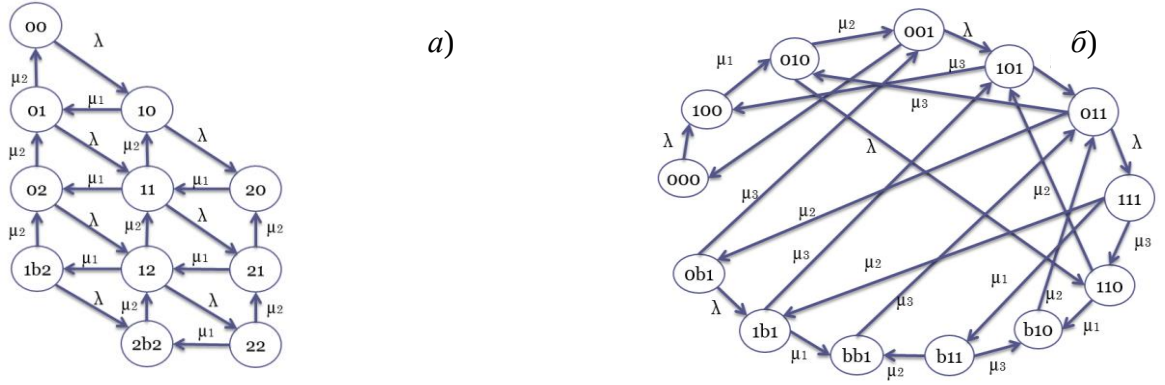


Рис. 3.4. а) Граф системы $M/M/1/1 \rightarrow M/1/1$; б) граф системы $M/M/1/0 \rightarrow M/1/0 \rightarrow M/1/0$
Здесь λ – интенсивность поступления заявок в систему; μ_i – интенсивность обслуживания заявок одним каналом на i -й фазе.

По графам состояний, которые представлены на рис. 3.4, составим СУР. Для этого введем обозначения. В случае двухфазной системы: p_{ij} – вероятность нахождения в системе i и j заявок на фазе 1 и 2 соответственно; p_{ij}^b – вероятность того, что на фазе 1 находятся i заявок и ее канал блокирован, на фазе 2 – j заявок. В случае трехфазной системы: p_{ijz} – вероятность нахождения в системе i, j и z заявок на фазах 1, 2 и 3 соответственно; p_{ijz}^{b0} – вероятность присутствия в системе j и z заявок на фазах 2 и 3, при этом канал первой фазы блокирован и в ней находятся i заявок; p_{ijz}^{bb} – вероятность того, что каналы фаз 1, 2 блокированы.

СУР для СМО $M/M/1/1 \rightarrow M/1/1$ выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{00}\lambda = p_{01}\mu_2, \\ p_{10}(\lambda + \mu_1) = p_{00}\lambda + p_{11}\mu_2, \\ p_{20}\mu_1 = p_{10}\lambda + p_{21}\mu_2, \\ p_{01}(\lambda + \mu_2) = p_{10}\mu_1 + p_{02}\mu_2, \\ p_{11}(\lambda + \mu_1 + \mu_2) = p_{01}\lambda + p_{20}\mu_1 + p_{12}\mu_2, \\ p_{21}(\mu_1 + \mu_2) = p_{11}\lambda + p_{22}\mu_2, \\ p_{02}(\lambda + \mu_2) = p_{11}\mu_1 + p_{12}^b\mu_2, \\ p_{12}(\lambda + \mu_1 + \mu_2) = p_{02}\lambda + p_{21}\mu_1 + p_{22}^b\mu_2, \\ p_{22}(\mu_1 + \mu_2) = p_{12}\lambda, \\ p_{12}^b(\lambda + \mu_2) = p_{12}\mu_1, \\ p_{22}^b\mu_2 = p_{12}^b\lambda + p_{22}\mu_1, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

для трехфазной системы $M/M/1/0 \rightarrow M/1/0 \rightarrow M/1/0$ СУР имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{000}\lambda = p_{001}\mu_3, \\ p_{100}\mu_1 = p_{000}\lambda + p_{101}\mu_3, \\ p_{010}(\lambda + \mu_2) = p_{100}\mu_1 + p_{011}\mu_3, \\ p_{001}(\lambda + \mu_3) = p_{010}\mu_2 + p_{011}^{ob}\mu_3, \\ p_{101}(\mu_1 + \mu_3) = p_{001}\lambda + p_{011}\mu_2 + p_{111}^{ob}\mu_3, \\ p_{011}(\lambda + \mu_2 + \mu_3) = p_{101}\mu_1 + p_{110}^{b0}\mu_2 + p_{111}^{bb}\mu_3, \\ p_{111}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = p_{011}\lambda, \\ p_{110}(\mu_1 + \mu_2) = p_{010}\lambda + p_{111}\mu_3, \\ p_{110}^{b0}\mu_2 = p_{110}\mu_1 + p_{111}^{b0}\mu_3, \\ p_{111}^{b0}(\mu_2 + \mu_3) = p_{111}\mu_1, \\ p_{111}^{bb}\mu_3 = p_{111}^{b0}\mu_2 + p_{111}^{ob}\mu_1, \\ p_{011}^{ob}(\lambda + \mu_3) = p_{011}\mu_2, \\ p_{111}^{ob}(\mu_2 + \mu_3) = p_{111}\mu_2 + p_{011}^{ob}\lambda. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Можно видеть, что при увеличении числа фаз с двух до трех система уравнений равновесия становится намного сложнее, поскольку число уравнений и связей для каждого состояния увеличивается.

В ходе выполнения диссертационного исследования автору удалось получить аналитические результаты для следующих двухфазных СМО с блокировками: $M/M/1/0 \rightarrow /M/1/n$, $M/M/1/n \rightarrow /M/1/0$, $MAP/M/1/0 \rightarrow /M/1/n$ и $MAP/M/1/n \rightarrow /M/1/0$.

Аналитические результаты представлены в виде рекуррентных соотношений для вычисления коэффициентов a_{ij} , в случае поступления в СМО пуассоновского потока заявок, и матричных коэффициентов A_{ij} , в случае MAP -потока. Эти коэффициенты входят в формулы для определения стационарных вероятностей p_{ij} нахождения системы в состоянии S_{ij} . Для получения рекуррентных соотношений применялся аналогичный подход, что и при исследовании одноканальной СМО в п. 3.2.1.

Далее приведены результаты аналитического исследования частных случаев двухфазных СМО. Для рассмотренных систем представлены граф состояний, рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов a_{ij} или матричных коэффициентов A_{ij} , а также формулы для определения стационарных вероятностей состояний системы.

Двухфазные СМО с пуассоновским потоком поступающих заявок. Далее представлены графы состояний и рекуррентные соотношения для вычисления

коэффициентов a_{ij} для следующих частных случаев двухфазных СМО с конечными очередями и блокировками:

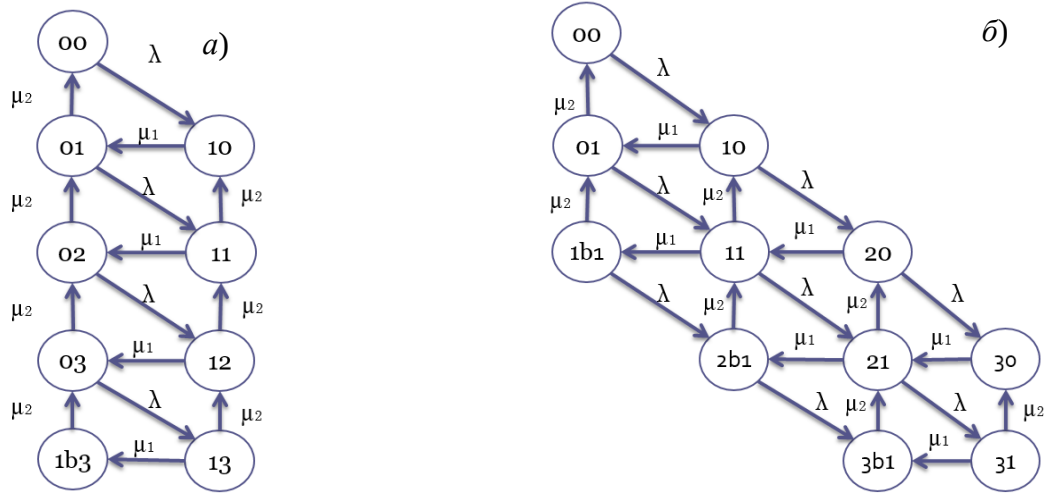


Рис. 3.5. а) Граф системы $M/M/1/0 \rightarrow M/M/1/2$; б) граф системы $M/M/1/2 \rightarrow M/M/1/0$

1. Система $M/M/1/0 \rightarrow M/M/1/n$

Граф состояний для системы $M/M/1/0 \rightarrow M/M/1/2$ представлен на рис. 3.5 а. Формулы для определения коэффициентов a_{ij} для $p_{1N}^b = \left(\sum_{i,j=0} a_{ij} \right)^{-1}$ следующие

$$a_{1N}^b = 1; a_{1N} = \frac{\mu_2}{\mu_1}; a_{0i} = (a_{1i} + a_{0,i+1}) \frac{\mu_2}{\lambda}; a_{1i} = (a_{1,i+1} + a_{0i}) \frac{\mu_2}{\mu_1}, i = \overline{N, 0}; a_{00} = a_{01} \frac{\mu_2}{\lambda}. \quad (3.11)$$

Здесь и далее $N = n + 1$ – максимальное число заявок на фазе с очередью.

Остальные стационарные вероятности состояния системы $p_{ij}, i = \overline{0, 1}, j = \overline{0, N}$ определяются из уравнения $p_{ij} = p_{1N}^b a_{ij}$.

2. Система $M/M/1/n \rightarrow M/M/1/0$

Граф состояний для системы $M/M/1/2 \rightarrow M/M/1/0$ представлен на рис. 3.5 б. Формулы для вычисления коэффициентов a_{ij} для $p_{01} = \left(\sum_{i,j=0} a_{ij} \right)^{-1}$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_{01} &= 1; \quad a_{00} = \frac{\mu_2}{\lambda}; \quad a_{11} = \frac{\lambda d_2 c}{\mu_1 \mu_2 (d_1 + d_2)}; \\ a_{i1} &= \left(a_{i-1,1} c - a_{i-2,1} \lambda - a_{i-1,0} \frac{\lambda \mu_1}{d_1} - a_{i-1,1}^b \frac{\lambda \mu_2}{d_2} \right) \frac{d_1 d_2}{\mu_1 \mu_2 (d_1 + d_2)}, \quad i = \overline{2, N-1}; \\ a_{N1} &= a_{N-1,1} \frac{\lambda}{g}; \quad a_{j1}^b = a_{j-1,1}^b \frac{\lambda}{d_2} + a_{j1} \frac{\mu_1}{d_2}, \quad j = \overline{2, N-1}; \quad a_{N1}^b = a_{N-1,1}^b \frac{\lambda}{\mu_2} + a_{N1} \frac{\mu_1}{\mu_2}; \\ a_{z0} &= a_{z-1,1}^b \frac{\lambda}{d_1} + a_{z1} \frac{\mu_2}{d_1}, \quad z = \overline{2, N-1}; \quad a_{N0} = a_{N-1,0} \frac{\lambda}{\mu_1} + a_{N1} \frac{\mu_2}{\mu_1}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $d_1 = \lambda + \mu_1$, $d_2 = \lambda + \mu_2$, $g = \mu_1 + \mu_2$, $c = \lambda + \mu_1 + \mu_2$. Стационарные вероятности состояния системы $p_{ij}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, 1}$ находятся из $p_{ij} = p_{01} a_{ij}$.

Двухфазные СМО с МАР-потоком. Граф состояний двухфазной СМО с МАР-потоком и блокировками имеет следующий вид (рис. 3.6):

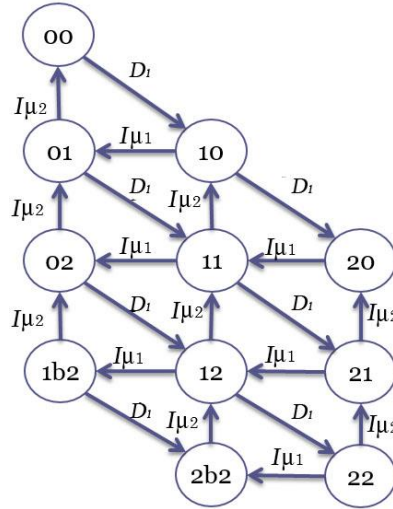


Рис. 3.6. Граф системы $МАР/M/1/1 \rightarrow /M/1/1$

Здесь и далее I – единичная матрица, матрицы D_i строятся по формулам (1.7).

Далее представлены рекуррентные соотношения для вычисления матричных коэффициентов A_{ij} для следующих частных случаев двухфазных СМО с МАР-потоком и блокировками.

1. Система $МАР/M/1/0 \rightarrow /M/1/n$

Формулы для вычисления матричных коэффициентов A_{ij} для

$p_{1N}^b = \left(\left(\sum_i \sum_j A_{ij} + A_{1N}^b \right) \vec{x} \vec{y} \right)^{-1}$, где $\vec{x}$ и $\vec{y}$ – вектор-строка и вектор-столбец, состоящие из единиц, имеют вид

$$A_{1N}^b = I; \quad A_{1N} = (H_2 - D(1))H_1^{-1}; \quad A_{0N} = (H_1 + H_2 - D(1))A_{1N}D_1^{-1};$$

$$A_{1,N-1} = (H_2 - D_0)A_{0N}H_1^{-1} - H_2H_1^{-1};$$

$$A_{1i} = (H_2 - D_0)A_{0,i+1}H_1^{-1} - H_2A_{0,i+2}H_1^{-1}, \quad i = \overline{N-2, 1};$$

$$A_{0i} = (H_1 + H_2 - D_0)A_{1i}D_1^{-1} - H_2A_{1,i+1}H_1^{-1}, \quad i = \overline{N, 1};$$

$$A_{00} = H_2A_{01}(-D_0)^{-1}.$$

Стационарные вероятности состояния системы $p_{ij}, i = \overline{0, 1}, j = \overline{0, N}$ определяются из

$$p_{ij} = p_{1N}^b A_{ij} \vec{x} \vec{y}.$$

2. Система $МАР/M/1/n \rightarrow /M/1/0$

Формулы для вычисления матричных коэффициентов A_{ij} для

$$p_{01} = \left(\sum_i \sum_j A_{ij} \vec{x} \vec{y} + \sum_i A_{i1}^b \vec{x} \vec{y} \right)^{-1} \text{ имеют вид}$$

$$\begin{aligned} A_{01} &= I; \quad A_{00} = H_2 (-D_0)^{-1}; \quad A_{11} = (C_2 - A_{00} H_1 D_1) C_1 C_2 K^{-1}; \\ A_{i1} &= (A_{i-1,1} G - A_{i-2,1} D_1 - A_{i-1,0} H_1 D_1 C_1^{-1} - A_{i-1,1}^b H_2 D_1 C_2^{-1}) C_1 C_2 K^{-1}, \quad i = \overline{2, n}; \\ A_{N1} &= A_{N-1,1} D_1 G^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{j1}^b &= A_{j-1,1}^b D_1 C_2^{-1} + A_{j1} H_1 C_2^{-1}, \quad j = \overline{2, n}; \quad A_{N1}^b = A_{N-1,1}^b D_1 B_2 + A_{N1} H_1 B_2; \\ A_{m0} &= A_{m-1,0} D_1 C_1^{-1} + A_{m1} H_2 C_1^{-1}, \quad m = \overline{2, n}; \quad A_{N0} = A_{N-1,0} D_1 H_1^{-1} + A_{N1} H_2 H_1^{-1}, \end{aligned}$$

где $N=n+1$, $H_1 = I\mu_1$, $H_2 = I\mu_2$, $C_1 = H_1 - D_0$, $C_2 = H_2 - D_0$, $K = H_1 H_2 (C_1 + C_2)$,

$$B_1 = H_1 - D(1), \quad B_2 = H_2 - D(1), \quad G = H_1 + H_2 - D_0.$$

Стационарные вероятности состояния системы $p_{ij}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, 1}$ находятся из $p_{ij} = p_{01} A_{ij} \vec{x} \vec{y}$.

Можно видеть, что для получения распределения стационарных вероятностей состояний двухфазных СМО применяется аналог метода, который описан в конце п. 3.2.1. Отличия заключаются в используемых рекуррентных соотношений для вычисления коэффициентов a_{ij} и матричных коэффициентов A_{ij} (СМО с МАР-потокотом).

Таким образом, в данном разделе представлен метод отыскания предельных вероятностей состояний системы, основой которого являются, полученные автором, рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов a_i (a_{ij} и A_{ij} в случае двухфазных СМО). Данный метод применим к однофазным СМО с групповым потоком заявок, где размер поступающих групп есть дискретная случайная величина с конечным числом возможных значений, а также к частным случаям многофазных СМО с блокировками.

Для СМО где число фаз и мест для принятия заявок на каждой из них больше единицы, например, СУР (3.9) и (3.10), формулы (3.11) и (3.12) не подходят. Однако стационарные вероятности в этом случае можно отыскать с помощью численно-аналитического метода, который описан далее.

3.3. Численно-аналитический метод вычисления стационарных вероятностей состояний систем массового обслуживания с групповыми потоками

В предыдущем разделе были представлены результаты аналитического исследования однофазных и частных случаев многофазных СМО. Рассмотрим более сложную систему – многофазную СМО с групповым поступлением, блокировками, числом фаз и мест на каждой из них более единицы, т.е. общий случай для СМО, которые были рассмотрены в п. 3.2.2. Изучение такой системы аналитическими методами сопряжено со значительными трудностями, поэтому, наряду с ними, будем использовать и численные методы исследования.

Далее опишем численно-аналитический метод вычисления стационарных вероятностей многофазных СМО с групповыми потоками заявок. Данный метод основан на комбинации полученных автором рекуррентных формул, которые позволяют составить СУР для многофазных СМО и известных методов решения возникающих при этом СЛАУ.

Предлагаемый метод применим к системам типа $M^X/M/m_1/n_1 \rightarrow M/m_2/n_2 \rightarrow \dots$, т.е. когда в многофазной СМО имеется $u > 1$ фаз, каждая из которых содержит $N_u > 1$, $u = \overline{1, u}$ мест для принятия заявок, а также время поступления групп заявок и обслуживания подчиняются экспоненциальному закону распределения.

В данном пункте используются следующие обозначения: m_u – число каналов и n_u – длина очереди на фазе u , $N_u = m_u + n_u > 1$, v – максимальный размер поступающей группы, p_{ij} , p_{ij}^b , p_{ijz} , p_{ijz}^{b0} и p_{ijz}^{bb} имеют тот же смысл, что и в п. 3.2.2.

Для облегчения выкладок введем следующие обозначения: $p_{iN_2z}^{b0} = p_{i,N_2+1,z}$, $p_{ijz}^{0b} = p_{i,j,N_3+1}$, $p_{ijz}^{bb} = p_{i,N_2+1,N_3+1}$ – вероятность блокировки соответствующих фаз; $p_{0jz}^{b0} = p_{i0z}^{0b} = p_{0jz}^{bb} = p_{i0z}^{bb} = p_{00z}^{bb} = 0$; $p_{ijz} = 0$, если выполняется хотя бы одно из условий: $i < 0$, $i > N_1+2$, $j < 0$, $j > N_2+2$, $z < 0$, $z > N_3+2$.

Отметим, что система может оказаться в состоянии блокировки каналов только в случае, когда в каком-либо канале фазы u обслуживание завершено и нет свободных мест для принятия заявки (группы заявок) из этого канала на фазе $u+1$.

СУР для двухфазной СМО с групповым поступлением имеет вид

$$\begin{aligned}
& p_{ij} \left(\sum_{k=1}^{\min(v, N_1-i)} \lambda_k + \min(i, m_1) \mu_1 + \min(j, m_2) \mu_2 \right) = \\
& = \sum_{k=1}^{\min(v, i)} \lambda_k p_{i-k, j} + \min(i+1, m_1) \mu_1 p_{i+1, j-1} + \min(j+1, m_2) \mu_2 p_{i, j+1}, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_2}; \quad (3.13) \\
& p_{1N_2}^b \left(\sum_{k=1}^{\min(v, N_1-1)} \lambda_k + m_2 \mu_2 \right) = \mu_1 p_{1N_2}; \\
& p_{iN_2}^b \left(\sum_{k=1}^{\min(v, N_1-i)} \lambda_k + m_2 \mu_2 \right) = \sum_{k=1}^{\min(v, i)} \lambda_k p_{i-k, N_2}^b + \min(i, m_1) \mu_1 p_{iN_2}, \quad i = \overline{2, N_1}.
\end{aligned}$$

В случае трехфазной СМО с групповым поступлением СУР будет следующего вида

$$\begin{aligned}
& p_{ijz} \left(\sum_{k=1}^{\min(v, N_1-i)} \lambda_k + \min(i, m_1) \mu_1 + \min(j, m_2) \mu_2 + \min(z, m_3) \mu_3 \right) = \\
& = \sum_{k=1}^{\min(v, i)} \lambda_k p_{i-k, j, z} + \min(i+1, m_1) \mu_1 p_{i+1, j-1, z} + \min(j+1, m_2) \mu_2 p_{i, j+1, z-1} + \min(z+1, m_3) \mu_3 p_{i, j, z+1}, \\
& \quad i = \overline{0, N_1-1}, \quad j = \overline{0, N_2}, \quad z = \overline{0, N_3}; \\
& p_{N_1 j z} (m_1 \mu_1 + \min(j, m_2) \mu_2 + \min(z, m_3) \mu_3) = \\
& = \sum_{k=1}^{\min(v, N_1)} \lambda_k p_{N_1-k, j, z} + \min(j+1, m_2) \mu_2 p_{N_1, j+1, z-1} + \min(z+1, m_3) \mu_3 p_{i, j, z+1}, \quad j = \overline{0, N_2}, \quad z = \overline{0, N_3-2}; \\
& p_{N_1, N_2, N_3-1} (m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2 + \min(z, m_3) \mu_3) = \sum_{k=1}^{\min(v, N_1)} \lambda_k p_{N_1-k, N_2, N_3-1} + m_3 \mu_3 p_{N_1 N_2 N_3}; \quad (3.14) \\
& p_{N_1 N_2 N_3} (m_1 \mu_1 + m_2 \mu_2 + m_3 \mu_3) = \sum_{k=1}^{\min(v, N_1)} \lambda_k p_{N_1-k, N_2, N_3-1}; \\
& p_{iN_2 z}^{b0} \left(\sum_{k=1}^{\min(v, N_1-i)} \lambda_k + m_2 \mu_2 + \min(z, m_3) \mu_3 \right) = \\
& = \sum_{k=1}^{\min(v, i-1)} \lambda_k p_{i-k, N_2, z}^{b0} + \min(i, m_1) \mu_1 p_{iN_2 z} + \min(z+1, m_3) \mu_3 p_{i, N_2, z+1}^{b0}, \quad i = \overline{1, N_1-1}, \quad z = \overline{0, N_3-1}; \\
& p_{ijN_3}^{0b} \left(\sum_{k=1}^{\min(v, N_1-i)} \lambda_k + \min(i, m_1) \mu_1 + m_3 \mu_3 \right) = \\
& = \sum_{k=1}^{\min(v, i-1)} \lambda_k p_{i-k, j, N_3}^{0b} + \min(i+1, m_1) \mu_1 p_{i+1, j-1, N_3}^{0b} + \min(j, m_2) \mu_2 p_{ijN_3}, \quad i = \overline{1, N_1-1}, \quad j = \overline{1, N_2}; \\
& p_{N_1 j N_3}^{0b} (m_1 \mu_1 + m_3 \mu_3) = \sum_{k=1}^{\min(v, N_1-1)} \lambda_k p_{N_1-k, j, N_3}^{0b} + \min(j, m_2) \mu_2 p_{N_1 j N_3}, \quad j = \overline{1, N_2}; \\
& p_{iN_2 N_3}^{bb} \left(\sum_{k=1}^{\min(v, N_1-i)} \lambda_k + m_3 \mu_3 \right) = \sum_{k=1}^{\min(v, i-1)} \lambda_k p_{i-k, N_2, N_3}^{bb} + \min(i, m_1) \mu_1 p_{iN_2 N_3}^{0b} + \min(j, m_2) \mu_2 p_{iN_2 N_3}^{b0}, \quad i = \overline{1, N_1}.
\end{aligned}$$

Системы (3.13) и (3.14) являются системами линейных алгебраических уравнений. Все уравнения однородны, их число равно числу неизвестных. Определитель матрицы коэффициентов для СЛАУ (3.13) и (3.14) равен нулю, т.е. их матрицы не являются крамеровскими.

СЛАУ (3.13) и (3.14) сложны для аналитического исследования из-за наличия большого числа связей для каждого состояния и количества уравнений, например, для СМО $M^X/M/1/1 \rightarrow /M/1/1$ СУР включает 11 уравнений, СУР для $M^X/M/1/5 \rightarrow /M/1/5$ уже имеет 55 уравнений. Дальнейшее увеличение числа каналов и (или) мест в очереди приводит к существенному возрастанию размерности СУР. Однако такие системы можно решить численно. На этом основывается предлагаемый численно-аналитический метод вычисления стационарных вероятностей многофазных СМО с групповым поступлением заявок.

Численно-аналитический метод для нахождения стационарных вероятностей состояния многофазных СМО с пуассоновскими неординарными потоками.

1. Составляем СУР для выбранной СМО по формулам (3.13) для двухфазных СМО или по формулам (3.14) для трехфазных СМО. Одно из уравнений заменяем условием нормировки и получаем СЛАУ, которая описывает распределение стационарных вероятностей системы;

2. Полученная СЛАУ совместна, является крамеровской [24] и обладает следующим свойством. При отсутствии группового поступления заявок матрица коэффициентов этой СЛАУ будет сильно разреженной (четырёхдиагональной для двухфазной СМО, пятидиагональной для трехфазной СМО). При увеличении максимального размера поступающей группы заявок матрица будет стремиться к нижнетреугольному виду. Наиболее распространенным способом решения СЛАУ является метод Гаусса или одна из его модификаций [77].

Приведем пример использования численно-аналитического метода для вычисления стационарных вероятностей системы $M/M/1/1 \rightarrow /M/1/1 \rightarrow /M/1/1$.

Составив СУР для данной системы по формулам (3.14) и заменив первое уравнение условием нормировки, мы получили СЛАУ, которая состоит из 41 уравнения. Опустим ее представление ввиду большого размера.

Данную СЛАУ мы решили методом Гаусса с выбором главного элемента. Этот метод выбран в связи с тем, что в нем исключается выбор главного элемента с очень

маленьким значением по абсолютной величине, что позволяет уменьшить влияние вычислительной погрешности. Результаты решения при параметрах $\lambda = 3$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 2$ представлены в табл. 3.2.

Таблица 3.2. Стационарные вероятности системы $M/M/1/1 \rightarrow M/1/1 \rightarrow M/1/1$

Фаза 1	A	B	Фаза 2	A	B	Фаза 3	A	B
0	0,2090	0,209	0	0,2429	0,243	0	0,1761	0,176
2	0,4508	0,451	2	0,5034	0,503	2	0,6082	0,608

Здесь в столбцах «Фаза» представлено число заявок на соответствующей фазе, без учета числа заявок на остальных фазах; в столбцах A – вычисленные стационарные вероятности, которые получены с помощью численно-аналитического метода; в столбцах B – вероятности, взятые из работы [170]. Можно видеть, что представленный численно-аналитический метод решения дает корректные результаты. Он применим к многофазным СМО с входящим пуассоновским неординарным потоком и экспоненциальным временем обслуживания заявок, а также к подобным системам с групповым обслуживанием.

Выводы по главе 3

В главе предложен новая методика теоретико-вероятностного моделирования работы микрологистических транспортных систем, на основе которой построена математическая модель функционирования микро-ЛТС, имеющая вид многофазной системы массового обслуживания.

Данная модель имеет особенности: наличие трех фаз обслуживания с блокировками, групповое поступление и обслуживание заявок, произвольное распределение времени обслуживания групп заявок и конечная длина очереди в каждой фазе, возможность наличия нескольких каналов и отдельных очередей (см. п. 1.3) перед ними на фазах. Полученная модель является сложной, поэтому определить аналитически стационарные характеристики созданной многофазной СМО в общем случае не удастся.

По этой причине на основе математической модели функционирования микро-ЛТС строится имитационная модель, принципы построения и ее описание представлены в следующей главе.

Тем не менее, для ряда частных случаев получены аналитические результаты. Так, предложен численно-аналитический метод отыскания стационарных вероятностей состояний многофазных СМО, применимый к любой системе, для которой можно записать СУР. Также представлены рекуррентные формулы, с помощью которых можно определить предельные характеристики однофазных СМО с неординарными потоками заявок и многофазных СМО в некоторых частных случаях.

ГЛАВА 4. «ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАСЧЕТОВ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ» И РЕШЕНИЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ

В данной главе представлены имитационная модель работы микро-ЛТС, ее программная реализация, описание созданного «Программного комплекса для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания» и результаты решения тестовых задач. Глава состоит из трех разделов. В первом, строится имитационная модель работы многофазной СМО, которая получена с использованием представленной в 3 главе методики. Также приводятся принципы функционирования имитационной модели, алгоритм ее работы и основные управляющие функции. Во втором описывается структура основных программных модулей, которые входят в состав созданного программного комплекса. В третьем разделе решаются тестовые и модельная задачи.

4.1. Описание имитационной модели работы микрологистической транспортной системы и алгоритма ее работы

В п. 3.1 предложена методика математического моделирования работы микро-ЛТС в виде многофазной СМО с групповым поступлением заявок. Полученная СМО обладает сложной структурой, поэтому исследовать ее аналитическими методами в общем случае не удалось. Для нахождения стационарных характеристик и определения показателей эффективности такой системы мы будем применять метод имитационного моделирования.

Для реализации математической модели построим имитационную модель, структурная схема которой приведена на рис. 4.1

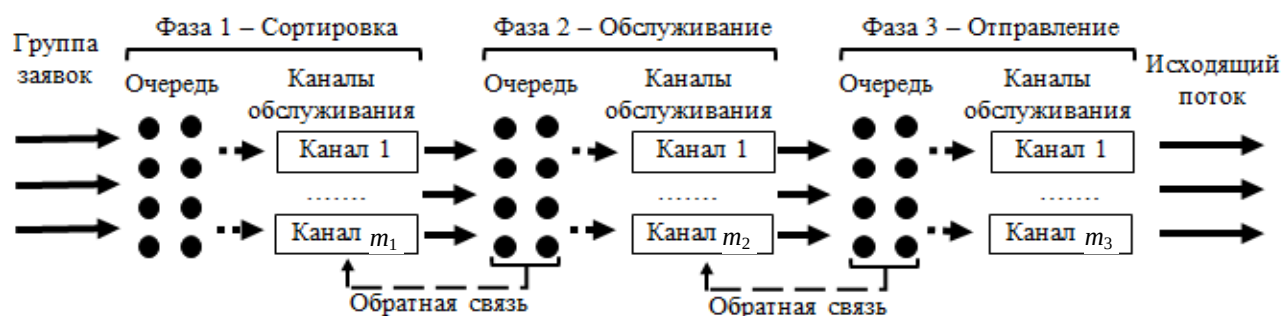


Рис. 4.1. Структурная схема имитационной модели работы микро-ЛТС

При создании имитационной модели используются следующие принципы.

- Входящий поток заявок состоит из последовательно поступающих групп заявок на обслуживание. Размер группы может быть либо константой, либо дискретной случайной величиной. Поступающая в систему группа может состоять из заявок различных типов. Интенсивность поступления групп заявок может меняться со временем.

- Система может включать от одной до трех фаз обслуживания. На каждой из них допустимо групповое обслуживание и наличие общей очереди, либо отдельных очередей перед каналами. Каждая фаза содержит m_i каналов и n_i мест в очереди, если очередь общая, $i = \overline{1,3}$. Если же перед каждым каналом очередь отдельная, то $\vec{n}_i$ – вектор, содержащий $n_i^{m_i}$ компонент.

- Каждый канал может обслуживать заявки только соответствующего ему типа. Исключением является универсальный канал, который способен обслуживать заявки любого типа.

- Закон распределения времени обслуживания для каждого канала может задаваться пользователем (равномерное, экспоненциальное, нормальное или константа). Допускается наличие межоперационного периода – промежутка времени, когда канал подготавливается к обслуживанию заявок.

- Поступившая заявка передается в канал для обслуживания, если он свободен, иначе встает в очередь. Если в системе на какой-либо фазе есть отдельные очереди, то заявка с типом i направляется в очередь перед каналом того же типа.

- Группы заявок поступают только на первую фазу и принимаются согласно дисциплине полного отказа.

- Если в очередях на второй или третьей фазе отсутствуют свободные места для принятия заявок с предыдущей фазы, то происходит временная блокировка каналов первой или второй фазы, в которых обслуживание заявок завершается.

В программной реализации имитационной модели используются следующие управляющие функции.

F_{GT} – функция генерирования интервалов времени между поступлением заявок, а также времени обслуживания заявок в каналах. Для разыгрывания доступны следующие законы: равномерный, геометрический, нормальный и гамма-распределение.

F_{GN} – функция генерирования размера поступающей группы заявок и размера обслуживаемой группы в канале. Разыгрывание может происходить по дискретному равномерному, биномиальному, пуассоновскому или геометрическому законам распределения.

F_{BMAP} – функция генерирования BMAP-потока. Пользователь задает законы распределения размеров поступающих групп заявок и интенсивность поступления групп в единицу времени. На основе этих данных происходит разыгрывание размера поступающей группы и времени до поступления следующей группы заявок.

F_{PH} – функция передачи заявок между фазами – осуществляет перенос заявки (группы заявок) между соседними фазами. Для этого проверяется количество свободных мест на фазе $i+1$. Если их достаточно, то число обслуженных заявок из канала фазы i сохраняется в отдельную переменную gr_i . Далее она передается в функцию F_Q , которая распределяет заявки по местам на фазе $i+1$. Если на фазе $i+1$ свободных мест недостаточно, то F_{PH} передает команду блокировки каналов фазы i в функцию F_K (она представлена ниже).

F_Q – функция управления очередью – распределяет поступающие заявки по каналам и местам в очереди, а также передает группу размера X_{i+1}^j из очереди в освободившийся канал. При поступлении группы заявок gr_i на фазу $i+1$ заявки распределяются по свободным каналам, затем по местам в очереди следующим образом. Если на этой фазе предусмотрена общая очередь, то ее длина увеличивается на величину gr_i . Если на фазе $i+1$ предусмотрены отдельные очереди перед каналами, то заявки распределяются по всем очередям согласно следующему правилу: группа полностью передается в очередь перед первым каналом, следующая группа заявок будет направлена в очередь перед вторым и т.д., цикл начинается сначала, как только перебор каналов заканчивается. При освобождении канала j с помощью функции F_{GN} генерируется значение X_{i+1}^j , затем длина очереди уменьшается на эту величину, которая далее передается в функцию F_K .

F_K – функция управления работой каналов – отвечает за включение канала при поступлении заявки, его отключении при завершении обслуживания и блокировки его работы, в случае необходимости. Канал j на фазе i считается свободным, когда переменная T_i^j , в которой хранится время работы канала, равна нулю, в противном

случае – занятым. При поступлении группы заявок X_i^j в канал j генерируется значение времени обслуживания этой группы T_i^j с помощью функции F_{GT} . При поступлении команды блокировки обслуживание в канале временно прекращается, в этом случае мы считаем, что группа заявок остается в нем и ожидает, пока на следующей фазе не появится достаточно свободных мест для принятия этой группы.

F_{PS} – функция проверки состояния системы – в этой функции учитываются количество принятых и отклоненных заявок и групп заявок, число заявок и их времена нахождения в каналах, в очереди, в фазе и в целом в системе, а также время блокировки каналов. Далее на основе собранных данных вычисляются показатели эффективности моделируемой системы: среднее время заявки в системе, в фазе i и в очереди; вероятность отказа; число занятых каналов и длина очереди на i -й фазе; время блокировки каналов; число обслуженных заявок в единицу времени; стационарные вероятности.

Блок-схема алгоритма работы имитационной модели представлен на рис. 4.2.

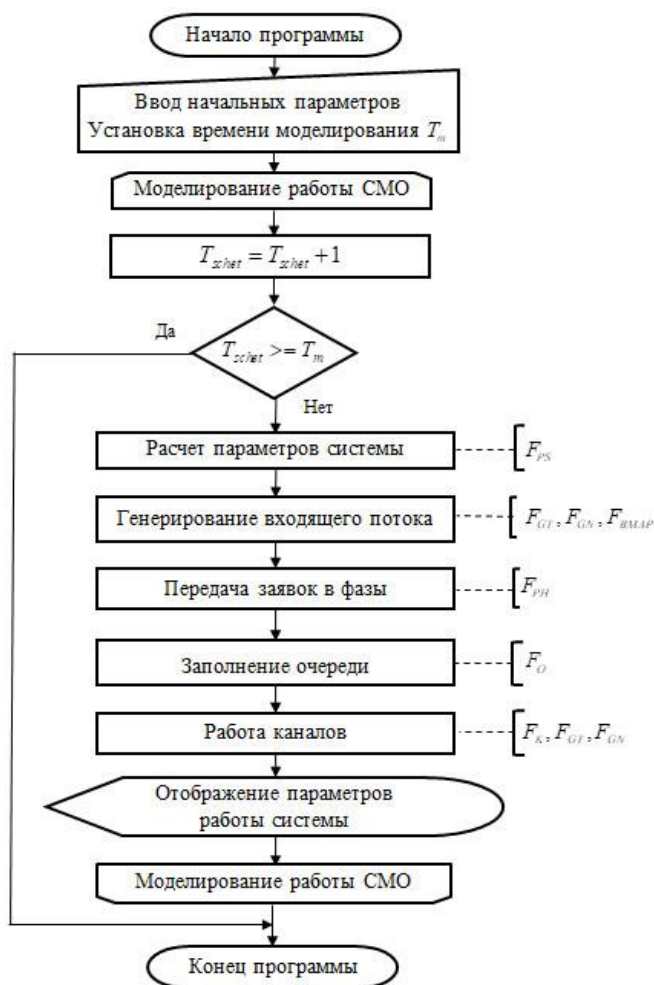


Рис. 4.2. Блок-схема алгоритма имитационной модели

При программной реализации имитационной модели используем следующее допущение. Время в имитационной модели является дискретной величиной. Минимальная единица времени – один *цикл работы* моделирующего алгоритма (рис. 4.2), либо *шаг*.

Тогда при разыгрывании значения какой-либо непрерывной случайной величины, мы будем округлять полученное значение до ближайшего целого.

Опишем блок-схему (рис. 4.2) более подробно.

В программном блоке «Ввод начальных параметров» пользователь устанавливает основные параметры моделируемой системы: s – число работающих фаз ($s = \overline{1,3}$); m_i – число каналов на фазе i ($i = \overline{1,s}$); n_i – максимальное число мест в очереди на соответствующей фазе, если очередь общая, либо $\vec{n}_i$ – вектор максимальных длин очередей к отдельным каналам; законы распределения времени между поступлением групп заявок и размеров этих групп; законы распределения времени обслуживания и размеров обслуживаемых групп для каждого канала; T_m – число циклов моделирования.

В программном блоке «Моделирование работы СМО» выполняется *основной цикл* работы имитационной модели. В его рамках работает внутренний цикл, продолжительность которого равна интервалу времени между последовательным поступлением групп заявок.

Количество выполненных циклов хранится в переменной T_{schet} , которая принимает целые положительные значения. При выполнении основным циклом T_m шагов (т.е. $T_{schet} = T_m$) работа имитационной модели завершается, не дожидаясь поступления следующей группы заявок и окончания обслуживания в каналах.

Программный блок «Расчет параметров системы» предназначен для выполнения функции F_{PS} .

В блоке «Генерирование входящего потока» по параметрам, которые устанавливает пользователь, циклически генерируются следующие значения: T – натуральное число, определяющее промежуток времени между последовательным поступлением групп заявок, и X_{in} – целое неотрицательное число, определяющее размер поступающей группы заявок. В блоке на каждом шаге основного цикла проверяется условие $T = 0$. Если оно не выполняется, то значение T уменьшается на единицу, иначе

генерируются новые значения T и X_{in} по одному из ранее определенных вариантов: функции F_{GT} и F_{GN} или же F_{BMAP} .

В программном блоке «Передача заявок в фазы» осуществляется принятие заявок на фазу 1, их передача между фазами, а также отправление обслуженных заявок с финальной фазы. Для этого используется функция F_{PH} . В зависимости от источника групп заявок, выполняются следующие действия:

1. Если источником группы заявок является входящий поток, то заявки распределяются по каналам и местам в очереди на фазе 1. В случае недостатка свободных мест для принятия этой группы, она получает отказ в обслуживании;

2. Если группа заявок образовалась на фазе i , $i = \overline{1, 2}$, то проверяется количество свободных мест на фазе $i+1$. При достаточном их количестве заявки переносятся, иначе каналы фазы i временно блокируются;

3. Если источник групп заявок – финальная фаза, то эта группа покидает систему.

В блоке «Заполнение очереди» для каждой фазы выполняется функция F_Q .

В блоке «Работа каналов» для каждого канала выполняется функция F_K .

В программном блоке «Отображение параметров работы системы» параметры работы имитационной модели выводятся на экран в графическом и табличном виде.

Для программной реализации имитационной модели была выбрана среда программной разработки Delphi XE8 по следующим причинам. Во-первых, в представленных комплексах имитационного моделирования в п. 1.6.1 недостаточно встроенных функций для реализации имитационной модели, в частности, отсутствуют функции генерирования *BMAP*-поток. Во-вторых, в данной диссертационной работе продолжаются исследования, выполненные в научной школе А.Л. Казакова [125, 126], результаты которых были реализованы на универсальном языке программирования Object Pascal. Поэтому мы используем данный язык программирования при реализации имитационной модели.

Отметим, что в имитационной модели не учитываются отказы обслуживающих устройств. Это связано с постановкой практических задач (см. главу 5), в которых перед автором были установлены цели по определению параметров функционирования для полностью работоспособных микро-ЛТС.

Имитационная модель реализована автором в виде программного модуля, входящего в состав программного комплекса, о котором пойдет речь в следующем разделе.

4.2. Структура и функции «Программного комплекса для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания»

«Программный комплекс для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания» (ПК МРП СМО) предназначен для определения стационарных вероятностей и функциональных характеристик моделируемой СМО, а также проведения сценарных расчетов. Кроме того, комплекс позволяет генерировать входящие потоки требований с заданными характеристиками. Данный комплекс обладает модульной архитектурой и состоит из трех программных модулей: первый – модуль имитационного моделирования работы СМО, который программно реализует имитационную модель работы трехфазной СМО; второй – модуль вычисления стационарных вероятностей состояний СМО с групповыми входящими потоками заявок, в котором реализованы рекуррентные формулы и алгоритмы, описанные в главе 3; третий – модуль генерации случайных величин.

ПК МРП СМО зарегистрирован в Реестре программ для электронных вычислительных машин в 2016 г. Копия Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ представлена в Приложении. Для работы необходим компьютер, оснащенный операционной системой «Microsoft Windows» XP/Vista/7/8/10.

4.2.1. Модуль имитационного моделирования

Данный программный модуль предназначен для численного определения стационарных вероятностей и параметров работы моделируемой системы.

На рис. 4.3 представлена главная форма модуля.

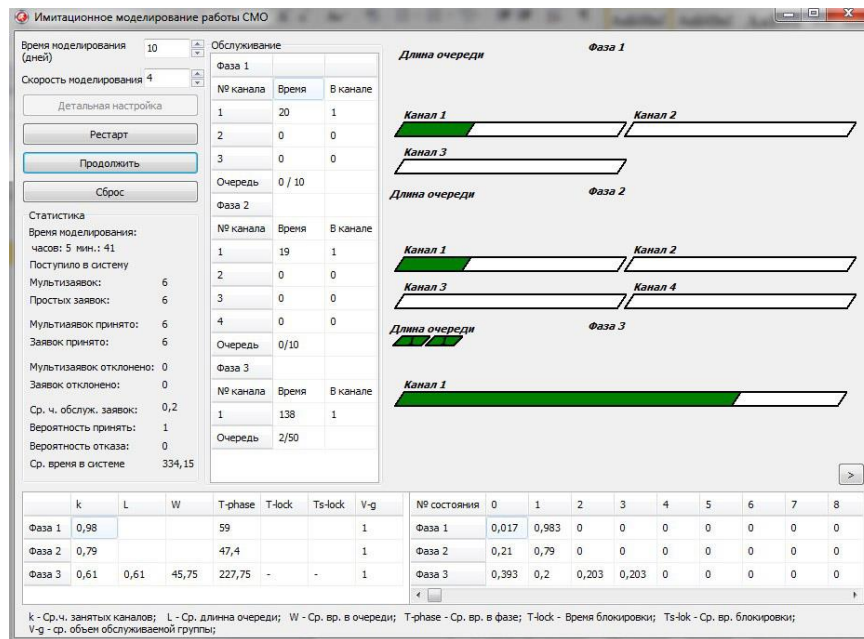


Рис. 4.3. Главная форма модуля имитационного моделирования

На главной форме отображаются параметры работы моделируемой системы в реальном времени: вероятность отказа; среднее число работающих каналов и средние длины очередей на каждой фазе; среднее время пребывания в фазе k ($k = \overline{1,3}$) и отдельно в очереди на ней; среднее время нахождения заявки в системе; время блокировки фаз; средний размер обслуживаемой группы в фазе; стационарные вероятности системы. Пользователь может остановить работу программы (кнопка «Пауза») и продолжение ее выполнение без потерь данных (кнопка «Продолжить»).

Основные функции модуля:

- генерирование количества заявок в прибывающих группах;
- генерирование времени прибытия групп заявок;
- генерирование *ВМАР*-потоков;
- генерирование времени обслуживания и времени межоперационного периода;
- отображение процесса обслуживания заявки в графическом виде;
- отображение данных о поступающих заявках и их обслуживании в таблицах и сохранение в формате MS Excel;
- определение показателей эффективности моделируемой СМО.

Каналы в системе работают независимо друг от друга и могут иметь различные законы распределения времени обслуживания заявки. Как только канал освобождается, на него поступает заявка из очереди (при ее наличии). Если очередь пуста, канал переходит в режим ожидания.

Модуль имитационного моделирования состоит из пяти основных программных блоков: цикл моделирования, начальные параметры, генерирование потоков, статистика и графика.

Блок «цикл моделирования». В данном блоке программно реализован основной цикл, моделирующий работу многофазной СМО, блок-схема представлена на рис. 4.4. Здесь T_{schet} – переменная, содержащая число выполненных циклов моделирования, т.е. виртуальное время моделирования, T_m – максимальное число циклов моделирования – константа, задаваемая пользователем. Данный блок является управляющим и координирует работу остальных блоков.

Блок начальных параметров. Блок настроек реализован в виде отдельной формы, которая представлена на рис. 4.5.

Пользователю предоставляется возможность установить следующие параметры системы.

Параметры входящего потока заявок – законы распределения промежутков времени между поступлением групп заявок и количества заявок в группе.

Количество фаз. На данный момент реализована возможность моделирования СМО с одной, двумя и тремя фазами.

Число каналов и мест в очереди на соответствующей фазе.

Законы распределения времени задержки перед началом обслуживания и времени обслуживания заявки могут

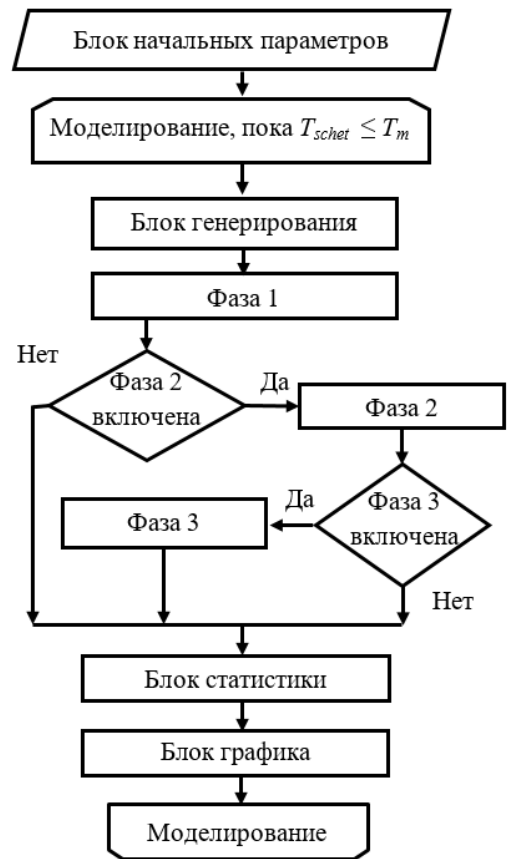


Рис. 4.4. Блок-схема «цикла моделирования»

Рис. 4.5. Форма начальных параметров

задаваться как отдельно для каждого канала, так и для всех каналов в фазе. Доступны следующие законы: равномерный, нормальный, экспоненциальный и гамма, кроме того, можно задать время задержки перед началом обслуживания.

Групповое обслуживание – канал может обслуживать заявки группами, определенного размера. Пользователь выбирает один из двух вариантов обслуживания групп. В первом задается фиксированный размер группы заявок. Во втором варианте размер группы – случайная величина с дискретным законом распределения. Отметим, что, если в очереди находится меньше заявок, чем канал способен принять к обслуживанию в данный момент, то в канал поступает столько заявок, сколько присутствует в очереди.

Тип канала – канал имеет определенный тип и может обслуживать заявки только данного типа. Тип обозначается целыми положительными числами от нуля. Отметим, что канал может быть универсальным, т.е. обслуживать заявки любого типа, и тогда он маркируется нулем.

Наличие отдельных очередей перед каналами – каждый канал в фазе может иметь свою очередь. Заявка, попавшая в такую очередь, не может перейти в другую очередь на этой фазе.

Общее время моделирования – виртуальное время моделирования измеряется в количестве циклов моделирования и может быть интерпретировано, как количество дней, часов, минут или секунд.

Блок генерирования входящих потоков заявок. Он позволяет генерировать входящие потоки заявок с заданными характеристиками. Реализованы следующие функции задания входящих потоков.

- Время между поступлениями групп заявок может задаваться константой или быть сгенерировано по следующим законам: равномерный, нормальный, экспоненциальное и гамма;

- Размер группы заявок может быть константой либо задаваться по одному из следующих дискретных законов: равномерному, биномиальному, пуассоновскому или геометрическому;

- Число типов заявок и вероятность их появления определяет пользователь. В одной группе могут присутствовать заявки разных типов;

– Генерирование *ВМАР*-потоков. В этом случае пользователь работает с отдельным окном «*ВМАР*-поток» (рис. 4.6). В нем возможно настроить интенсивность поступления отдельных потоков, которые входят в состав *ВМАР*-потока, максимальный размер поступающей группы заявок и вероятность появления группы определенного размера. Доступны функции сохранения и загрузки в файл (формат *.xls или *.xlsx) сконструированных матриц *ВМАР*-потока (см. п. 1.4).

На рис. 4.6 представлена форма задания *ВМАР*-потока.

ВМАР поток. Детальная настройка

Кол-во потоков (интенсивностей): 5 Максимальный размер группы: 100 Быстрое заполнение вероятностей

Сохранить Отмена

№	Интенсив.	Распред. размеров групп	Параметр 1	Параметр 2	Тип
1	1	Равномерное	От (целое)	0	До (целое) 99
2	1	Биномиальное	Вероятность(0;1)	0,5	Число испытаний 10
3	1	Пуассона	Среднее(целое)	1	-
4	1	Геометрическое	Лямбда(0;1)	0,8	-
5	1	Равномерное	От (целое)	1	До (целое) 100

Тип - тип заявки, которая будет исключена из генерации в данном потоке. Если 0 то исключение не производится.

Основная таблица (таблица заполняется вероятностями поступления размера группы определенного размера)

Сохранить Основную таблицу Загрузить основную таблицу

№ матрицы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
2	0	0,0019	0,0175	0,0703	0,1640	0,2460	0,1640	0,0703	0,0175	0,0019	0,0001	1,7755	1,4796	1,1381	8,1298	5,4199	3,3874	1,9926	1,1	
3	0	0,3678	0,3678	0,1839	0,0613	0,0153	0,0030	0,0005	7,2991	9,1239	1,0137	1,0137	9,2161	7,6801	5,9077	4,2198	2,8132	1,7582	1,0342	5,7
4	0	0,8	0,16	0,032	0,0064	0,0012	0,0002	5,1199	1,024E	2,048E	4,0959	8,1919	1,6384	3,2767	6,5535	1,3107	2,6214	5,2428	1,0485	2,0
5	0	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

Рис. 4.6. Форма задания *ВМАР*-потока

Для генерирования неординарных потоков заявок с различными типами в данном модуле используются три генератора. В генераторе №1 разыгрывается значение НСВ T – время до следующего прибытия заявок. В генераторе №2 – значение ДСВ X_{in} – размер прибывающей группы заявок. В генераторе №3 генерируется тип для каждой заявки в поступающей группе, пользователь задает вероятности появления определенного типа заявок. Далее полученное значение сохраняется в отдельную строковую переменную, что позволяет учитывать тип заявки при ее передаче между фазами. Блок схема цикла генерирования изображена на рис. 4.7 а. Виды законов распределения и их параметры для генераторов №1, №2 и №3, а также число типов заявок ($Типе$) пользователь устанавливает на Форме начальных параметров (рис. 4.5), во вкладке «Входящий поток».

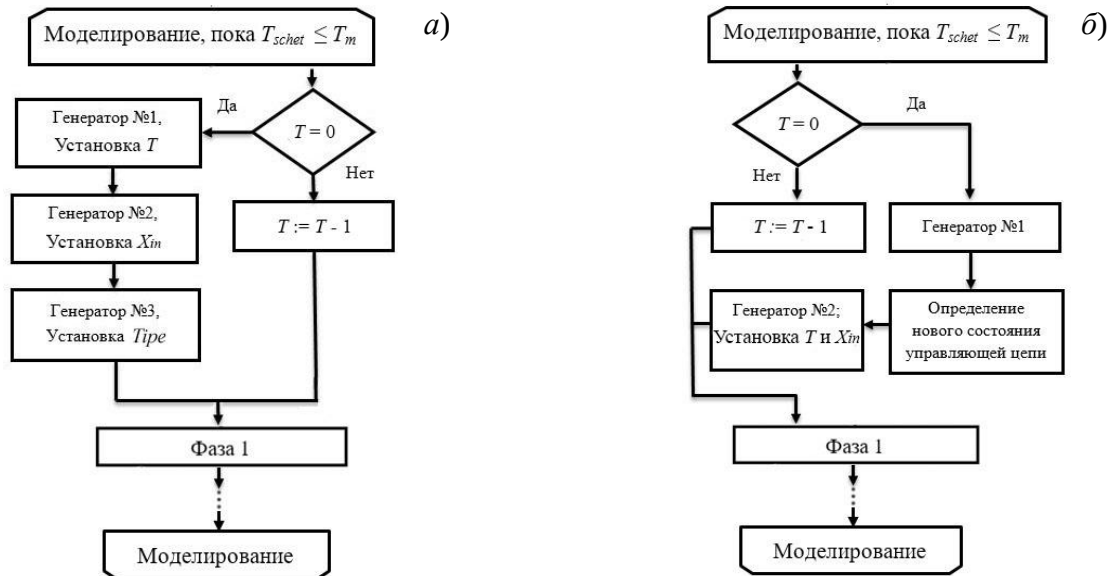


Рис. 4.7. а) Блок-схема генерирования потока с разными типами заявок; б) блок-схема генерирования *ВМАР*-потока

Генерирование *ВМАР*-потока происходит по специальному алгоритму и состоит из двух этапов: подготовительный и цикл генерации.

На подготовительном этапе создаются два двумерных массива. Первый содержит вероятности поступления групп определенного объема для каждого потока и имеет размер $v \times (z + 1)$, где v – число входящих потоков, z – максимальный размер группы из всех потоков. Второй хранит вероятности поступления группы из определенного потока, его размер – $v \times v$. Создание двух массивов для хранения всей информации о *ВМАР*-потоке вместо одного общего позволяет уменьшить объем вычислений на перебор элементов массива.

В цикле генерации разыгрывается значение СВ (генератор №1), с помощью которого из массива переходных вероятностей определяется новое состояние управляющей цепи и размер прибывающей группы. По новому состоянию управляющей цепи генерируется время пребывания цепи в этом состоянии и тип каждой заявки из прибывшей группы (генератор №2). Схема цикла генерации представлена на рис. 4.7 б, где T – время (СВ с экспоненциальным распределением) до прибытия следующей группы, X_{in} – размер прибывающей группы заявок.

Блок «работа фазы» выполняется для каждой фазы отдельно. Данный программный блок последовательно исполняет следующие функции: распределение прибывающей группы заявок по каналам и местам в очереди; генерация времени обслуживания при начале работы каждого канала; уменьшение времени работы каналов на один цикл; блокировка работы каналов фазы i в случае отсутствия свободных мест в очереди на фазе $i+1$; определение числа обработанных заявок в фазах. Блок-схема «работа фазы» представлена на рис. 4.8.

Блок «графика» предназначен для визуализации процесса работы программы. В реальном времени отображаются следующие показатели: число занятых каналов; время межоперационного простоя; время обслуживания заявки в канале; число заявок в очереди и блокировка каналов фазы; показатели эффективности СМО. Результаты работы данного блока выводятся на главную форму (рис. 4.3).

Представленная имитационная модель позволяет учитывать случайный размер поступающих и обслуживаемых групп заявок, неравномерность интенсивности обслуживания. Модель предназначена для имитирования работы различных СМО, определения параметров изучаемой системы, таких, как стационарные вероятности и показатели эффективности ее работы.

В подтверждение работоспособности имитационной модели были решены тестовые и модельная задачи. На первом этапе осуществлено сравнение показателей эффективности СМО, полученных с помощью построенной имитационной модели, с известными результатами из теории массового обслуживания. На втором этапе имитировалась работа железнодорожной сортировочной станции Свердловской железной дороги. Результаты решения данных задач представлены в п. 4.3.



Рис. 4.8. Блок-схема «работа фазы»

4.2.2. Модуль вычисления стационарных вероятностей состояний СМО

Модуль предназначен для определения стационарных вероятностей состояний многофазных СМО с пуассоновским неординарным потоком заявок. В модуле программно реализованы результаты аналитического исследования немарковских СМО, которые представлены в п. 3.2 и п. 3.3 настоящей диссертационной работы. С помощью данной программы можно вычислить стационарные вероятности для следующих видов СМО:

- многоканальная СМО с конечной очередью и дисциплиной полного отказа;
- многоканальная СМО с конечной очередью и частичным принятием групп заявок;
- многофазная СМО с конечными числом каналов и максимальной длиной очереди на каждой фазе, а также экспоненциальным распределением времени обслуживания.

Модуль позволяет установить и некоторые показатели эффективности СМО, такие как вероятность отказа, среднее число обслуживаемых заявок в единицу времени, среднее число занятых каналов, средняя длина очереди, среднее время пребывания заявки в системе. Интерфейс данного модуля представлен на рис. 4.9.

№ канала	Интенсивность	Размер группы	Вероятность
1		1	

Рис. 4.9. Форма модуля расчета вероятностей стационарных состояний СМО

4.2.3. Модуль генерации случайных величин

Основная задача данного модуля – генерация необходимого пользователю набора случайных величин по заданным параметрам, проверки выборки случайных величин на соответствие наиболее распространенным законам распределения, а также уточнение

параметров выбранного закона распределения. Модуль имеет в своем составе три программных блока: блок генерации, блок проверки и блок уточнения решения.

Блок генерации предназначен для разыгрывания выборки СВ произвольного размера [78]. Чтобы сгенерировать выборку СВ, пользователь должен выбрать из выпадающего меню «закон распределения» – требуемую функцию и задать ее параметры, затем нажать на кнопку «Сгенерировать». Разыгрывание СВ осуществляется по следующим законам: равномерный, нормальный, экспоненциальный, геометрический и гамма. Также в данном модуле предусмотрена возможность разыгрывания произвольной ДСВ, в этом случае пользователь самостоятельно задает закон ее распределения.

В блоке генерации также реализованы функции импорта и экспорта данных в документы формата *.xls и *.xlsx (кнопки «Загрузить» и «Сохранить»). В случае импорта выборки из файла (формат *.xls или *.xlsx) ее элементы должны быть сохранены в первом столбце первой вкладки упомянутого файла. Этот программный блок реализован в виде главной формы и представлен на рис. 4.10.

Номер	Время	Кол-во заявок
1	0,65696518947831	1
2	0,86447675162974	2
3	2,88303861603344	1
4	3,59626323452361	1
5	0,56707283581698	3
6	2,15395632576796	1
7	2,52825985453536	3
8	6,0804071734124	3
9	4,11546850504904	1
10	0,67024485754595	3
11	0,26557845418370	4
12	5,71634669262677	1
13	4,97613336916952	1
14	1,22230170287982	4
15	4,62690069554672	1
16	0,26241177753437	4
17	0,89920632466099	1
18	1,84473967408792	4
19	0,23062936689653	1
20	0,38851167844243	1
21	0,22816691333472	1
22	0,74427416805693	1
23	0,94724535610826	2
24	2,7277102844642	1
25	3,32535439716647	2

Рис. 4.10. Интерфейс модуля генерирования случайных величин

Блок проверки. После импорта выборки СВ из файла или ее генерации пользователь может проверить полученную выборку на соответствие стандартным законам распределения. для этого следует нажать кнопку «Записать значения для теста», после чего появится новое окно (рис. 4.11) с информацией об объеме выборки,

количестве интервалов, частоте попаданий значений в интервал, а также наблюдаемые значения математического ожидания и дисперсии данной выборки СВ. Число интервалов при анализе выборки может быть установлено автоматически по формуле Стерджесса [113], либо вручную. Также в данном окне можно выбрать ручное или автоматическое определение параметров основных законов распределений: равномерного, нормального, экспоненциального и гамма. При автоматическом определении параметров данных законов (последних трех) используется метод моментов.

Начало	0	0,86	1,72	2,58	3,44	4,3	5,16	6,02	6,88	7,74	8,6	9,46
Конец	0,86	1,72	2,58	3,44	4,3	5,16	6,02	6,88	7,74	8,6	9,46	10,32
Середина отрезка	0,43	1,29	2,15	3,01	3,87	4,73	5,59	6,45	7,31	8,17	9,03	9,89
Эмп. частота	49	45	30	28	17	14	8	2	2	1	1	2
Относ. Эмп. частота	0,245	0,225	0,15	0,14	0,085	0,07	0,04	0,01	0,01	0,005	0,005	0,01
Моменты 1	0,10535	0,29025	0,3225	0,4214	0,32895	0,3311	0,2236	0,0645	0,0731	0,04085	0,04515	0,0989
Моменты 2	0,0453005	0,3744225	0,693375	1,268414	1,2730365	1,566103	1,249924	0,416025	0,534361	0,3337445	0,4077045	0,978121
199,030300330406	45,1892476	43,9186111	33,4872529	24,1444254	16,9526061	11,7189040	8,01811812	5,44613780	3,67906639	2,47486070	1,65919832	1,10929902

Кол-во эл-тов	200		Равном. распр	Норм. распр	Эксп. распр	Гамма распр
Мат. ожид. (ср.)	2,4037	НГ^2	267,18	1077,5276	12,2749	7,8364
Сум Моментов 2	9,814492	Крит. НГ^2	22,36203	21,02607	22,36203	21,02607
Лямбда	0,416025294337	Крит. Колмогоров	0,487857142857	0,218957385239	0,055774337054	0,037944763360
Ср. кв	2,0092	Крит. Колмогоров	0,096166522241	0,096166522241	0,096166522241	0,096166522241

Рис. 4.11. Форма для теста на соответствие выборки законам распределения

С помощью кнопок «Гистограмма» (рис. 4.10) или «График теор.» (рис. 4.11) выводится гистограмма текущей выборки и графики функций плотностей основных законов распределений, параметры которых определяются автоматически или пользователем. По виду гистограммы пользователь может выбрать интересующие законы распределения для проверки, которая выполняется с помощью кнопки «Тест». После нажатия на нее получаем следующую информацию: эмпирические значения критериев Пирсона и Колмогорова; критические значения критериев Пирсона и Колмогорова для проверки гипотезы о виде закона распределения; выводы о соответствии выборки законам распределения. Уровень значимости для критериев установлен по умолчанию $\alpha = 0,05$, однако может быть изменен на 0,01 или 0,1.

Блок уточнения результата дает возможность уточнения параметров, полученных при работе блока проверки для выбранного закона распределения. После

нажатия на кнопку «Покоординатный спуск» (рис. 4.11) откроется форма «Уточнение параметров теоретических законов распределения» (рис. 4.12). Уточнение проводится методом покоординатного спуска. Пользователь может задать точность расчета и изменить начальные параметры выбранного закона распределения, а также выбрать с какого из параметров начинать спуск. Программа изменяет параметры теоретического закона распределения так, чтобы отыскать минимальное значение комбинированного критерия, который основан на критериях Пирсона и Колмогорова (п. 2.2.3).

Уточнение параметров теоретических законов распределения

Гамма: ▼

Начальные координаты:

☐ Авто

Среднее: 10,000

Дисп.: 0

☒ Задать

Среднее: 1,3

Дисп.: 2

Начальное значение:

☒ Среднее ☐ Дисп.

Точность: 0,001 ▼

0,05 ▼

Пирсон

Колмогоров

Очистить

Форма	Масштаб	Пирсон	Форма	Масштаб	Кр. Колмог.
1,356	2,106	15,946	1,169	2	0,0439
1,283	2,195	15,0241	1,169	2	0,0439
1,229	2,267	14,521			
1,191	2,322	14,2637			
1,164	2,363	14,1319			
1,145	2,393	14,0655			
1,131	2,416	14,0309			
1,122	2,431	14,0153			
1,116	2,442	14,0077			
1,111	2,45	14,0031			
1,108	2,455	14,0012			
1,106	2,459	14,0002			

Рис. 4.12. Форма для уточнения параметров теоретических законов распределения

4.3. Решение тестовых и модельной задач

Для тестирования работоспособности и качества работы ПК МРП СМО использовались серии задач трех типов с известными (взятыми из научной литературы, либо определенными нами ранее) характеристиками: m -канальная СМО с отказами (задача Эрланга); m -канальная СМО с групповым поступлением, где размер групп равен двум; и трехфазная СМО с блокировками. Для каждой задачи сравнивались показатели эффективности СМО, которые получены с помощью построенной имитационной модели, с известными, полученными аналитическими методами. По результатам сравнения установлено, что для задач всех типов максимальная относительная погрешность не превосходит 4%.

Также программный комплекс апробирован при решении модельной задачи по определению параметров работы железнодорожной сортировочной станции К-У. Результаты моделирования проанализированы, сделаны содержательные выводы о работе станции.

Задача №1. Рассмотрим трехканальную СМО с отказами (задачу Эрланга), интенсивность потока заявок $\lambda = 1,5$ (в час), интенсивность обслуживания в каждом из каналов $\mu = 0,5$ (заявок в час), канал может обслуживать только одну заявку, все потоки – простейшие. Требуется определить стационарные вероятности состояний системы p_i , $i = \overline{0,3}$ и ее показатели эффективности: A – среднее число обслуживаемых заявок в единицу времени, Q – вероятность обслуживания, $..$ – вероятность отказа, $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов.

Задача Эрланга является классической в теории СМО, все ее вероятностные характеристики (см. выше) установлены аналитически [25]. Эти же характеристики были определены приближенно с помощью ПК МРП СМО.

Теоретические и расчетные характеристики рассмотренной системы представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Результаты решения задачи №1

Способ	p_0	p_1	p_2	p_3	A_M	Q	P_{loss}	$\bar{k}$
Аналитический	0,077	0,231	0,346	0,346	0,981	0,654	0,346	1,962
Имитационная модель	0,076	0,225	0,341	0,358	0,963	0,642	0,358	1,981
Относительная погрешность (%)	1,299	2,597	1,445	3,468	1,863	1,863	3,521	0,945

Задача №2. В условиях задачи №1 предположим, что входящий поток состоит из групп заявок размера два, дисциплина принятия групп заявок – полный отказ, A_M – среднее число обслуженных групп заявок в единицу времени. Теоретические характеристики были установлены с помощью рекуррентных формул (3.7). Они же были определены приближенно с помощью ПК МРП СМО. Результаты расчетов представлены в табл. 4.2.

Таблица 4.2. Результаты решения задачи №2

Способ	p_0	p_1	p_2	p_3	A_M	Q	P_{loss}	$\bar{k}$
Аналитический	0,077	0,230	0,462	0,231	0,461	0,307	0,693	1,850
Имитационная модель	0,076	0,237	0,460	0,227	0,469	0,313	0,687	1,838
Относительная погрешность (%)	1,299	3,014	0,505	1,558	1,822	1,933	0,856	0,623

Задача №3. Рассмотрим трехфазную СМО $M/M/1/1 \rightarrow /M/1/1 \rightarrow /M/1/1$ с блокировками, интенсивность входящего потока $\lambda = 3$ (заявки в час), интенсивность обслуживания каналом первой фазы $\mu_1 = 3$ (заявки в час), каналом второй фазы $\mu_2 = 4$ (заявок в час), каналом третьей фазы $\mu_3 = 2$ (заявки в час), все потоки – простейшие. Требуется найти стационарные вероятности состояний системы, которые отображают число заявок на соответствующей фазе, без учета числа заявок на остальных фазах, и ее показатели эффективности: A , Q и P_{loss} , которые имеют те же значения, что и в задаче №1.

Теоретические характеристики были получены с помощью численно-аналитического метода из п. 3.3 и равны ранее известным, которые представлены в работе [170]. Они же были найдены приближенно с помощью ПК МРП СМО.

Теоретические и расчетные характеристики рассматриваемой СМО представлены в табл. 4.3.

Таблица 4.3. Результаты решения задачи №3

Число заявок в фазе	Фаза 1		Фаза 2		Фаза 3		A	Q	P_{loss}
	0	2	0	2	0	2			
Теоретическая	0,209	0,451	0,243	0,503	0,176	0,608	0,549	0,451	1,647
Имитационная модель	0,207	0,454	0,247	0,495	0,182	0,591	0,546	0,454	1,637
Относительная погрешность (%)	0,752	0,729	1,617	1,590	3,287	2,796	0,598	0,729	0,598

Из табл. 4.1 – 4.3 можно видеть, что максимальная относительная погрешность не превосходит 4%. Таким образом, результаты тестирования свидетельствуют об адекватности имитационной модели и работоспособности ПК МРП СМО.

Имитация работы железнодорожной сортировочной станции. Рассмотрим модельную железнодорожную сортировочную станцию, которую будем именовать К-У. В структуре станции выделены следующие подсистемы: *парк приема с сортировочной горкой* (ПП, 15 путей со средней вместимостью 75 условных вагонов каждый), в котором осуществляется накопление прибывающих поездов, их расформирование и направление отдельных групп вагонов в сортировочный парк; *сортировочный парк* (СП, 20 путей) – сборка поездов и их передача в парк отправки; *парк отправки* (ПО, 10 путей) – подготовка поездов для дальнейшей отправки со станции. Примем, что в парке приема работает один локомотив и сортировочная горка малой мощности (способна обслуживать до 1500 вагонов в сутки), в сортировочном парке действуют два

локомотива, которые участвуют в окончательном формировании составов перед отправкой, из парка отправки поезда отправляются по двум направлениям.

Схема станции К-У представлена на рис. 4.13.

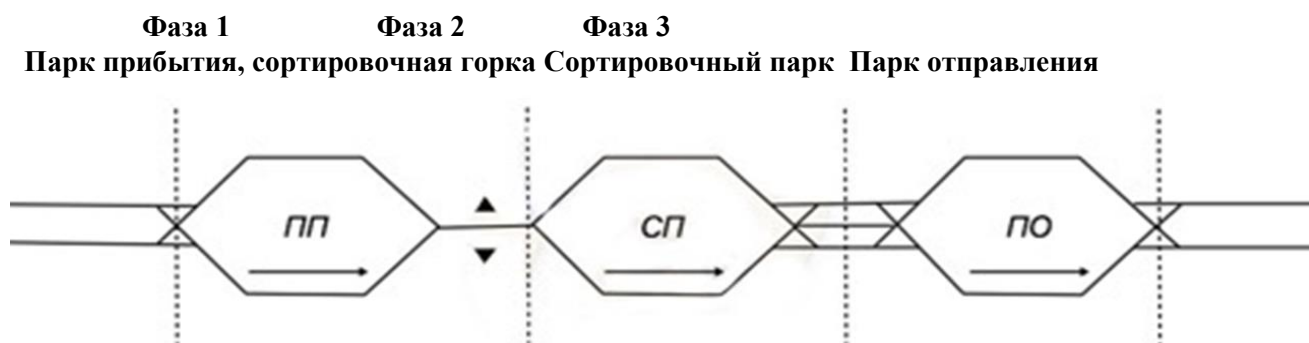


Рис. 4.13. Схема ж/д сортировочной станции К-У

Указанные параметры соответствуют узловой железнодорожной сортировочной станции, относящейся к Свердловской железной дороге, и были получены из открытых источников.

В 3 главе представлена методика построения математических моделей работы микро-ЛТС в виде многофазных СМО. Применим ее для изучения работы станции К-У.

В структуре рассматриваемой станции находятся три подсистемы – фазы обслуживания (рис. 4.13). Стохастическая модель работы такой микро-ЛТС в виде многофазной СМО была представлена в п. 3.1. Адаптируя эту модель для станции К-У получаем следующую открытую трехфазную СМО: Фаза 1 – СМО с одним каналом и очередью в 1125 мест. Фаза 2 представлена двухканальной системой обслуживания, имеющей 1500 мест в очереди. Фаза 3 – двухканальная СМО с длиной очереди 750 мест. Характеристики каналов обслуживания на каждой фазе представлены в табл. 4.4, средние значения времени обслуживания для каналов приняты согласно действующим нормативам [105, 116].

Таблица 4.4. Технические характеристики сортировочной станции

	Фаза 1	Фаза 2	Фаза 3
Среднее время обслуживания	38 мин	20 мин	100 мин
Время подготовки канала	–	5 мин	–
Закон распределения времени обслуживания	$N(38, 16)$	$N(20, 4)$	$N(70, 100)$
Размер обслуживаемой группы	75	75	75

В систему поступает вагонопоток, параметры которого установлены в п. 2.2.1 и п. 2.2.3. Интенсивность поступления пассажирских вагонов составляет $\lambda_{1,7} = 1,18$ групп

вагонов в час, грузовых – $\lambda_{1,8} = 0,43$ групп вагонов в час. Стохастическая модель входящего вагонопотока имеет вид *ВМАР*-потока и представлена в п. 2.2.4. Интенсивность поступления групп заявок в *ВМАР*-потоке составляет $\lambda_{1,7} + \lambda_{1,8} = \lambda = 1,61$ групп в час.

В терминах ТМО модель железнодорожной сортировочной станции К-У будет иметь вид открытой СМО типа: *ВМАР*/ G^X /1/1125 $\rightarrow$ / G^X /2/1500 $\rightarrow$ / G^X /2/750.

Сортировочные станции в штатном режиме обрабатывают грузовые поезда. Пассажирские поезда проходят «сквозь» станцию, минуя парк прибытия с сортировочной горкой и сортировочный парк. Однако они останавливаются на станционных путях, что замедляет работу фазы 3 по отправлению поездов. Введем два типа заявок, чтобы определить маршрут движения вагона через станцию и характеристики обслуживания разных типов вагонов. Заявки с типом 1 – пассажирские вагоны с нулевым временем обслуживания в каналах фазы 1 и 2. В каналах на фазе 3 они обслуживаются столько же, сколько и заявки с типом 2 – грузовые вагоны.

Целью моделирования является проверка адекватности модели и работоспособности ПК МРП СМО. Для достижения поставленной цели найдем параметры работы ж/д сортировочной станции К-У с использованием созданного модуля имитационного моделирования.

В табл. 4.5 показаны результаты имитационного моделирования работы сортировочной станции при интенсивности поступления *ВМАР*-потока $\lambda = 1,61$ групп вагонов в час. Виртуальное время моделирования 14 суток.

Далее в таблицах представлены усредненные данные по 10 пускам.

Таблица 4.5. Результаты имитационного моделирования работы сортировочной станции К-У при $\lambda = 1,61$ групп вагонов в час

	Поступило	Принято	T_{sist} (мин.)	P_{loss}
Группы	548,33	548,33	241,45	0
Заявки	15467,50	15467,50		
	$\bar{k}$	$l_{оч}$	t_{ph} (мин.)	t_{lock} (мин.)
Фаза 1	0,83	20,45	51,39	0
Фаза 2	0,60	2,50	40,42	0
Фаза 3	1,74	30,20	149,64	–

Здесь T_{sist} – среднее время в системе, P_{loss} – вероятность отказа, $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов, $l_{оч}$ – средняя длина очереди, t_{ph} – среднее время в фазе, t_{lock} – время блокировки фазы.

По результатам моделирования можно сделать следующие выводы: среднее время нахождения одной заявки (вагона) в системе составляет чуть более четырех часов, блокировки фаз отсутствуют. Средняя длина очереди на каждой фазе значительно (в десятки раз) меньше максимально возможной. Таким образом, можно утверждать, что сортировочная станция справляется с текущей нагрузкой и имеет большой запас производительности.

Найдем показатели работы станции К-У при увеличении интенсивности поступления грузовых поездов $\lambda_{1,8}$. Интенсивность поступления пассажирских поездов не меняется.

На рис. 4.14 а представлено изменение среднего времени нахождения заявки в системе, на рис. 4.14 б изменение средней длины очереди на фазе 3 в зависимости от интенсивности ВМАР-потока.

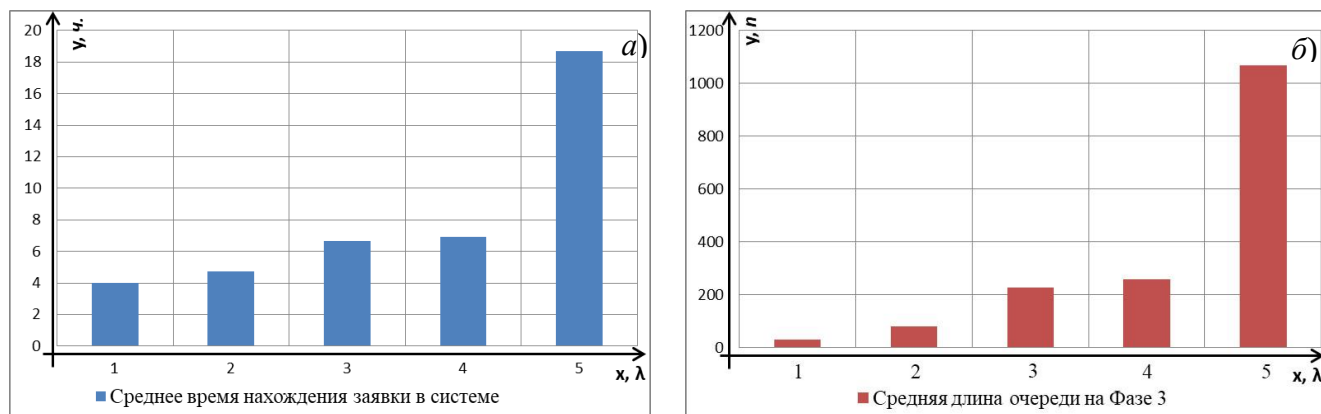


Рис. 4.14. Изменение характеристик станции при увеличении средней интенсивности ВМАР-потока: а) среднее время нахождения заявки в системе; б) средняя длина очереди на фазе 3

На рис. 4.14 по оси абсцисс отложена интенсивность поступления ВМАР-потока:

столбец 1 – $\lambda = 1.61$ групп вагонов в час;

столбец 2 – $\lambda = 2.01$, увеличение начальной интенсивности в 1,25 раз;

столбец 3 – $\lambda = 2.42$, увеличение в 1,5 раза;

столбец 4 – $\lambda = 2.5$;

столбец 5 – $\lambda = 2.82$, увеличение начальной интенсивности в 1,75 раз.

По оси ординат на рис. 4.14 а отложено время в часах, на рис. 4.14 б – длина очереди.

Время моделирования – две недели виртуального времени.

Отметим, что при интенсивности поступления вагонопотока $\lambda = 2,5$ групп вагонов в час, блокировки фаз 1 и 2 отсутствуют. При $\lambda = 2,82$ общее время блокировки фазы 1 составило 7,9 часа, фазы 2 – 15,02 часа.

Таким образом, система может стабильно функционировать при интенсивности вагонопотока до 2,82 групп вагонов в час. В этом случае наблюдаются блокировки каналов фаз 1 и 2, однако вероятность отказа остается равной нулю. Это возможно благодаря большой вместимости парков приема и сортировки. Превышение данного значения интенсивности поступления вагонопотока приводит к появлению вероятности отказа в обслуживании.

К сожалению, оценить корректность результатов расчетов мы можем одним способом – сравнив среднее число обслуженных вагонов за две недели, которое получено при имитационном моделировании, с объемом вагонопотока, который обрабатывает станция К-У за тот же период. Открытых данных по станции К-У найти не удалось, поэтому для сравнения будем использовать значение максимально возможного объема вагонов, который сортировочная станция теоретически может обработать.

По информации, предоставленной нам коллегами, работающими в системе ОАО РЖД, максимальный теоретический объем обрабатываемых сортировочной станцией вагонов составляет 75 тыс. за месяц, учитывая пассажирские и грузовые поезда.

При интенсивности $\lambda = 2,82$ групп вагонов в час число обслуженных вагонов на станции составляет 45,75 тыс. вагонов за месяц, что значительно ниже, чем максимальный теоретический объем обрабатываемых вагонов, причем при такой интенсивности отказов в обслуживании не наблюдается. При интенсивности $\lambda = 4,5$ групп вагонов в час станция обрабатывает 75,2 тыс. вагонов за месяц модельного времени, что соответствует максимальному теоретическому объему обрабатываемых вагонов. Однако в этом случае вероятность отказа будет отлична от нуля и превысит 0,05.

Выводы по главе 4

В данной главе приведены принципы построения имитационной модели для многофазной СМО и ее программная реализация, представлено описание

«Программного комплекса для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания» (ПК МРП СМО) и выполнена проверка его работоспособности.

Верификация имитационной модели и проверка работоспособности ПК МРП СМО проводились в два этапа. На первом этапе сравнивались показатели эффективности СМО, полученные с помощью построенной имитационной модели, с известными результатами. Рассматривались задачи трех типов: m -канальная система с отказами – классическая задача теории массового обслуживания (задача Эрланга), m -канальная система с групповым поступлением, где размер групп равен двум, и трехфазная система с блокировками. Для двух последних задач результаты расчетов сравнивались с решениями, которые были получены с помощью результатов, представленных в главе 3. Установлено, что для задач всех типов максимальная относительная погрешность не превосходит 4%.

На втором этапе имитировалась работа железнодорожной сортировочной станции К-У. Для построения ее модели была использована методика моделирования работы микро-ЛТС, представленная в главе 3. Автором изучались показатели работы данной станции при различных интенсивностях поступления поездов, которые в рамках модели рассматривались как группы вагонов. Результаты моделирования не противоречат известной информации и здравому смыслу. На их основе сделаны содержательные предположения о параметрах работы станции при увеличении вагонопотока.

Таким образом, по итогам исследования, представленного в главе 4, можно сделать вывод о том, что разработанная имитационная модель непротиворечива, а созданный программный комплекс работоспособен.

ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ТРАНСПОРТНО-ПЕРЕСАДОЧНЫХ УЗЛОВ МЕГАПОЛИСОВ РОССИИ

В данной главе предложенная методика моделирования работы микро-ЛТС (глава 3) используется для построения математической модели работы транспортно-пересадочного узла мегаполиса, а созданный программный комплекс (глава 4) для реализации и определения параметров работы ее имитационной модели. Глава состоит из трех разделов. В первом разделе рассматриваются структура транспортно-пересадочных узлов (ТПУ) и их классификации, строится обобщенная математическая модель работы ТПУ, которая используется в последующих разделах. Во втором моделируется работа ТПУ «Владыкино» и «Кутузово» (г. Москва) и определяются параметры их функционирования. В заключительном разделе исследуется возможность включения метрополитена в планируемый транспортно-пересадочный узел в Екатеринбурге.

5.1. Математическая модель работы транспортно-пересадочного узла

Высокая интенсивность и плотность транспортных потоков являются характерными признаками крупных, быстро развивающихся городов, в свою очередь это приводит к перегруженности дорожно-транспортной сети, возникновению «пробок» и снижению скорости передвижения наземного транспорта в черте города. Эффективным способом решения данных проблем является организация скоростных городских и пригородно-городских мультимодальных перевозок [21]. Для этого требуются особые пассажирские терминалы, обеспечивающие быструю пересадку пассажиров в месте стыковки нескольких типов общественного транспорта и/или направлений движения, т.е. транспортно-пересадочные узлы или ТПУ [21]. Однако сокращение времени передвижения может быть неосуществимо из-за больших затрат времени на пересадку между различными направлениями движения и видами транспорта [105].

Используем предложенную в главе 3 методику для построения модели работы ТПУ. Однако такие системы обладают структурными особенностями, в частности,

наличие нескольких видов транспорта и отдельных посадочных платформ для каждого вида. Поэтому изучим структуру и особенности процессов функционирования ТПУ.

5.1.1. Анализ структуры и особенностей работы транспортно-пересадочного узла

В структуре различных ТПУ имеются общие (схожие) элементы. Тем не менее, каждый ТПУ обладает особенностями, например, месторасположение, планировочное решение, наличие определенных видов транспорта и размер пассажиропотока в час пик. Классификации ТПУ, учитывающая эти особенности, представлена в табл. 5.1 [35].

Таблица 5.1. Классификации ТПУ

Категория ТПУ	IV	III		II		I
Планировочное решение ТПУ	Плоскост-ной	Плоскост-ной	Много-уровневый	Плоскост-ной	Много-уровневый	Много-уровневый
Структурная схема ТПУ	A – A	A – P – C	A – P – D	A – P – C – E	A – P – C – D	A – P – C – D – E
Пассажиропоток в утренний час пик, тыс. ч.	< 18	18-35		35-50		> 50
Тип ТПУ	городские	региональные	межрегиональные	региональные	межрегиональные	межрегиональные

Условные обозначения: А – городской пассажирский транспорт (автобусы и др.); Р – перехватывающая парковка; С – железнодорожный транспорт; D – авиатранспорт; E – водный транспорт.

Главный показатель эффективности работы ТПУ – это среднее время пребывания заявки в системе (среднее время пересадки). Его величина зависит от планировки сооружения и технических характеристик объекта. Изменение планировки в большинстве случаев нецелесообразно, так как связано с реконструкцией всего ТПУ, что влечет большие финансовые затраты.

Для улучшения технических характеристик (с точки зрения уменьшения среднего времени пребывания пассажира в системе) необходимо установить текущие параметры функционирования и загрузку системы. Кроме того, следует учитывать прогнозируемый уровень развития транспортной работы в будущем. Это позволит установить максимально допустимую загруженность ТПУ и принять решение о своевременной модернизации объекта. Наиболее распространенным и доступным методом определения параметров работы таких сложных систем, как ТПУ, на данный момент является математическое и имитационное моделирование.

На сегодняшний день применяются различные типы моделей работы ТПУ, рассмотрим два наиболее распространенных. В первом (см., например, [21, 132]) для моделирования работы подобных систем использованы марковские СМО с ожиданием. Однако такого рода подход неоправданно упрощает процесс функционирования и не отражает структуру ТПУ.

Второй тип моделей представлен в [35], движение пассажиропотоков в ТПУ определенной структуры моделируется с использованием пакета AnyLogic 7. В этом случае для каждого объекта необходимо строить модель с нуля, что требует значительных трудозатрат на ее реализацию и исследование. Сравнить данный метод и методику, предложенную в 3 главе, по трудозатратам трудно, так как они построены на различных принципах. Однако по нашим оценкам требуемое время на исследование ТПУ, представленным в [35] методом, в несколько раз больше.

Построим обобщенную модель работы ТПУ на примере действующих систем в Москве.

Рассмотрим два ТПУ (см. п. 2.3): «Владыкино» (рис. 5.1 а, б), который находится на границе между районами Марфино и Отрадное, и «Кутузово» (рис. 5.1 в, г), расположенный в центре района Дорогомилово. Причины, по которым были выбраны эти ТПУ, представлены в п. 2.3.

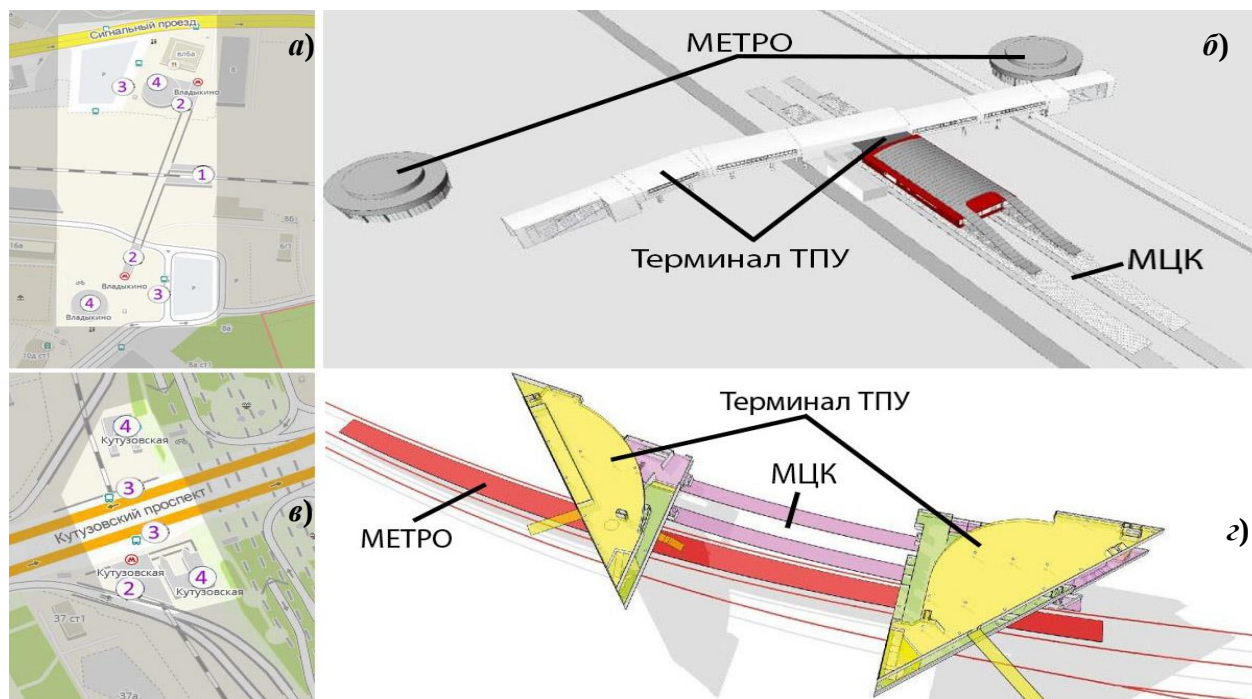


Рис. 5.1. а) Карта-схема ТПУ «Владыкино»; б) 3D модель ТПУ «Владыкино»; в) Карта-схема ТПУ «Кутузово»; г) Проект-схема ТПУ «Кутузово»

Здесь 1 – платформа МЦК; 2 – терминал ТПУ; 3 – автобусная остановка; 4 – вход в метро.

Данные узлы являются городскими объектами (классификация в табл. 5.1), формируемыми на основе «конкорса». По планировочному решению оба ТПУ относятся к многоуровневым системам, а по числу пассажиров в час пик – к IV категории.

В ТПУ «Владыкино» и «Кутузово» стыкуются четыре вида транспорта: личный транспорт, наземный общественный транспорт (автобусы), метро, московское центральное кольцо (МЦК), а также поступает поток пассажиров с прилегающей территории (пешеходы). Входящие пассажиропотоки для обоих ТПУ описаны в п. 2.3.

Данные ТПУ не предоставляют дополнительного сервиса (в частности, в них отсутствуют торговые площадки), в этой связи пассажиры, как правило, тратят дополнительное время при пересадке только для покупки билетов. Примем, что 5% пассажиров покупает билеты в кассах ТПУ, остальные используют абонемент (проездной) и следуют напрямую к платформам.

Можно выделить самостоятельные элементы (узлы) ТПУ «Владыкино» и «Кутузово». На рис. 5.2 *а* и *б* приняты следующие условные обозначения: А – городской пассажирский транспорт (автобусы); Р – перехватывающая парковка; М – станция метро; МЦК – Московское центральное кольцо.

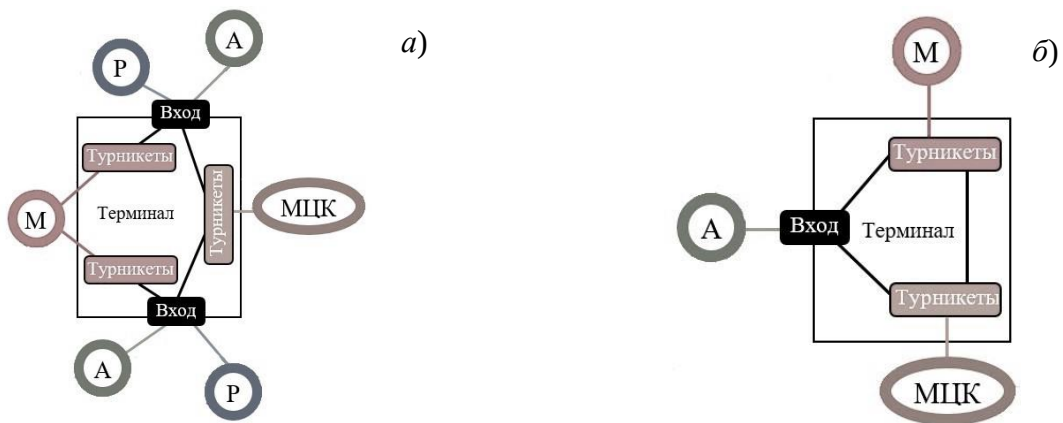


Рис. 5.2. а) Схема узлов ТПУ «Владыкино»; б) схема узлов ТПУ «Кутузово»

В схеме ТПУ «Владыкино» (рис. 5.2 *а*) включены элементы, относящиеся к одному типу транспортных систем. При этом структура ТПУ «Владыкино» (рис. 5.1 *а*, *б* и 5.2 *а*) обладает симметрией, среднее время движения пассажиров между парными элементами можно считать одинаковыми. Таким образом, возможно следующее допущение: в модели однотипные узлы объединяются, а их характеристики (интенсивность поступления, обслуживания, длина очереди и др.) суммируются. Тогда

получаем следующую схему ТПУ «Владыкино» (рис. 5.3), отличающуюся от схемы ТПУ «Кутузово» (рис. 5.2 б) только наличием одного узла.

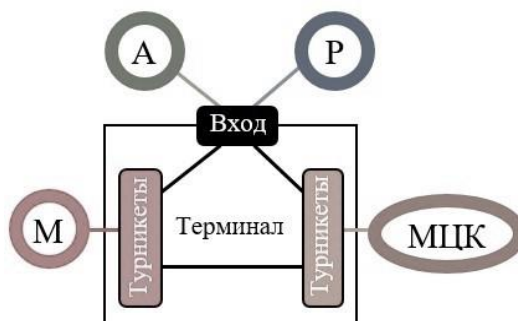


Рис. 5.3. Упрощенная схема ТПУ «Владыкино»

Выделим основные потоки пассажиров, проходящие через терминалы рассматриваемых ТПУ (рис. 5.2 б и 5.3):

- I. МЦК, А и Р → М;
- II. М, А и Р → МЦК;
- III. МЦК и М → А и Р (при наличии).

Схематически пассажиропотоки изображены на рис. 5.4.

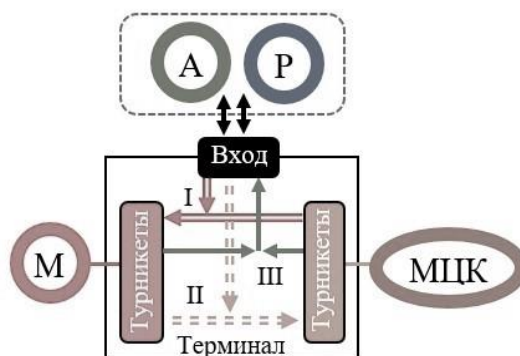


Рис. 5.4. Схема движения пассажиропотоков через терминал ТПУ

Случаи движения пассажиров по типу «метро – метро» и «парковка – наземный общественный транспорт» исключим из рассмотрения. Предполагаем, что пассажир нацелен пересесть на другой вид транспорта, воспользовавшись терминалом.

Можно видеть, что ТПУ есть совокупность самостоятельных систем различных видов транспорта, функционирование которых связано с уровнем корреспонденции пассажиропотоков между его узлами. Это естественным образом вытекает из факта, что исходящий поток из одного узла системы является входящим потоком для другого (см. рис. 5.4). Рассматривая данные потоки, получаем, что движение пассажиров можно описать общим алгоритмом (см. рис. 5.5).

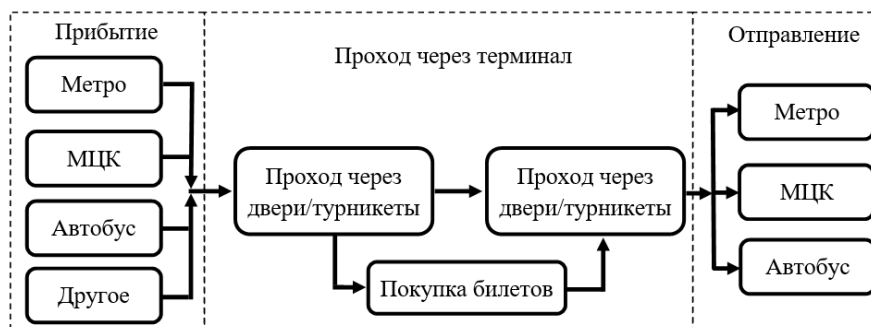


Рис. 5.5. Алгоритм движения пассажиров через терминал ТПУ

Данные схему и алгоритм движения пассажиров можно применить для описания работы ТПУ с различной планировочной структурой.

Отдельно рассмотрим самостоятельные элементы ТПУ (станцию МЦК, метро, автобусную остановку и др.). Пассажиропоток в них, имеет два направления движения: из терминала ТПУ на транспортное средство (автобус, вагон метро или др.) и обратно. В первом случае транспортное средство можно считать обслуживающим устройством, а платформа, с которой осуществляется посадка, очередью. Во втором транспортное средство – источник пассажиропотока, платформа – очередь, турникеты на выходе с платформы – обслуживающие устройства. При этом вместимость платформы ограничена. Пассажиропотоки в обоих направлениях будем считать независимыми. Следовательно, функционирование таких элементов ТПУ можно описать, как работу двух независимых СМО с конечными очередями. Учитывая алгоритм движения пассажиропотоков, модель ТПУ является совокупностью взаимосвязанных и последовательно расположенных СМО, т.е. многофазной СМО.

При построении обобщенной модели работы ТПУ будем опираться на следующие свойства:

- 1) каждый узел ТПУ можно представить в виде совокупности двух независимых СМО с конечными очередями;
- 2) исходящий поток из одного узла ТПУ является входящим для другого;
- 3) число основных пассажиропотоков равно трем (I, II, III), движение пассажиров в этих потоках можно описать общим алгоритмом (рис. 5.4 и рис. 5.5).

5.1.2. Построение математической модели работы транспортно-пересадочного узла

Используем методику построения математических моделей работы микро-ЛТС, предложенную в главе 3, для создания обобщенной модели работы ТПУ. Она строится в две стадии.

Первая стадия – описание структуры входящих пассажиропотоков в ТПУ с помощью модели ВМАР-потока. Как уже упоминалось, исследование пассажиропотоков, входящих в ТПУ «Владыкино» и «Кутузово», и построение их стохастических моделей проведено в п. 2.3.

Введем в модель три различных типа заявок, по числу пассажиропотоков (рис. 5.4). Заявки с типом 1 направляются на станцию метро (СМО I), с типом 2 – на станцию МЦК (СМО II), с типом 3 – на автобусную остановку (СМО III). Прибывающая в систему группа может состоять из различных типов заявок, однако в группе, относящейся к потоку i , будут отсутствовать заявки типа i . Данное ограничение вводится для исключения обратного движения пассажиров. Введение типов заявок позволит определить точный маршрут движения отдельного пассажира сквозь ТПУ.

Вторая стадия – описание структуры ТПУ и поведения заявок внутри них, которое происходит в несколько этапов.

Первый этап – выделение и описание фаз обслуживания заявок внутри системы.

Сначала декомпозируем структуру ТПУ (рис. 5.4) по направлению пассажиропотоков. Используя свойства, приведенные выше, получаем три схемы движения пассажиров через терминал ТПУ, алгоритм которых представлен на рис. 5.5. Схемы отличаются между собой лишь точкой выхода – узлом, через который пассажиры покидают ТПУ: метро (пассажиропоток I), МЦК (пассажиропоток II) или наземный транспорт (пассажиропоток III).

Далее объединим полученные три схемы в линейную структуру и воспользуемся первым свойством, т.е. каждый узел представим, как фазу обслуживания (СМО). Модель ТПУ будет трехфазной. Первые две фазы идентичны по структуре для каждого потока (рис. 5.6), они описывают работу дверей и турникетов на входе (фаза 1) и выходе (фаза 2) из терминала ТПУ, а также эскалаторов. Фаза 3 содержит три независимых узла (точки выхода), т.е. три параллельно работающих СМО, обозначим их как, СМО I –

станция метро, СМО II – станция МЦК и СМО III – автобусная остановка. Схема модели ТПУ следующая:

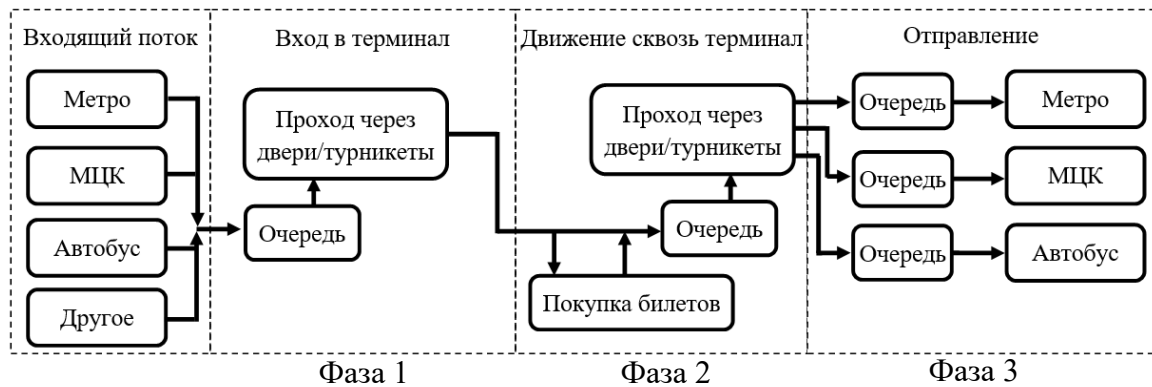


Рис. 5.6. Схема модели ТПУ

Фазы 1 и 2 описывают работу дверей, турникетов, эскалаторов и лестниц в терминале ТПУ, т.е. они являются обслуживающими каналами. На данных фазах групповое обслуживание отсутствует, т.к. двери и турникеты, как правило, пропускают по одному пассажиру за раз. При этом примем, что с эскалатора пассажиры сходят по одному. На фазе 3 пассажиры обслуживаются группами, поскольку эта фаза описывает работу станций метро, МЦК и автобусной остановки, т.е. в этом случае каналами считаем поезда МЦК и метро, автобусы. Закон распределения размера группы, выбранной на обслуживание, определяется для каждого ТПУ в отдельности.

В каналах СМО I и СМО II на фазе 3 время обслуживания примем детерминированным, т.к. поезда МЦК и метро следуют по расписанию, через равные промежутки времени. В каналах на фазе 1, фазе 2 и в СМО III на фазе 3 – случайной величиной, потому что заранее неизвестно, сколько времени пассажиру понадобится, чтобы пройти сквозь турникеты (двери, эскалаторы) и через какой промежуток времени прибудет автобус на остановку при ТПУ (см. п. 2.3.1).

Каждая фаза может быть описана следующим набором: параметры – число каналов и максимальная длина очереди, случайные величины – число работающих каналов, длина очереди, время обслуживания, размер обслуживаемой группы заявок.

Второй этап – описание движения внутренних потоков заявок. Заявки могут обслуживаться только в каналах того же типа. После обслуживания в канале на фазе $i = \overline{1, 2}$, они направляются в очередь следующей фазы. При завершении обслуживания на фазе 3 заявки покидают систему.

Третий этап – формализация обратных связей между фазами. Пассажир при переходе из терминала ТПУ на платформу для посадки будет вынужден ожидать, если на ней не осталось свободных мест. Такое поведение можно описать обратной связью, при которой происходит блокировка канала предыдущей фазы в случае, когда в следующей фазе недостаточно места для принятия заявок.

Четвертый этап – описание структуры системы в терминах ТМО.

Математическая модель работы ТПУ будет иметь вид трехфазной СМО. Ее отличие от стохастической модели работы микро-ЛТС (п. 3.1) заключается в следующем: во-первых, наличии трех самостоятельных, параллельно расположенных СМО с конечными очередями на фазе 3; во-вторых, в СМО I и СМО II время обслуживания детерминировано; в-третьих, движение пассажиров сквозь терминал ТПУ определяется алгоритмом, представленным на рис. 5.5.

В терминах теории массового обслуживания [22] имеем открытую СМО (см. п. 1.4), в которой имеются три фазы обслуживания с конечными очередями на каждой, а также блокировками каналов первой и второй фаз. Согласно классификации Кендалла имеем СМО типа $BMAP / M / n_1 / m_1 \rightarrow * / M / n_2 / m_2 \rightarrow * / G^X / n_3 / m_3$, где X – размер обслуживаемой группы.

Целью моделирования является получения наименьших значений P_{loss} – вероятности отказа и T_{sist} – среднего времени пребывания заявки в системе.

Данная модель предназначена в первую очередь для определения загруженности терминала ТПУ. Среднее время перехода заявки между фазами входит в модель как константа, т.к. зависит от планировочной структуры ТПУ и определяется по натурному обследованию. Время покупки билетов моделируется отдельно.

Аналитическое исследование представленной модели затруднено в силу большого числа фаз, группового поступления заявок, где размер групп – случайная величина, наличия нескольких типов заявок, их группового обслуживания и произвольного закона распределения времени работы каналов на третьей фазе. По этим причинам применяется имитационная модель, которая представлена в главе 4.

5.2. Моделирование работы транспортно-пересадочных узлов в Москве

5.2.1. Определение параметров моделей изучаемых объектов

Рассматриваемые в данной диссертационной работе ТПУ «Владыкино» и «Кутузово» являются действующими транспортными системами. В моделях учитываются их реальные технические характеристики, которые были получены по натурному обследованию лично автором, а также с официального сайта Московского метрополитена [131] и базы данных план-проектов ТПУ в Москве [62]. Исследуем работу этих систем в нормальных условиях, т.е. без учета поломок и сбоев.

Основные характеристики рассматриваемых систем представлены в табл. 5.2.

Таблица 5.2. Технические характеристики исследуемых ТПУ

	ТПУ «Владыкино»			ТПУ «Кутузово»		
	Число дверей (турникетов) на вход/выход	Площадь кв.м	Вместимость чел. (длина очереди)	Число дверей (турникетов) на вход/выход	Площадь кв.м	Вместимость чел. (длина очереди)
Платформа метро	8/8	1560	3000	8/8	1560	3000
Платформа МЦК	5/5	2520	5000	4/4	1260	2500
Автобусная остановка	-	500	1000	-	500	1000
Терминал	6/6	4250	9500	6/6	1000	2000

Терминалы рассматриваемых ТПУ отличаются друг от друга, как площадью, так и планировкой, следовательно, имеют различную максимальную вместимость (число посетителей в системе одномоментно). В соответствии с требованиями СНиП 2.07.01-89* [121] в ТПУ максимальная плотность пассажиропотока не должна превышать 1 чел./кв.м. В дальнейшем при определении вместимости ТПУ будем исходить из показателя 2 чел./кв.м. [105].

Перед входом на платформы МЦК и в метро установлены турникеты модели УТ-2000, интенсивность обслуживания каждого около 20 чел./мин. [112]. Среднюю пропускную способность дверей и эскалаторов в терминалах положим также равной 20 чел./мин. Время обслуживания будем считать СВ, которая подчинена экспоненциальному распределению.

Для прибывающих пассажиров отводится по 500 мест от вместимости платформ МЦК, метро и автобусных остановок, остальные места – для покидающих ТПУ.¹

В п. 5.1.2 была определена обобщенная математическая модель работы ТПУ. На ее основе далее строятся модели ТПУ «Владыкино» и «Кутузово» в виде трехфазных СМО.

Каждая фаза представляет собой уровень обслуживания в ТПУ, их характеристики получены по данным табл. 5.2.

Фаза 1 – переход из транспортного средства в терминал. Фаза 2 – переход из терминала на платформу для посадки в транспортное средство. Фазы моделируются многоканальными СМО с общими очередями, в которых, напомним, каналами мы считаем турникеты, двери и эскалаторы (см. п. 5.1.2). Интенсивность обслуживания каждым каналом – 20 чел./мин. Распределение каналов по обслуживаемым потокам заявок и другие характеристики фаз представлены в табл. 5.3.

Таблица 5.3. Характеристики трехфазной СМО, фазы 1 и 2

Пассажиропоток	ТПУ «Владыкино»			ТПУ «Кутузово»		
	Кол-во каналов на фазах 1 и 2	Длина очереди		Кол-во каналов на фазах 1 и 2	Длина очереди	
		на фазе 1	на фазе 2		на фазе 1	на фазе 2
I	8	1500	9500	8	1500	2000
II	5			4		
III	6			6		

Фаза 3 – посадка в транспорт и отправка из системы. Состоит из трех отдельных СМО с одним каналом и очередью: СМО I – платформа метро, СМО II – платформа МЦК, СМО III – автобусная остановка. Здесь каналом является транспортное средство, в которое садится пассажир, очередь – посадочная платформа. Каждая СМО обслуживает только один пассажиропоток соответствующего типа. Характеристики фазы 3 представлены в табл. 5.4, где t_{cp} – среднее время обслуживания (мин.), X – размер обслуживаемой группы пассажиров.

Таблица 5.4. Характеристики трехфазной СМО, фаза 3

	ТПУ «Владыкино»		ТПУ «Кутузово»		Идентичные характеристики	
Фаза 3	t_{cp}	Длина очереди	t_{cp}	Длина очереди	X	Пассажиропоток
СМО I	2,5	2500	2,5	2500	$N(200, 30)$	I
СМО II	6	4500	6	2000	$N(200, 30)$	II
СМО III	1,25	500	0,95	500	$N(15, 4)$	III

¹ Данное разделение представляется логичным, так как прибывающие пассажиры обычно не задерживаются на платформах, а сразу направляются в терминал.

Отметим, что X принято случайной величиной. Данное предположение опирается на два факта. Во-первых, в час пик (рассматриваемый промежуток времени) возможно прибытие «заполненного» транспорта, тогда только часть пассажиров с платформы в него смогут поместиться, остальные будут вынуждены ожидать следующего. Во-вторых, общественный транспорт обладает двумя направлениями движения (в рассматриваемых системах), поэтому не все пассажиры стремятся сесть в первое прибывшее транспортное средство.

5.2.2. Моделирование работы транспортно-пересадочных узлов «Владыкино» и «Кутузово»

Далее с помощью модельных экспериментов устанавливаются текущий и предельный уровни загрузки ТПУ «Владыкино» и «Кутузово», а также параметры их функционирования при различной интенсивности входящего потока пассажиров.

Результаты моделирования представлены в табл. 5.5 – табл. 5.8. Для каждого эксперимента в таблицах представлены усредненные данные по 10 пускам. Время моделирования – два часа виртуального времени (час пик с 7.00 до 9.00).

Эксперимент № 1. Определение эффективности работы ТПУ «Владыкино». Модель ТПУ в терминах теории массового обслуживания примет вид открытой СМО типа: $ВМАР / M / 19 / 1500 \rightarrow * / M / 19 / 9500 \rightarrow * / G^X / 3 / 7500$.

В систему поступает $ВМАР$ -поток, характеристики которого представлены в табл. 2.10 с интенсивностью $\lambda = 3$ групп пассажиров в минуту. Также в $ВМАР$ -потоке имеется три типа заявок, вероятности поступления которых равны $p_1 = 0,34$, $p_2 = 0,33$, $p_3 = 0,33$ соответственно. Характеристики фаз взяты из табл. 5.3 и 5.4. Результаты моделирования представлены в табл. 5.5.

Таблица 5.5. Результаты моделирования № 1

	Поступило	Принято	T_{sist} (мин.)	P_{loss}	
Групп	352	352	3,78	0	
Заявок	11945	11945			
	$\bar{k}$	$l_{оч}$	w (с)	t_{ph} (с)	t_{lock} (с)
Фаза 1	5,01	47,60	32,51	35,52	0
Фаза 2	4,60	4,74	5,63	8,40	0
Фаза 3	2,61	193,11	115,03	205,91	-
Ср. длина отдельной очереди на фазе 3			СМО I	СМО II	СМО III
			30,97	156,68	5,46

Напомним обозначения, введенные в главе 3 и применяемые далее: T_{sist} – среднее время пребывания заявки в системе (мин.), P_{loss} – вероятность отказа в обслуживании, $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов, l_{oc} – средняя длина очереди, w – среднее время в очереди, t_{ph} – среднее время в фазе, t_{lock} – среднее время блокировки каналов.

Эксперимент № 2. Определение эффективности работы ТПУ «Кутузово». В условиях эксперимента №1 изменятся: интенсивность поступления ВМАР-потока составит $\lambda = 2$, вероятности поступления отдельных пассажиропотоков (см. табл. 2.10), модель ТПУ в терминах ТМО: $ВМАР / M / 18 / 1500 \rightarrow * / M / 18 / 2000 \rightarrow * / G^X / 3 / 5000$. Результаты моделирования представлены в табл. 5.6.

Таблица 5.6. Результаты моделирования № 2

	Поступило	Принято	T_{sist} (мин.)	P_{loss}	
Групп	222	222	4,64	0	
Заявок	11880	11880			
	$\bar{k}$	l_{oc}	w (с)	t_{ph} (с)	t_{lock} (с)
Фаза 1	5,04	78,82	51,28	54,35	0
Фаза 2	4,69	7,38	6,32	9,18	0
Фаза 3	2,85	191,51	117,03	214,87	-
Ср. длина отдельной очереди фазе 3			СМО I	СМО II	СМО III
			27,90	149,18	14,43

По результатам моделирования можно видеть, что СМО III (автобусная станция) недогружена, т.к. имеет малую среднюю длину очереди по отношению к максимальной длине. Это объясняется тем, что учитываются только пассажиры, направляющиеся из терминала на автобусные станции, тогда как пассажиры, следующие напрямую к автобусам (из дома), не рассматриваются в модели.

В целом, характеристики работы обоих ТПУ схожи, однако средние очереди на фазе 1 и фазе 2 в ТПУ «Кутузово» приблизительно в 2 раза больше. Объяснение этому видится в меньшем числе каналов, обслуживающих заявки типа II, на этих фазах у ТПУ «Кутузово», чем у ТПУ «Владыкино» (4 против 5).

В экспериментах не учитывается время перехода между фазами. По натурному обследованию время перехода составляет приблизительно 5 минут для ТПУ «Владыкино» и 3 минуты для «Кутузово» (переход из метро на станцию МЦК). Среднее время покупки билетов моделировалось отдельно и составляет 2 мин. при 7 работающих кассах (из них 5 автоматов по продаже билетов) и среднем обслуживании 2 заявки в

мин. (натурные данные). Следовательно, среднее время пребывания пассажиров в ТПУ составит 9,5 и 7,4 мин., что значительно меньше максимально допустимого – 15 мин.

Определение максимально допустимой загрузки рассматриваемых ТПУ «Владыкино». В результате проведения серии тестов установлено, что при увеличении интенсивности поступления ВМАР-потока в 1,33 раза средняя очередь в СМО II (фаза 3) возрастает в 4 раза, а среднее время пребывания в системе – на 19%. При увеличении интенсивности в 1,5 раза ($\lambda = 4,5$) средняя длина очереди на фазе 2 возрастает в 12 раз, в СМО II (фаза 3) – в 6 раз, а среднее время пребывания в системе превышает 15 минут.

Для ТПУ «Кутузово» увеличение интенсивности поступления ВМАР-потока приводит к аналогичным результатам.

Эксперимент № 3. При двукратном увеличении интенсивности поступления ВМАР-потока ($\lambda = 6$) по отношению к эксперименту №1 среднее время пребывания в ТПУ «Владыкино» будет превышать 23 минуты. Средние длины очередей на фазах 1 и 2 составляют более 500 человек, по причине малого числа турникетов (5 шт.) при входе и выходе на платформу МЦК (СМО II), соответственно, на ней же возникают очереди наибольшей длины. Результаты данного моделирования представлены в табл. 5.7.

Таблица 5.7. Результаты моделирования № 3

	Поступило	Принято	T_{sist} (мин.)	P_{loss}	
Групп	721	716	17,8	0,01	
Заявок	23849	22730			
	$\bar{k}$	$l_{оч}$	w (с)	t_{ph} (с)	t_{lock} (с)
Фаза 1	8,96	585,70	193,20	196,30	0
Фаза 2	8,59	549,10	207,06	210,39	241,73
Фаза 3	2,87	1471,71	569,03	662,85	-
Ср. длина отдельной очереди на фазе 3			СМО I	СМО II	СМО III
			54,38	1404,45	12,88

Эксперимент № 4. Определение максимально допустимой загрузки ТПУ «Кутузово». В условиях эксперимента № 2 интенсивность поступления групп пассажиров увеличена в два раза (до $\lambda = 4$). Результаты представлены в следующей таблице.

Таблица 5.8. Результаты моделирования № 4

	Поступило	Принято	T_{sist} (мин.)	P_{loss}	
Групп	481	434	17,2	0,10	
Заявок	25530	19626			
	$\bar{k}$	$l_{оч}$	w (с)	t_{ph} (с)	t_{lock} (с)
Фаза 1	7,77	1223,91	464,35	467,43	0
Фаза 2	7,75	198,03	79,15	82,29	425,47
Фаза 3	2,96	961,51	391,80	482,36	-
Ср. длина отдельной очереди на фазе 3			СМО I	СМО II	СМО III
			43,22	838,53	79,76

Недостаток турникетов перед выходом с платформы МЦК (4 шт.) в ТПУ «Кутузово» приводит к образованию больших очередей на фазе 1 при двукратном увеличении интенсивности поступления ($\lambda = 4$), это объясняет высокую вероятность отказа в обслуживании (по сравнению с экспериментом № 3). По значению средней длины очереди перед СМО II можно заключить, что поезда МЦК не справляются с текущим уровнем загрузки. Среднее время пребывания заявки в системе (время пересадки) превышает 20 минут при учете времени перехода между узлами ТПУ.

Таким образом, оба ТПУ функционируют без перегрузок и имеют некоторый запас производительности при среднем пассажиропотоке 12 тыс. чел. в час пик (расчетный период – 2025 год). При увеличении числа пассажиров свыше 18 тыс. чел. в час пик, что соответствует увеличению интенсивности ВМАР-потока в 1,5 раза от первоначальной, пересадка перестает быть комфортной и превышает 15 минут. Выявлены два «узких места» в обоих ТПУ. Первое – малое число турникетов при входе (выходе) на платформу МЦК, особенно в ТПУ «Кутузово». Второе – низкая пропускная способность поездов МЦК. В первом случае следует увеличить число турникетов до 6. Во втором – увеличить число вагонов (если это технически возможно), либо уменьшить время движения поездов МЦК.

5.3. Моделирование работы транспортно-пересадочного узла в Екатеринбурге

5.3.1. Определение параметров модели

В Екатеринбурге планируется создание ТПУ на основе станции метро Ботаническая для того, чтобы разгрузить центральную часть города от личного

автотранспорта при маятниковой миграции населения с пригородных территорий [56]. Применим разработанную обобщенную математическую модель работы ТПУ для изучения возможности включения метрополитена в планируемый транспортно-пересадочный узел.

Статистические данные получены по натурному обследованию транспортных потоков на основных въездах в Екатеринбург. Объёмные исследования проводились коллегами из УрГУПС в 2015 году на протяжении двух недель в разные часы суток: в утреннее, обеденное и вечернее время. По результатам обследования были определены размеры транспортных и пассажиропотоков по прибытию и отправлению на разных направлениях Екатеринбурга (см. рис. 5.7). Для моделирования выбран интервал времени с 7.00 ч. до 9.00 ч., так как на него приходится наибольший пик прибывающего транспортного потока.



Рис. 5.7 Среднесуточное прибытие/отправление потоков автомобилей в Екатеринбург в час пик

Построим модель планируемого транспортно-пересадочного узла в Екатеринбурге на основе обобщенной модели, которая представлена в п. 5.1. Она будет иметь вид трехфазной СМО. В данном случае рассматривается только одно направление движения пассажиров – с личного транспорта в метро.

Фаза 1 – СМО, описывающая работу стоянки для автотранспорта (перехватывающая парковка). Первоначально число мест на парковке примем 2000.

Для определения числа автомобилей V , владельцы которых готовы воспользоваться перехватывающей парковкой и пересесть на общественный транспорт, применим АВС-анализ [29]: $V = 0,8cv$, где c – доля автомобилистов, готовых оставить машину на перехватывающей парковке (коэффициент вариации); v – объем потока автомобилей, которые прибывают в Екатеринбург в час пик.

На основе результатов анализа натурных данных для трассы Р 351 мы установили, что коэффициент вариации на этом направлении равен $c = 28,2\%$, объем потока автомобилей составляет $v = 3200$ маш./ч. Тогда среднее число поступающих на стоянку машин составит $V = 721,9$ единиц в час.

Предположим, что входящий поток автомобилей может быть описан пуассоновским потоком [128]. Следовательно, интервал времени между последовательно прибывающими автомобилями подчинен экспоненциальному распределению с параметром $\lambda_{in} = V / 60 = 12$.

Количество человек в салоне автомобиля, который прибывает на перехватывающую парковку, заранее неизвестно. Примем, что число пассажиров в автомобиле является случайной величиной. На фазе 1 автомобиль рассматривается как одна заявка, которая занимает место на перехватывающей парковке. Далее пассажиры из автомобиля направляются к дверям при входе в терминал и считаются как группа заявок. Тогда, перехватывающая парковка является очередью, а двери при входе в терминал – каналами. Количество каналов – 6, интенсивность обслуживания каждым каналом равна $\mu_1 = 10$ заявок в мин. Примем, что размер прибывшей группы подчиняется равномерному / геометрическому (см. п. 1.2.3) закону распределения и может принимать значения от 1 до 4.

После обслуживания в канале фазы 1 заявки переходят на фазу 2 и занимают места в очереди. В случае недостаточного числа мест на фазе 2 каналы на фазе 1 блокируются.

Фаза 2 – уровень касс. На данном уровне работает 10 каналов обслуживания (собственно касс), время работы распределено экспоненциально с параметром $\mu_2 = 2$. Максимальная длина очереди – 200 заявок.

Фаза 3 представляет собой СМО, которая имитирует работу станции метро. Здесь поезд считается каналом обслуживания, очередь – платформа станции метро.

В настоящее время в Екатеринбургском метрополитене действуют вагоны серии 81-717.5М (головной вагон) и 81-714.5М (промежуточный вагон) по 4 вагона в составе. Вместимость вагона при плотности 10 чел./кв.м составляет примерно 300 человек. Для модели возьмем среднюю плотность 5 чел./кв.м и половину вагонов из состава отведем для нужд проживающего в данном районе населения, не являющегося автомобилистами. Следовательно, обслуживаемая группа на фазе 3 имеет объем до 300 человек.

Интервалы движения поездов в Екатеринбургском метрополитене по рабочим дням с 7.00 до 9.30 составляют 4 минуты. Таким образом, время обслуживания на фазе 3 является детерминированным.

Среднее время перехода с фазы 1 на фазу 3 составляет 5 минут.

В терминах теории массового обслуживания данная модель ТПУ примет вид открытой СМО следующего типа:
 $ВМАР / М / 6 / 2000 \rightarrow * / М / 10 / 200 \rightarrow * / D^x / 1 / 1500$.

5.3.2. Модельные эксперименты по имитации работы ТПУ в Екатеринбурге.

Далее для определения необходимого уровня обслуживания и характеристик системы проводятся модельные эксперименты, отличающиеся параметрами поступающего потока заявок и моделируемого ТПУ.

Результаты моделирования представлены в табл. 5.9 – табл. 5.13, где A – среднее число обслуженных заявок в минуту; x_{unload} – средний размер обслуживаемой группы заявок на соответствующей фазе. Остальные параметры имеют такие же значения, что и в п. 5.2.2.

Эксперимент № 5. В табл. 5.9 представлены результаты моделирования при интенсивности входящего потока $\lambda_{in}=12$ групп заявок в мин. и геометрическом распределении с параметром $p = 0,9$ размеров этих групп.

Таблица 5.9. Результаты моделирования № 5

	Поступило	Принято	T_{sist} (мин.)	A	P_{loss}
Групп заявок	1345	1345	13,42	16,11	0
Заявок	2056	2056			
	$\bar{k}$	l_{oc}	w (с)	t_{ph} (с)	x_{unload}
Фаза 1	5,64	13	–	30,72	1
Фаза 2	8,38	4,21	24,26	55,11	1
Фаза 3	1	33,87	119,32	119,32	73,55

Эксперимент № 6. В табл. 5.10 представлены результаты моделирования при равномерном распределении размеров групп заявок, значение которых изменяется от 1 до 4, и 15 каналами на фазе 2.

Таблица 5.10. Результаты моделирования № 6

	Поступило	Принято	T_{sist} (мин.)	A	P_{loss}
Групп заявок	1389	1389	14,17	25,92	0
Заявок	3470	3470			
	$\bar{k}$	l_{oc}	w (с)	t_{ph} (с)	x_{unload}
Фаза 1	5,4	–	–	29,14	1
Фаза 2	14,07	29,33	72,64	102,29	1
Фаза 3	1	58,22	118,89	118,89	111,03

По результатам моделирования можно заключить, что при равномерном распределении размера групп заявок нагрузка на каналы фазы 2 возрастает более чем в полтора раза, но незначительно влияет на уровень обслуживания фазы 3. Как было сказано ранее, фаза 1 представляет собой перехватывающую парковку, поэтому, средняя длина очереди на ней будет равна количеству прибывших групп заявок (машин). Следовательно, парковочных мест на стоянке при ТПУ должно быть не менее 1500.

Далее проведем модельные эксперименты с целью определения пропускной способности метрополитена, входящего в состав планируемого ТПУ (фаза 3).

Эксперимент № 7. В отношении эксперимента № 5 время обслуживания на фазе 3 равно 8 минутам. Результаты моделирования представлены в табл. 5.11.

Таблица 5.11. Результаты моделирования № 7

	Поступило	Принято	T_{sist} (мин.)	A	P_{loss}
Групп заявок	1507	1507	15,52	16,15	0
Заявок	2264	2264			
	$\bar{k}$	l_{oc}	w (с)	t_{ph} (с)	x_{unload}
Фаза 1	5,25	–	–	29,2	1
Фаза 2	9,16	8,59	35	64,91	1
Фаза 3	1	73,72	237,18	237,18	132,36

Эксперимент № 8. В табл. 5.12 представлены результаты моделирования с увеличенной в два раза интенсивностью входящего потока автотранспорта ($\lambda_{in} = 24$ группы в минуту) и следующими характеристиками: размер поступающих групп заявок подчинен геометрическому распределению (см. п. 1.2.3) с параметром $p = 0,9$; 16 каналами на фазе 1; 20 каналами на фазе 2 и временем обслуживания, равным 4 минутам на фазе 3.

Таблица 5.12. Результаты моделирования № 8

	Поступило	Принято	T_{sist} (мин.)	A	P_{loss}
Групп заявок	2885	2885	13,42	33,29	0
Заявок	4371	4371			
	$\bar{k}$	$l_{оч}$	w (с)	t_{ph} (с)	x_{unload}
Фаза 1	11,2	–	–	30,8	1
Фаза 2	17,55	9,55	25,75	54,94	1
Фаза 3	1	71,42	119,55	119,55	143,45

Эксперимент № 9. В отношении эксперимента № 8 интенсивность входящего потока увеличена до $\lambda_{in} = 28,3$ групп заявок в минуту (приблизительно 1700 машин/час), число каналов обслуживания на фазе 2 равно 25, время обслуживания на фазе 3 равно 5 минутам. Результаты моделирования представлены в табл. 5.13.

Таблица 5.13. Результаты моделирования № 9

	Поступило	Принято	T_{sist} (мин.)	A	P_{loss}
Групп заявок	3493	3493	13,65	37,38	0
Заявок	5292	5292			
	$\bar{k}$	$l_{оч}$	w (с)	t_{ph} (с)	x_{unload}
Фаза 1	12,63	–	–	30,63	1
Фаза 2	21,28	3,72	10,35	40,45	1
Фаза 3	1	107,9	147,95	147,95	209,48

По результатам моделирования можно высказать предположение, что пропускной способности метрополитена достаточно для перевозки пассажиров в часы пик. При более чем двукратном увеличении объема пассажиропотока от планируемого уровня загруженность метрополитена не достигает порогового значения. Таким образом, метрополитен может быть включен в структуру планируемого транспортно-пересадочного узла без необходимости в модернизации.

Наиболее зависимым от объема пассажиропотока является уровень касс в ТПУ. Однако в моделировании не была учтена возможность наличия абонементных билетов у пассажиров. Учитывая этот факт можно существенно уменьшить число необходимых касс для обеспечения требуемого уровня обслуживания. По результатам теста установлено, что минимальное число парковочных мест на автостоянке ТПУ должно составлять 1500.

Выводы по главе 5

В первом пункте главы рассмотрены вопросы структуры транспортно-пересадочных узлов «Владыкино» и «Кутузово», а также их классификаций. Рассматриваемые ТПУ относятся к городскому типу, по размеру пассажиропотока к IV категории, а по планировочному решению – к многоуровневым системам (см. п. 5.1.1). Автором предложено обобщенное описание структуры ТПУ и алгоритм движения пассажиров сквозь терминалы таких систем. На основе, предложенной в главе 3, методики математического моделирования работы микро-ЛТС и результатов изучения ТПУ создана обобщенная математическая модель работы транспортно-пересадочных узлов в виде трехфазной СМО, которая имеет особенность – наличие на фазе 3 нескольких независимых одноканальных СМО с очередями.

Далее решались прикладные задачи. На основе обобщенной математической модели работы транспортно-пересадочных узлов построены стохастические модели работы ТПУ «Владыкино», «Кутузово» и планируемого ТПУ в Екатеринбурге. С помощью программного комплекса получены оценки эффективности функционирования, текущего уровня работы и максимально допустимой нагрузки для рассматриваемых систем. Кроме того, определены «узкие места» в структуре изучаемых объектов и выведены рекомендации по улучшению их параметров, которые позволят минимизировать среднее время пребывания заявки в системе.

В модели учитывается неравномерность входящего потока заявок и стохастический характер обслуживания на каждой фазе. Таким образом, модель работы микро-ЛТС является адекватным и эффективным инструментом для описания различных по структуре пассажирских и грузовых микрологистических транспортных систем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационное исследование посвящено разработке методики математического моделирования работы микрологистических транспортных систем, подверженных влиянию случайных факторов, на основе аппарата теории массового обслуживания, а также поиску численных методов анализа полученных моделей и программной реализации этих методов.

В процессе проведенного диссертационного исследования получены следующие результаты.

1. Разработана новая методика создания математических моделей работы микрологистических транспортных систем в виде вид многофазных систем массового обслуживания с групповым поступлением заявок.

2. Построены стохастические модели входящих потоков заявок в грузовую и пассажирские микро-ЛТС. Основой для математического моделирования стала модель *ВМАР*-потока, которая позволяет объединять в единую структуру несколько потоков заявок с различными характеристиками.

3. Предложен оригинальный численный метод оценки параметров работы многофазной СМО с групповым поступлением заявок на основе имитационного моделирования. Его отличие от известных методов заключается в возможности генерирования *ВМАР*-потоков с заданными характеристиками.

4. Предложен численно-аналитический метод расчета стационарных вероятностей состояний многофазных СМО с различными структурой и характером поступления групп заявок, в том числе случайного размера. Также получены рекуррентные формулы для однофазных СМО с групповым входящим потоком заявок и частных случаев многофазных СМО, позволяющие найти стационарные вероятностные характеристики этих систем.

5. Создан новый «Программный комплекс для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания», который реализует предложенную методику и позволяет решать широкий спектр модельных и прикладных задач, и получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

6. На основе предложенной методики построены стохастические модели работы железнодорожной (грузовой) и городской (пассажирской) микро-ЛТС в виде многофазных СМО с *ВМАР*-потоками. С помощью созданного программного комплекса получены оценки параметров работы этих СМО, на основе которых определены «узкие места» в структуре исследуемых микро-ЛТС и выработаны рекомендации по их устранению.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ГДП – график движения поездов.

ДСВ – дискретная случайная величина.

КРЗ – комбинированный закон распределения.

Микро-ЛТС – микрологистическая транспортная система.

НСВ – непрерывная случайная величина.

ОДГ – отклонение движения от графика.

ПК МРП СМО – Программного комплекса для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания.

СВ – случайная величина.

СМО – система массового обслуживания.

СеМО – сеть массового обслуживания.

ТМО – теория массового обслуживания.

ФПКР – функция плотности комбинированного распределения.

ВМАР – (Batch Markovian Arrival Process) групповой марковский входной поток.

Для обозначения типов СМО используется следующая структура [122]: $A/B/m/n$, где A – закон распределения времени между последовательным поступлением заявок в систему; B – закон распределения времени между появлением элементов исходящего потока (времени обслуживания); m – количество параллельно работающих каналов; n – длина очереди ($m, n < \infty$).

$\lceil a \rceil$ – округление числа a до большего целого значения.

$\lfloor a \rfloor$ – целая часть числа a .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абольников, Л.М. Система массового обслуживания с обратной связью. Принцип двойственности, оптимизации / Л.М. Абольников, Е.А. Джалалов // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 1. – С. 17–28.
2. Андронов, Р.В. Моделирование очередей на регулируемых пересечениях улично-дорожной сети крупного города в условиях плотных транспортных потоков : автореф. дис. ... канд. тех. наук : 05.13.17, 05.23.11 / Роман Валерьевич Андронов. – Тюмень, 2017. – 21 с.
3. Акулиничев, В.М. Математические методы в эксплуатации железных дорог / В.М. Акулиничев, В.А. Кудрявцев, А.Н. Корешков. – М.: Транспорт, 1981. – 223 с.
4. Александров, А.Э. Применение систем имитационного моделирования для расчета рациональной технической структуры и технологий промышленных транспортных систем / А.Э. Александров, П.А. Новиков // Вестник РГУПС. – 2008. – № 3.
5. Аль-натор, С.В. Анализ систем массового обслуживания конечной емкости с групповым потоком и групповым обслуживанием : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.17 / Софья Владимировна Аль-натор. – М., 1996. – 15 с.
6. Бабуров, Э.Ф. Моделирование многоканальной системы массового обслуживания в сетях энергораспределения [Электронный ресурс] / Э.Ф. Бабуров, В.К. Маригодов // Вісник СевНТУ. – 2012. – Режим доступа: http://www.nbu.gov.ua/old_jrn/natural/Vsntu/mechan/2012_132/2012_132/132_08.pdf (дата обращения: 12.09.2016).
7. Башарин, Г.П. Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем / Г.П. Башарин, А.Л. Толмачев // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». – М., 1983. – Т. 21. – С. 3–119.
8. Белинская, И.В. Методология проведения укрупнённого расчёта технико-экономических показателей работы транспортно-пересадочного узла / И.В. Белинская // Известия Санкт-Петербургского гос. аграрного ун. – 2016. – № 43. – С. 212–216.
9. Бернгард, К.А. Техническая маршрутизация железнодорожных перевозок / К.А. Бернгард. – М.: Трансжелдориздат, 1957. – 237 с.
10. Бочаров, П.П. G-сети: развитие теории мультипликативных сетей / П.П. Бочаров, В.М. Вишневский // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 5. – С. 46–74.

11. Бочаров, П.П. Стационарное распределение конечной очереди с рекуррентным потоком и марковским обслуживанием / П.П. Бочаров // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 9. – С. 66–78.
12. Бочаров, П.П. Стационарное распределение очереди в системе обслуживания конечной емкости с групповым потоком и временем обслуживания фазового типа / П.П. Бочаров, С.В. Якутина // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 9. – С. 106–119.
13. Бочаров, П.П. Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М.: РУДН, 1995. – 529 с.
14. Бройер, Л. Двухфазная система $BMAP/G/1/N \rightarrow PH/1/M-1$ с блокировкой / Л. Бройер, А.Н. Дудин, В.И. Клименок, Г.В. Царенков // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 1. – С. 117–130.
15. Бусленко, Н.П. Моделирование сложных систем / Н.П. Бусленко. – М.: Наука, 1968. – 356 с.
16. Бычков, И.В. Интеллектуальная система управления развитием транспортно-логистической инфраструктурой региона / И.В. Бычков [и др.] // Проблемы управления. – 2014. – № 1. – С. 27–35.
17. В будние дни каждая машина Москвы везет в среднем 1,3 человека [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://carclub.ru/news/russia/v_budnie_dni_kazhdaya_mashina_moskvy_vezet_v_srednem_13_cheloveka.html (дата обращения 17.05.2017).
18. Вакуленко, С.П. Моделирование пассажиропотоков в ТПУ / С.П. Вакуленко, В.В. Доенин, Н.Ю. Евреенова // Мир транспорта. – 2014. – Т. 12, № 4 (53). – С. 124–131.
19. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.
20. Власов, Д.Н. Научно-методологические основы развития агломерационных систем транспортно-пересадочных узлов (на примере Московской агломерации): автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.23.22 / Власов Денис Николаевич. – М.: МГСУ, 2013. – 37 с.
21. Власов, Д.Н. Транспортно-пересадочные узлы крупнейшего города (на примере Москвы) / Д.Н. Власов. – М.: АСВ, 2009. – 96 с.
22. Вишневский, В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В.М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.

23. Гаевой, С.В. Оценка вероятности обслуживания заявки в СМО путем имитационного моделирования / С.В. Гаевой // Перспективы развития информационных технологий. – 2013. – С. 13-18.
24. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
25. Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: ЛКИ, 2007. – 400 с.
26. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.
27. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2004. – 479 с.
28. Гурман, В.И. Эколого-экономические системы: Модели, информация, эксперимент / В.И. Гурман [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1987. – 216 с.
29. Гусев, С.А. ABC-анализ в функционировании транспортно-логистических систем: некоторые аспекты практического применения / С.А. Гусев, В.С. Маросин // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2015. – № 5. – С. 65–69.
30. Дудин, А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А.Н. Дудин, В.И. Клименок. – Мн.: БГУ, 2000. – 176 с.
31. Дудин, А.Н. Расчет необходимого числа каналов в современных телекоммуникационных сетях / А.Н. Дудин, В.И. Клименок // Информатизация образования. – 2005. – № 4. – С. 56–68.
32. Дудин, А.Н. О системе обслуживания *ВМАР/G/1* с альтернирующим режимом функционирования / А.Н. Дудин, В.И. Клименок // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 10. – С. 97–107.
33. Дудин, С.А. Система обслуживания *МАР + МАР/PH/1/N* с одиночным и сессионным поступлением запросов / С.А. Дудин // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 5. – С. 140–154.
34. Джонсон, Д. Современная логистика / Д. Джонсон [и др.]. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 624 с.
35. Евреенова, Н.Ю. Моделирование функционирования транспортно-пересадочного узла / Н.Ю. Евреенова // Мир транспорта. – 2014. – Т. 12, № 5 (54). С. 170–176.

36. Евреенова, Н.Ю. Выбор параметров транспортно-пересадочных узлов, формируемых с участием железнодорожного транспорта / дис. ... канд. технич. наук : 05.22.08 / Надежда Юрьевна Евреенова. – М., 2014. – 197 с.
37. Еделев, А.В. Моделирование топливно-энергетического комплекса на основе энергетических хабов при воздействии крупных возмущений / А.В. Еделев, О.А. Еделева, Х.Н. Нгуен // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2017. – № 3 (7). – С. 43-53.
38. Ермольев, Ю.М. Стохастические модели и методы в экономическом планировании / Ю.М. Ермольев, А.И. Ястремский. – М.: Физматгиз, 1979. – 255 с.
39. Жарков, М.Л. Математическая модель и программный комплекс для определения статистических параметров пассажиропотоков в транспортных системах / М.Л. Жарков // Вестник ИрГТУ. – 2018. – Т. 22, № 2. – С. 45–56.
40. Жарков, М.Л. Моделирование работы сортировочной станции на основе применения многофазных систем массового обслуживания / М.Л. Жарков, М.М. Павидис // Транспортная инфраструктура сибирского региона. – 2018. – Т.1. – С. 112–117.
41. Жарков, М.Л. Моделирование работы станций и участков железнодорожной сети на основе изучения отклонений от графика движения / М.Л. Жарков, П.А. Парсюрора, А.Л. Казаков // Вестник ИрГТУ. – 2014. – Т. 53, № 6. – С. 23–31.
42. Жарков, М.Л. Моделирование транспортно-пересадочных узлов на основе систем массового обслуживания – многофазных и с ВМАР-потокм / М.Л. Жарков, А.Л. Казаков, А.А. Лемперт // Вестник УрГУПС. – 2016. – № 4 (32). – С. 4–14.
43. Жарков, М.Л. Логистический терминал как немарковская система массового обслуживания / М.Л. Жарков, А.Л. Казаков, А.А. Лемперт // Информационные и математические технологии в науке и управлении: тр. XX Байкальской Всерос. конф. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2015. – Т. 1. – С. 36-44.
44. Жарков, М.Л. К вопросу о построении математической модели логистического терминала / М.Л. Жарков // Материалы III Российско-Монгольской конф. молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению (г. Иркутск (Россия) – Ханх (Монголия), 23–30 июня 2015 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2015. – С. 43.

45. Жарков, М.Л. О модели входящего пассажиропотока в транспортно-пересадочные узлы / М.Л. Жарков // Материалы Всерос. молодежной науч.-практ. конф. «Ляпуновские чтения 2017» (г. Иркутск, 5–7 декабря 2017 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 35.
46. Жарков, М.Л. О моделировании отклонения движения поездов от графика / М.Л. Жарков // Материалы Третьей межвузовской науч.-практ. конф. молодых ученых 2014 (г. Иркутск, 28–30 апреля 2014 г.). – Иркутск: ИрГУПС, 2014. – С. 55–56.
47. Жарков, М.Л. О моделировании транспортно-пересадочного узла с использованием многофазных систем массового обслуживания / М.Л. Жарков // Материалы XVII Всероссийской конф. молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Новосибирск, 30 октября – 3 ноября 2016 г.). – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2016. – С. 36.
48. Жарков, М.Л. Определение показателей эффективности транспортно-пересадочного узла с применением систем массового обслуживания / М.Л. Жарков // Материалы XVIII Всероссийской конф. молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Иркутск, 21–25 августа 2017 г.). – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2017. – С. 76.
49. Жарков, М.Л. О подходе к моделированию работы микрологистических-транспортных систем на основе теории массового обслуживания / М.Л. Жарков // Материалы XIX Всерос. конф. молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Кемерово, 29 октября – 2 ноября 2018 г.). – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2018. – С. 63.
50. Жарков, М.Л. О моделировании работы микрологистических-транспортных систем на основе теории массового обслуживания / М.Л. Жарков // Материалы Всерос. молодежной науч.-практич. конф. «Ляпуновские чтения 2018» (г. Иркутск, 03 - 05 декабря 2018 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2018. – С. 36.
51. Жарков, М.Л. Об использовании многофазных систем массового обслуживания при моделировании транспортно-пересадочного узла / М.Л. Жарков // Материалы Всерос. молодежной науч.-практ. конф. «Ляпуновские чтения 2016» (г. Иркутск, 21–23 ноября 2016 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2016. – С. 35.
52. Жарков, М.Л. Об исследовании работы немарковской системы массового обслуживания с мультизаявками / М.Л. Жарков // Материалы Всерос. молодежной науч.-

практ. конф. «Винеровские чтения 2015» (г. Иркутск, 16–18 апреля 2015 г.). – Иркутск: ИРНITU, 2015. – С. 49–50.

53. Жарков, М.Л. Об устойчивости движения поездов в соответствии с нормативным графиком / М.Л. Жарков, П.А. Парсюрлова // Материалы Всерос. молод. науч.-практ. конф. «Винеровские чтения 2014» (г. Иркутск, 3–5 апреля 2014 г.). – Иркутск: ИРНITU, 2014. – С. 51–52.

54. Жарков, М.Л. Определение критических показателей работы транспортно-пересадочного узла на основе многофазной системы массового обслуживания / М.Л. Жарков, А.Л. Казаков, А.А. Лемперт // Вестник УрГУПС. 2017. № 3 (35). С. 40–52.

55. Жарков, М.Л. Применение многофазных систем массового обслуживания с групповым поступлением к логистическим задачам / М.Л. Жарков // Материалы Всерос. молодежной науч.-практ. конф. «Винеровские чтения 2016» (г. Иркутск, 1–3 июня 2016 г.). – Иркутск: ИРНITU, 2016. – С. 36.

56. Журавская, М.А. Моделирование работы транспортно-пересадочного узла мегаполиса как трехфазной системы массового обслуживания / М.А. Журавская, А.Л. Казаков, М.Л. Жарков, П.А. Парсюрлова // Транспорт Урала. – 2015. – № 3 (46). – С. 17–23

57. Зейфман, А.И. О нестационарной модели Эрланга / А.И. Зейфман // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 12. – С. 71–80.

58. Зейфман, А.И. Об оценках скорости сходимости и устойчивости для некоторых моделей массового обслуживания / А.И. Зейфман, А.В. Коротышева, К.М. Киселева, В.Ю. Королев, С.Я. Шоргин // Информация и ее применение. – 2014. – Т. 8, № 3. – С. 19–27.

59. Зейфман, А.И. Марковские цепи и модели с непрерывным временем / А.И. Зейфман, В.Е. Бенинг, И.А. Соколов. – М.: ЭЛЕКС-КМ, 2008. – 240 с.

60. Земблинов, С.В. Основы построения транспортных узлов / С.В. Земблинов [и др.]. – М.: Трансжелдориздат, 1959. – 454 с.

61. Иванов, Н.Н. Система массового обслуживания с параллельным обслуживанием групповых заявок / Н.Н. Иванов // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 10. – С. 75–80.

62. История проектов ТПУ МКЖД [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://forum.nashtransport.ru/blogs/loader/index.php?&st=135> (дата обращения: 19.03.2018)

63. Итоги работы транспортного комплекса за 2016 год и планы на 2017 год [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://echo.msk.ru/blog/echomsk/1915646-echo/> (дата обращения: 19.03.2018)

64. Казаков, А.Л. Построение имитационной модели входящего на грузовую станцию вагонопотока / А.Л. Казаков, А.М. Маслов // Транспорт Урала. – 2009. – № 2. – С. 17–21.
65. Казаков, А.Л. Применение имитационного моделирования для синтетического планирования грузовых терминалов железнодорожного транспорта / А.Л. Казаков, А.М. Маслов // Вестник ИрГТУ. – 2010. – № 6 (46). – С. 146–153.
66. Казаков, А.Л. Применение многофазных систем массового обслуживания для моделирования сортировочной станции / А.Л. Казаков, М.М. Павидис, М.Л. Жарков // Вестник УрГУПС. – 2018. – № 2 (38). – С. 4–14.
67. Казимирский, А.В. Формула Литтла для системы *ВМАР/SM/1* / А.В. Казимирский // Вестник БГУ. – 2006. – № 1. – С. 96–101.
68. Каменева, Н.Г. Маркетинговые исследования: Учеб. пособие. 2-е изд. / Н.Г. Каменева, В.А. Поляков. – М.: Вузовский учебник, 2011. – с. 469.
69. Канке, А.А. Основы логистики: учебное пособие / А.А. Канке, И.П. Кошечая. – М.: КНОРУС, 2010. – 576 с.
70. Карпова, Е. На Московском центральном кольце 17 ноября был зафиксирован рекордный суточный пассажиропоток – 312 тыс. пассажиров [Электронный ресурс] / Е. Карпова. – Режим доступа: <http://www.gudok.ru/news/?ID=1356602> (дата обращения: 15.06.2017).
71. Кельтон, В. Имитационное моделирование / В. Кельтон, А. Лоу. – СПб.: Питер, 2004. – 846 с.
72. Ким, Ч.С. Многолинейная система обслуживания с групповым марковским потоком и отрицательными заявками / Ч.С. Ким, В.И. Клименок, Д.С. Орловский // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 12. – С. 106–122.
73. Клименок, В.И. Многолинейная система массового обслуживания с групповым марковским входным потоком и повторными вызовами / В.И. Клименок // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 8. – С. 97–108.
74. Клименок, В.И. Система обслуживания *ВМАР/SM/1* с гибридным механизмом функционирования / В.И. Клименок // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 5. – С. 111–124.
75. Клименок, В.И. Двухфазная система обслуживания с групповым марковским потоком и повторными вызовами / В.И. Клименок, О.С. Тарамин // Автоматика и телемеханика. – 2010. – Вып. 1. – С. 3–17.

76. Клименок, В.И. Двухфазная система массового обслуживания с полумарковским процессом обслуживания и повторными вызовами / В.И. Клименок, О.С. Дудина, В.М. Вишневский, К.Е. Самуйлов // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2017): Материалы Двдцдтой международной научной конференции. 25–29 сентября 2017 г. – М.: Техносфера, 2017. – С. 363–370.
77. Копченко, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н.В. Копченко, И.А. Марон. – СПб.: Лань, 2009. – 368 с.
78. Кропачева, Н.Ю. Моделирование случайных величин: метод, указания / Н.Ю. Кропачева, А.С. Тихомиров. – Великий Новгород: НовГУ, 2004. – 47 с.
79. Кузьмин, О.В. Оптимизационный подход к стохастической задаче управления запасами / М. Эрдэнэбат, О.В. Кузьмин, Н. Тунгалаг, Р. Энхбат // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2017. – № 3 (55). – С. 106–110.
80. Лебедев, А.В. Асимптотика максимумов в бесконечнолинейной системе с ограниченным размером групп / А.В. Лебедев // Фундаментальная и прикладная математика. – 1996. – Т. 2, № 4. – С. 1107-1115.
81. Левин, Д.М. Статистика для менеджеров / Д.М. Левин, Д. Стефан, Т.С. Кребиль, М.Л. Беренсон. – М.: Вильямс, 2004. – 1312 с.
82. Льюис, К.Д. Методы прогнозирования экономических показателей / К.Д. Льюис. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 318 с.
83. Маликов, Р.Ф. Основы разработки компьютерных моделей сложных систем / Р.Ф. Маликов. – Уфа: БГПУ, 2012. – 256 с.
84. Маслов, А.М. Техничко-технологические параметры функционирования грузовых станций железнодорожного транспорта в условиях стохастического характера вагонопотока : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 05.22.08 / Александр Михайлович Маслов. – Екатеринбург, 2009. – 176 с.
85. Массель, Л.В. Имитационное моделирование в исследованиях развития угольной промышленности России / Л.В. Массель, Л.Н. Такайшвили, К.Ч. Чинь // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2011. – № 3 (31). – С. 232-237.
86. Методические положения по автоматизированному анализу ГДП [Электронный ресурс] / Распорядение ОАО «РЖД» от 09 марта 2010 г. № 454 р. – Дата обращения: <https://jd-doc.ru/2010/mart-2010/6747-rasporiyazhenie-oao-rzhd-ot-09-03-2010-n-454r> (дата обращения: 15.06.2017).

87. Миротин, Л.Б. Управление грузовыми потоками в транспортно-логистических системах / Л.Б. Миротин [и др.]. – М.: Горячая линия-Телеком, 2010. – 704 с.
88. Моисеева, С.П. Разработка методов исследования математических моделей немарковских систем обслуживания с неограниченным числом приборов и непуассоновскими входящими потоками : дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 05.13.18 / С.П. Моисеева. – Томск, 2014. – 280 с.
89. Маршруты городского транспорта Москвы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://msk.rusavtobus.ru/> (дата обращения: 19.04.2017).
90. Назаров, А.А. Исследование систем массового обслуживания и случайных потоков методами асимптотического анализа / А.А. Назаров // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: Материалы Первой Всерос. молодежной научной конф. – 2013.
91. Назаров, А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, С.П. Моисеева. – Томск: НТЛ, 2006. – 112 с.
92. Назаров, А.А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – Томск: НТЛ, 2010. – 228 с.
93. Нгуен, Х.Ф. Марковские модели однолинейных систем обслуживания с накопителем конечной емкости : автореф. дис. ... канд. д.т.н.: 05.13.17 / Нгуен Хунг Фонг. – М., 2001. – 35 с.
94. О метрополитене [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mosmetro.ru/about/> (дата обращения 18.07.2017).
95. О формировании транспортно-пересадочных узлов в городе Москве [Электронный ресурс] / – Постановление правительства Москвы от 06.09.2011 № 413-ПП. – Режим доступа: https://www.mos.ru/upload/documents/oiv/2011_0413_pp.pdf (дата обращения 18.11.2016).
96. Орлова, А.А. Моделирование немарковской СМО с коррелирующим входным потоком заявок / А.А. Орлова // Инженерный вестник. – 2014. – № 9. – С. 511–520.
97. Перехватывающие парковки [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://metro-parking.ru/metro_parking/ (дата обращения 19.03.2017).
98. Персианов, В.А. Моделирование транспортных систем / В.А. Персианов, К.Ю. Скалов, Н.С. Усков. – М.: Транспорт, 1972. – 208 с.

99. Повороженко, В.В. Основы взаимодействия железных дорог с другими видами транспорта: учебник для вузов / В.В. Повороженко, Н.К. Сологуб, А.А. Тимошин, В.Г. Галабурда. – М.: Транспорт, 1986. – 215 с.
100. Подвижной состав МЦК [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mosmetro.ru/mcc/ps/> (дата обращения: 19.06.2017).
101. Горстко, А.Б. Познакомьтесь с математическим моделированием / А.Б. Горстко. – М.: Знание, 1991. – 160 с.
102. Поттгофф, Г. Учение о транспортных потоках / Г. Поттгофф. – М.: Транспорт, 1975. – 344 с.
103. Правдин, Н.В. Прогнозирование грузовых потоков / Н.В. Правдин, М.Л. Дыканюк, В.Я. Негрей. – М.: Транспорт, 1987. – 247 с.
104. Правдин, Н.В. Взаимодействие различных видов транспорта / Н.В. Правдин, В.Я. Негрей, В.А. Подкопаев. – М.: Транспорт, 1989. – 208 с.
105. Правдин, Н.В. Технология работы вокзалов и пассажирских станций / Н.В. Правдин, Л.С. Рябуха, В.И. Лукашев. – М.: Транспорт. 1990. – 319 с.
106. Румянцев, С.А. Основы математического моделирования и вычислительной математики / С.А. Румянцев. – Екатеринбург: УрГУПС, 2006. – 116 с.
107. Рыжиков, Ю.И. Опыт расчета сложных систем массового обслуживания / Ю.И. Рыжиков, А.В. Уланов // Информационно-управляющие системы. – 2009. – № 2. – С. 56–62.
108. Рыжиков, Ю.И. Расчет систем обслуживания с групповым поступлением заявок / Ю.И. Рыжиков // Информационно-управляющие системы. – 2007. – № 2. – С. 39–49.
109. Савченко, И.Е. Железнодорожные станции и узлы / И.Е. Савченко, С.В. Земблинов, И.И. Страковский. – М.: Транспорт, 1980. – 479 с.
110. Салмина, Н.Ю. Моделирование социально-экономических систем и процессов / Н.Ю. Салмина. – Томск: ТУСУР, 2016. – 198 с.
111. Сатин, Я.А. Об одном классе марковских систем обслуживания / Я.А. Сатин, А.И. Зейфман, А.В. Коротышева, С.Я. Шоргин // Информация и ее применение. – 2011. – Т. 5, № 4. – С. 18–24.
112. Семейство турникетов УТ-2000.9 распашные створки [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.elsy.ru/services/ut2000_raspashnye_stvorki/ (дата обращения: 19.06.2017).

113. Сизова, Т.М. Статистика / Т.М. Сизова. – СПб.: СПб НИУ ИТМО, 2013. – 176 с.
114. Скалов, К.Ю. Взаимодействие городского и пригородного железнодорожного транспорта / К.Ю. Скалов, А.П. Михеев. – М.: Транспорт, 1972. – 216 с.
115. Смехов, А.А. Математические модели процессов грузовой работы / А.А. Смехов. – М.: Транспорт, 1982. – 256 с.
116. Смородинцева, Е.Е. Организация работы сортировочной станции / Е.Е. Смородинцева, Е.Н. Тимухина. – Екатеринбург: УрГУПС, 2010. – 65 с.
117. Старовойтов, А.Н. Система массового обслуживания с групповым поступлением, групповым обслуживанием, выходом прибора из строя и восстановлением / А.Н. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – Вып. 4, № 13. – С. 66–69.
118. Старовойтов, А.Н. Система массового обслуживания с групповым поступлением, групповым обслуживанием и катастрофическими сбоями / А.Н. Старовойтов // ПФМТ. – 2011. – № 3(8). – С. 78–80.
119. Статистика. Пассажиропоток в метро [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://metro-spb.ru/statisticheskie-dannye.htm> (дата обращения: 19.04.17).
120. Степнов, М.Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний / М.Н. Степнов, А.В. Шаврин. – М.: Машиностроение, 2005. – 399 с.
121. Строительные нормы и правила: СНиП 2.07.01–89*. Градостроительство. Планировка и застройка городских и сельских поселений: нормативно-технический материал. – М.: Минрегион России, 2011. – 120 с.
122. Таха, Х.А. Введение в исследование операций / Х.А. Таха. – М.: Вильямс, 2005. – 912 с.
123. Титов, А.В. Особенности построения транспортно-логистических кластеров в Европе / А.В. Титов, И.А. Волынский // Вестник АГТУ. Серия: Морская техника и технологии. – 2015. – № 4. – С. 103–108.
124. Тихоненко, О.М. Распределение суммарного объема сообщений в системах массового обслуживания с групповым поступлением / О.М. Тихоненко // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 11. – С. 111–120.
125. Фу, Ф.Г. Имитационное моделирование работы грузовых транспортных терминалов / Ф.Г. Фу, А.Л. Казаков // Вестник ИрГТУ. – 2013. – № 9 (80). – С. 37–43.

126. Фу, Ф.Г. Технология моделирования объектов транспорта с использованием стохастического подхода : дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Фу Фыюк Гуй. – Иркутск, 2013. – 150 с.
127. Фу, Ф.Г. Математическая модель и программная система для прогнозирования работы специального транспорта / Ф.Г. Фу, А.А. Лемперт // В мире научных открытий. – 2012. – № 8 (32). – С. 195–210.
128. Хейт, Ф.А. Математическая теория транспортных потоков / Ф.А. Хейт. – М.: Мир, 1966. – 282 с.
129. Христюк, Н.М. Методические рекомендации по обследованию пассажирских и пешеходных потоков в транспортно-планировочных узлах города / Н.М. Христюк, Е.П. Левковская, А.А. Шрейдер. – К.: КиевНИИП, 1989. – 70 с.
130. Цициашвили, Г.Ш. Исследование стационарных характеристик некоторых переменных систем обслуживания / Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова // Дальневосточный матем. журнал. – 2000. – Т. 1, № 1. – С. 58–62.
131. Что такое Московское центральное кольцо? Пассажирам [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://mkzd.ru/passengers/> (дата обращения: 15.06.2017).
132. Якимов, М.Р. Основные подходы к моделированию движения транспортных потоков / М.Р. Якимов // Мир транспорта. – 2015. – №4. – С. 166–173.
133. Якушкин, И.М. Пассажирские перевозки на метрополитенах / И.М. Якушкин. – М.: Транспорт, 1982. – 175 с.
134. Artalejo, J.R. Markovian arrivals in stochastic modelling: a survey and some new results / J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral, Qi-Ming He // Sort: Statistics and operations research transactions. – 2010. – Vol. 34, № 2. – P. 101–156.
135. Banik, A.D. Analysis of Queue-Length Dependent Vacations and P-Limited Service in *BMAP/G/1/N* Systems: Stationary Distributions and Optimal Control / A.D. Banik // International Journal of Stochastic Analysis. – 2013. – Vol. 2. – 14 p.
136. Banik, A.D. *BMAP/G/1/N* queue with vacations and limited service discipline / A.D. Banik, U.C. Gupta, S.S. Pathak // Applied mathematics and computation. – 2006. – Vol. 180, № 2. – P. 707–721.
137. Banik, A.D. Queueing analysis and optimal control of *BMAP/G_(a,b)/1/N* and *BMAP/MSP_(a,b)/1/N* systems / A.D. Banik // Computers & industrial engineering. – 2009. – P. 748–761.

138. Banik, A.D. Single server queues with a batch Markovian arrival process and bulk renewal or non-renewal service / A.D. Banik // Journal of Systems Science and Systems Engineering. – 2015. – Vol. 24, № 3. – P. 337–363.
139. Baumann, H. Multi-server tandem queue with Markovian arrival process, phase-type service times, and finite buffers / H. Baumann, W. Sandmann // European Journal of Operational Research. – 2017. – Vol. 256, № 1, – P. 187–195.
140. Bolch, G. Queueing Networks and Markov Chains: Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Applications / G. Bolch, S. Greiner, H. de Meer., K.S. Trivedi. – N.Y.: John Wiley & sons, 2006. – 896 p.
141. Bychkov, I.V. An intelligent management system for the development of a regional transport logistics infrastructure / I.V. Bychkov, A.L. Kazakov, A.A. Lempert, D.S. Bukharov, A.B. Stolbov // Automation and Remote Control. – 2016. – Vol. 77, № 2. – P. 332–343.
142. Chydzinski, A. Duration of the buffer overflow period in a batch arrival queue / A. Chydzinski // Performance Evaluation. – 2006. – Vol. 63, № 4–5. – P. 493–508.
143. Cordeiro, J.D. Batch Markovian Arrival Processes (*BMAP*) [Electronic resource] / J.D. Cordeiro, J.P. Kharoufeh // Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science. – 2011. – URL: http://www.pitt.edu/~jkharouf/Papers/Cordeiro_Khar_BMAPv0.pdf (date of reference: 3.06.2015).
144. Delasay, M. Load effect on service times / M. Delasay, A. Ingolfsson, B. Kolfal, K. Schultz // European Journal of Operational Research. – 2018. DOI: 10.1016/j.ejor.2018.12.028
145. Dudin, A.N. Optimal Hysteretic Control for the *BMAP/G/1* System with Single and Group Service Modes / A.N. Dudin, S. Chakravarthy // Annals of Operations Research. – 2002. – Vol. 112, № 1–4. – P. 153–169.
146. Dudin, A.N. Optimal control for an $M^X/G/1$ queue with two operation modes / A.N. Dudin // Probability in Engineering and Informational Sciences. – 1997. – Vol. 11. – P. 255–265.
147. Dudin, A.N. Analysis of a queue in the *BMAP/G/1/N* system / A.N. Dudin, A.A. Shaban, V.I. Klimenok // I.J. of Simulation. – 2005. – Vol. 6, № 1–2. – P. 13–22.
148. Ferng, H.W. Departure Processes of *BMAP/G/1* Queues / H.W. Ferng, J.F. Chang // Queueing systems. – 2001. – № 10. – P. 109–135.
149. Fruin, J.J. Pedestrian planning and design / J.J. Fruin. – N.Y.: Metropolitan Association of Urban designers and Environmental Planners, 1971.

150. Germs, R. Analysis of finite-buffer state-dependent bulk queues / R. Germs, N. van Foreest // *OR Spectrum*. – 2012. – Vol. 35, № 3. – P. 563–583.
151. Graham, C., Talay D. Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods: Mathematical Foundations of Stochastic Simulation / C. Graham, D. Talay. – N.Y.: Springer, 2013. – 264 p.
152. Juanxiu, Z. Circulation network design for urban rail transit station using a PH(n)/PH(n)/C/C queueing network model / Z. Juanxiu, H. Lu, J. Yangsheng, A. Khattak // *European Journal of Operational Research*. – 2017. – Vol. 260, Issue 3, – P. 1043-1068.
153. Kerner, B.S. Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control / B.S. Kerner. – Berlin: Springer, 2009. – 265 p.
154. Kim, C. Tandem Retrial Queueing System with Correlated Arrival Flow and Operation of the Second Station Described by a Markov Chain / C. Kim, A. Dudin, V. Klimenok // *Communications in Computer and Information Science*. – 2012. – Vol. 291. – P. 370–382.
155. Kim, C. Tandem queueing system with infinite and finite intermediate buffers and generalized phase-type service time distribution / C. Kim, A. Dudin, O. Dudina, S. Dudin // *European Journal of Operational Research*. – 2014. – Vol. 235. – P. 170–179.
156. Kim, C. Investigation of the $BMAP/G/1 \rightarrow \cdot / PH/1/M$ tandem queue with retrials and losses / C. Kim, S. Ha Park, A. Dudin, V. Klimenok, G. Tsarenkov // *Applied Mathematical Modelling*. – 2010. – Vol. 34, № 10. – P. 2926–2940.
157. Kim, J. Analysis of a semi-open queueing network with Markovian arrival process / J. Kim, A. Dudin, S. Dudin, C. Kim // *Performance Evaluation*. – 2018. – Vol. 120. – P. 1–19.
158. Lucantoni, D.M. New results on single server queue with a batch Markovian arrival process / D.M. Lucantoni // *Stochastic Models*. – 1991. – Vol. 7. – P. 1–46.
159. Lucantoni, D.M. The $BMAP/G/1$ queue: A tutorial / D.M. Lucantoni // *Models and Techniques for Performance Evaluation of Computer and Communication Systems*. – 1993. – P. 330–358.
160. Lucantoni, D.M. Simpler proofs of some properties of the fundamental period of the $MAP/G/1$ queue / D.M. Lucantoni, M.F. Neuts // *J. Appl. Probab.* – 1994. – Vol. 31. – P. 235–241.
161. Machihara, F. A $BMAP/SM/1$ Queue with Service Times Depending on the Arrival Process / F. Machihara // *Queueing systems*. – 1999. – Vol. 32, № 1–3. – P. 1–15.
162. Maragathasundari, S. Batch arrival queueing system with two stages of service / S. Maragathasundari, S. Srinivasan, A. Ranjitham // *Int. J. of Math. Analysis*. – 2014. – Vol. 8, № 6. – P. 247–258.

163. Maragatha Sundari, S. A batch arrival non-markovian queue with three types of service / S. Maragatha Sundari, S. Srinivasan, A. Ranjitham // Int. journal of computer applications. – 2013. – Vol. 83, № 5.
164. Matendo, S.K. Some performance measures for vacation models with a batch markovian arrival process / S.K. Matendo // J. of applied mathematics and stochastic analysis. – 1994. – № 2. – P. 111–124.
165. Medhi, J. Stochastic models in queueing theory / J. Medhi. – London: Academic press, 2003. – 482 p.
166. Metropolis, N. The Monte Carlo method / N. Metropolis, S. Ulam // J. Amer. Assoc. – 1949. – Vol. 44, № 247. – P. 335–341.
167. Neuts, M.F. A general class of balk queues with Poisson input [Electronic resource] / M.F. Neuts // – 1966. – URL: <http://www.stat.purdue.edu/docs/research/tech-reports/1-527/tr-046.pdf> (Date of reference: 20.05.2015).
168. Neuts, M.F. A versatile markovian point process / M.F. Neuts // J. Appl. Prob. – 1979. – P. 746–779.
169. Niyirora, J. Fluid approximations and control of queues in emergency departments / J. Niyirora, J. Zhuang // EJOR. – 2017. – Vol. 261, Issue 3, – P. 1110–1124.
170. Pollock, S. Approximation analysis for open tandem queues with blocking: exponential and general service distribution / S. Pollock, J. Bitge, J. Alden. – Department of Industrial & Operations Engineering University of Michigan, 1985. – 23 p.
171. Qi-Ming, H.E. Construction of continuous time markovian arrival processes / Qi-Ming H.E. // J. of Systems Science and Systems Engineering. – 2010. – Vol. 19, Issue 3. – P. 351–366.
172. Schleyer, M. An analytical method for the calculation of the waiting time distribution of a discrete time G/G/1-queueing system with batch arrivals / M. Schleyer, K. Furmans // Regular article. – 2006. – Vol. 7. – P. 745–763.
173. Sreekanth, K. Performance Analysis of Three Stage Tandem Queues / K. Sreekanth., K. Kamlesh // IJMTT. – 2017. – Vol. 52, № 3. – P. 171–176.
174. Vinarskiy, M. A method of approximate analysis of an open exponential queueing network with losses due to finite shared buffers in multi-queue nodes / M. Vinarskiy // European Journal of Operational Research. – 2017. – Vol. 258, Issue 1. – P. 207–215.

175. Vishnevskii, V.M. Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks / V.M. Vishnevskii, A.N. Dudin // Automation and Remote Control. – 2017. – Vol. 78, Issue 8. – P. 1361–1403.
176. Vishnevsky, V. State reduction in analysis of a tandem queueing system with correlated arrivals / V. Vishnevsky, A. Larionov, O. Semenova, R. Ivanov // Communications in computer and information science. – 2017. – Vol. 800. – P. 215–230.
177. Vlasov, D. Scientific and methodological basis of development of the park-and-ride facilities in the intermodal transport hubs of Moscow agglomeration / D. Vlasov, N. Danilina // Advanced Materials Research. – 2014. – Vol. 869. – P. 201–204.
178. Zharkov, M.L. A Stochastic Model of a Transport Hub and Multi-phase Queueing Systems / A.L. Kazakov, A.A. Lempert, M.L. Zharkov // Advances in Intelligent Systems Research. – 2018. – Vol. 158. – P.117–123.
179. Zharkov, M. Issues of sustainable urban mobility simulation / M. Zhuravskaya, A. Lempert, N. Anashkina, M. Zharkov // Business Logistics in Modern Management. – 2018. – P. 439–452.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 6.1. Выборочная совокупность ω_1^{nacc}

№	ω_i	№	ω_i	№	ω_i	№	ω_i	№	ω_i	№	ω_i	№	ω_i
1	5	44	4	87	5	130	5	173	6	216	6	259	6
2	6	45	6	88	7	131	7	174	8	217	8	260	8
3	7	46	6	89	8	132	8	175	8	218	9	261	9
4	8	47	8	90	8	133	9	176	9	219	9	262	9
5	9	48	8	91	9	134	9	177	9	220	10	263	10
6	9	49	9	92	9	135	10	178	10	221	10	264	11
7	9	50	9	93	10	136	10	179	10	222	10	265	11
8	9	51	10	94	10	137	11	180	11	223	11	266	11
9	10	52	10	95	11	138	11	181	11	224	11	267	12
10	10	53	11	96	11	139	12	182	12	225	12	268	12
11	10	54	11	97	11	140	12	183	12	226	12	269	12
12	10	55	11	98	12	141	12	184	13	227	13	270	13
13	11	56	11	99	12	142	12	185	13	228	13	271	13
14	12	57	12	100	12	143	13	186	13	229	13	272	14
15	12	58	12	101	13	144	13	187	14	230	14	273	14
16	13	59	13	102	14	145	14	188	15	231	15	274	15
17	14	60	14	103	14	146	14	189	15	232	15	275	15
18	14	61	14	104	15	147	15	190	15	233	16	276	16
19	14	62	14	105	15	148	16	191	16	234	17	277	17
20	4	63	15	106	15	149	16	192	17	235	17	278	18
21	4	64	15	107	17	150	17	193	18	236	18	279	19
22	6	65	4	108	5	151	5	194	5	237	5	280	6
23	7	66	5	109	5	152	5	195	6	238	6	281	6
24	8	67	6	110	7	153	8	196	8	239	8	282	9
25	9	68	8	111	8	154	8	197	9	240	9	283	9
26	9	69	8	112	9	155	9	198	9	241	9	284	9
27	10	70	9	113	9	156	9	199	9	242	10	285	10
28	10	71	9	114	10	157	10	200	10	243	11	286	11
29	10	72	9	115	10	158	10	201	10	244	11	287	11
30	11	73	10	116	11	159	11	202	11	245	11	288	12
31	11	74	11	117	11	160	11	203	11	246	12	289	12
32	11	75	11	118	11	161	12	204	12	247	12	290	12
33	12	76	11	119	12	162	12	205	12	248	12	291	12
34	12	77	11	120	12	163	12	206	13	249	13	292	13
35	13	78	11	121	12	164	13	207	13	250	13	293	13
36	13	79	12	122	13	165	13	208	13	251	14	294	14
37	13	80	13	123	13	166	13	209	14	252	14	295	14
38	14	81	13	124	14	167	14	210	15	253	15	296	15
39	14	82	14	125	14	168	14	211	15	254	15	297	16
40	15	83	14	126	15	169	15	212	16	255	16	298	16
41	7	84	14	127	15	170	16	213	17	256	17	299	17
42	9	85	15	128	16	171	16	214	17	257	17	300	18
43	9	86	17	129	17	172	17	215	18	258	19	301	19

Таблица 6.1. Выборочная совокупность ω_1^{nacc} (продолжение)

№	ω_i	№	ω_i	№	ω_i	№	ω_i	№	ω_i	№	ω_i	№	ω_i
302	12	332	10	362	11	392	11	422	11	452	11	482	11
303	12	333	11	363	11	393	11	423	11	453	11	483	11
304	13	334	11	364	11	394	11	424	12	454	12	484	12
305	13	335	12	365	12	395	12	425	12	455	12	485	13
306	14	336	12	366	12	396	12	426	13	456	13	486	13
307	14	337	13	367	13	397	13	427	13	457	13	487	14
308	15	338	13	368	13	398	13	428	13	458	14	488	14
309	16	339	14	369	14	399	14	429	14	459	15	489	15
310	16	340	14	370	14	400	14	430	14	460	15	490	15
311	16	341	14	371	15	401	15	431	15	461	15	491	16
312	17	342	15	372	15	402	15	432	15	462	15	492	16
313	18	343	16	373	16	403	16	433	17	463	17	493	17
314	19	344	17	374	17	404	17	434	17	464	17	494	18
315	6	345	17	375	17	405	17	435	17	465	17	495	18
316	10	346	17	376	18	406	18	436	18	466	18	496	19
317	10	347	18	377	18	407	19	437	19	467	20	497	20
318	11	348	19	378	19	408	20	438	20	468	20	498	20
319	11	349	6	379	7	409	8	439	8	469	8	499	8
320	12	350	11	380	14	410	15	440	16	470	20	500	9
321	12	351	12	381	15	411	15	441	17	471	20	501	10
322	12	352	12	382	16	412	16	442	17	472	20	502	10
323	13	353	12	383	16	413	16	443	18	473	9	503	10
324	14	354	12	384	17	414	17	444	18	474	11	504	10
325	14	355	14	385	18	415	19	445	19	475	12	505	10
326	14	356	14	386	18	416	19	446	20	476	9	506	10
327	15	357	14	387	20	417	19	447	20	477	10	507	11
328	16	358	14	388	11	418	20	448	8	478	10	508	11
329	11	359	9	389	9	419	9	449	9	479	9	509	10
330	10	360	5	390	5	420	5	450	5	480	6	510	6
331	10	361	7	391	8	421	8	451	8	481	9	511	9

Результаты исследования ОДГ по категориям пассажирских поездов

На железной дороге используется классификация поездов по назначению, поэтому целесообразно провести анализ каждой категории поездов в отдельности:

1. скорые поезда круглогодичного следования, нумерация с 1 по 149 – выборка ω_4^{nacc} , включающая 333 наблюдений (65,2% от общего числа пассажирских поездов);
2. почтово-багажные поезда, нумерация с 900 по 969 – выборка ω_5^{nacc} , содержащая 46 поездов (9% выборки Ω_{nacc});
3. пригородные поезда, нумерация с 6001 по 7498 – выборка ω_6^{nacc} , в которой содержатся 261 наблюдения. Данная категория рассматривалась отдельно и не входит в основную выборку в табл. 6.1 Приложения.

Остальные категории поездов представлены в выборке недостаточно для проведения полноценного статистического анализа и не рассматриваются.

Сперва построены вариационные ряды ОДГ для категорий поездов.

Таблица 6.2. Интервальные вариационные ряды выборок ОДГ для категорий поездов

Выборка	$b_i - b_{i+1}$	-7 – -6	-6 – -5	-5 – -4	-4 – -3	-3 – -2	-2 – -1	-1 – 0	0 – 1	1 – 2	2 – 3	3 – 4	4 – 5
ω_4^{nacc}	n_i	1	3	8	20	43	58	78	73	28	15	4	2
ω_5^{nacc}	n_i	-	-	2	4	3	6	7	12	6	3	2	1
ω_6^{nacc}	n_i	-	-	-	-	-	-	-	182	58	10	1	0

где в строке $b_i - b_{i+1}$ содержатся границы интервалов, в n_i – частоты.

В результате статистического анализа для описания законов распределения ОДГ рассмотренных категорий подходит нормальное распределение. Для категории №3 – экспоненциальное распределение.

Таблица 6.3. Результаты анализа ОДГ для категорий поездов

Выборка	Закон распределения	Параметры		Промежуток времени (мин.)	
		a	σ	от	до
ω_4^{nacc}	Нормальный	-0,675	1,78	-7	4
ω_5^{nacc}	Нормальный	-0,2	2,21	-5	4
ω_6^{nacc}	Экспоненциальный	1,35	-	0	4

Затем построены вариационные ряды выборок ОДГ по модулю для категорий поездов.

Таблица 6.4. Интервальные вариационные ряды выборок ОДГ по модулю для категорий поездов

Выборка	$b_i - b_{i+1}$	0 – 1	1 – 2	2 – 3	3 – 4	4 – 5	5 – 6	6 – 7	7 – 8	8 – 9	9 – 10
$\omega_4^{пасс}$	n_i	73	106	73	46	21	7	5	1	1	0
$\omega_5^{пасс}$	n_i	11	13	8	4	4	2	1	1	1	1

По результатам анализа для описания законов распределения ОДГ в обеих категориях пригодно гамма-распределение.

Таблица 6.5. Результаты анализа ОДГ по модулю для категорий поездов

Выборка	Закон распределения	Параметры		Промежуток времени (мин.)	
		κ	θ	от	до
$\omega_4^{пасс}$	Гамма-распределение	1,795	1,326	0	9
$\omega_5^{пасс}$	Гамма-распределение	1,26	2,45	0	9

В результате проверки по критериям Пирсона и Колмогорова при уровне значимости $\alpha = 0,05$ нет оснований отвергнуть имеющиеся гипотезы. При этом определены параметры законов распределения ОДГ для каждой категории пассажирских поездов. Установлено, что отклонения от графика почтово-багажных и скорых поездов круглогодичного следования подчиняются нормальному распределению, отклонения по модулю для этих типов поездов подчиняются гамма-распределению.

Результаты исследования ОДГ грузовых поездов по категориям

Грузовые поезда имеют номера с 1001 по 3998, из которых выделены следующие категории:

1. специальные (ускоренные) грузовые поезда, нумерация с 1001 по 1798, в выборке ω_5^{zp} имеется 62 элемента (4% от общего числа грузовых поездов);
2. соединенные поезда, следующие на один и более диспетчерских участков, нумерация с 1801 по 1960, выборка ω_6^{zp} содержит 67 элементов (4,3% от общего числа);
3. сквозные поезда дальнего следования, нумерация с 2001 по 2998, выборка ω_7^{zp} включает 1255 элементов (79,9% от общего числа грузовых поездов);
4. сборные и передаточные составы, нумерация с 3001 по 3998, в выборке ω_8^{zp} имеется 186 элементов (11,8% от общего числа грузовых поездов).

Вариационные ряды выборок ОДГ по модулю для каждой категории поездов:

Таблица 6.6. Интервальные вариационные ряды выборок ОДГ по модулю для категорий грузовых поездов

ω_5^{zp}	$b_i - b_{i+1}$	0 – 120	120 – 240	240 – 360	360 – 480	480 – 600	600 – 720	720 – 840	840 – 960	-
	n_i	25	5	8	6	5	5	4	2	-
ω_6^{zp}	$b_i - b_{i+1}$	0 – 90	90 – 180	180 – 270	270 – 360	360 – 450	450 – 540	540 – 630	630 – 720	-
	n_i	31	15	8	4	2	2	2	1	-
ω_7^{zp}	$b_i - b_{i+1}$	0 – 120	120 – 240	240 – 360	360 – 480	480 – 600	600 – 720	720 – 840	840 – 960	-
	n_i	909	202	82	33	12	9	4	1	-
ω_8^{zp}	$b_i - b_{i+1}$	0 – 30	30 – 60	60 – 90	90 – 120	120 – 150	150 – 180	180 – 210	210 – 240	240 – 270
	n_i	122	17	12	12	7	4	3	3	1

где в строке $b_i - b_{i+1}$ содержатся границы интервалов, в n_i – частоты.

Таблица 6.7. Результаты анализа ОДГ по модулю для категорий грузовых поездов

Выборка	Закон распределения	Параметры		Промежуток времени (мин.)		x (%)	y (%)
		к	θ	от	до		
ω_5^{zp}	Гамма-распределение	0,605	643	0	960	4	16,1
ω_6^{zp}	Гамма-распределение	0,811	200,7	0	720	4,3	19,4
ω_7^{zp}	Гамма-распределение	0,523	189,4	0	960	79,9	41,3
ω_8^{zp}	Гамма-распределение	0,421	97,4	0	270	11,8	58

здесь x - доля от общего количества проследований грузовых ж/д составов, y – число поездов, следующих точно по графику.

В результате проверки по критериям Пирсона и Колмогорова при уровне значимости $\alpha = 0,05$ нет оснований отвергнуть имеющиеся гипотезы. Отклонение движения от графика для всех категорий грузовых поездов в основном подчиняется закону гамма-распределения, но с индивидуальными характеристиками. В целом для грузового транспорта в половине случаев характерны отклонения от ГДП более 30 мин.

Таблица 6.8. Выборочные совокупности t_1 и t_2

№	t_1	t_2	№	t_1	t_2	№	t_1	t_2	№	t_1	t_2
1	0:04	0:04	47	0:15	0:16	93	0:31	0:32	139	1:03	0:52
2	0:04	0:05	48	0:15	0:16	94	0:31	0:32	140	1:05	0:54
3	0:05	0:05	49	0:15	0:16	95	0:31	0:32	141	1:06	0:55
4	0:05	0:05	50	0:15	0:17	96	0:32	0:33	142	1:07	0:58
5	0:06	0:05	51	0:15	0:19	97	0:33	0:33	143	1:08	1:01
6	0:06	0:06	52	0:15	0:20	98	0:33	0:33	144	1:08	1:03
7	0:06	0:06	53	0:15	0:20	99	0:33	0:33	145	1:15	1:04
8	0:06	0:06	54	0:16	0:20	100	0:33	0:33	146	1:21	1:04
9	0:06	0:06	55	0:16	0:20	101	0:33	0:34	147	1:23	1:05
10	0:06	0:06	56	0:16	0:21	102	0:34	0:34	148	1:25	1:05
11	0:07	0:06	57	0:16	0:21	103	0:34	0:35	149	1:29	1:07
12	0:07	0:07	58	0:16	0:21	104	0:35	0:35	150	1:31	1:08
13	0:08	0:07	59	0:16	0:22	105	0:36	0:36	151	1:38	1:08
14	0:08	0:07	60	0:16	0:22	106	0:36	0:36	152	1:41	1:08
15	0:08	0:08	61	0:16	0:22	107	0:36	0:36	153	1:42	1:09
16	0:08	0:08	62	0:17	0:22	108	0:37	0:36	154	1:43	1:09
17	0:08	0:08	63	0:17	0:22	109	0:37	0:37	155	1:50	1:10
18	0:09	0:08	64	0:17	0:23	110	0:37	0:38	156	1:50	1:10
19	0:09	0:08	65	0:17	0:23	111	0:39	0:38	157	1:51	1:10
20	0:09	0:08	66	0:17	0:23	112	0:39	0:38	158	1:51	1:11
21	0:09	0:08	67	0:18	0:23	113	0:39	0:38	159	1:51	1:13
22	0:09	0:08	68	0:18	0:23	114	0:40	0:39	160	1:51	1:14
23	0:10	0:08	69	0:18	0:23	115	0:40	0:39	161	1:52	1:14
24	0:10	0:09	70	0:18	0:23	116	0:40	0:40	162	1:52	1:15
25	0:10	0:09	71	0:18	0:23	117	0:42	0:40	163	1:52	1:15
26	0:10	0:09	72	0:19	0:23	118	0:42	0:41	164	1:52	1:15
27	0:10	0:09	73	0:20	0:24	119	0:43	0:43	165	1:52	1:16
28	0:10	0:09	74	0:20	0:24	120	0:43	0:44	166	1:53	1:16
29	0:10	0:09	75	0:20	0:24	121	0:46	0:45	167	1:53	1:17
30	0:10	0:09	76	0:21	0:25	122	0:47	0:46	168	1:53	1:18
31	0:11	0:09	77	0:23	0:25	123	0:52	0:47	169	1:54	1:18
32	0:11	0:09	78	0:23	0:26	124	0:55	0:47	170	1:54	1:18
33	0:11	0:10	79	0:23	0:26	125	0:56	0:47	171	1:55	1:22
34	0:11	0:10	80	0:24	0:29	126	0:57	0:47	172	1:55	1:23
35	0:12	0:10	81	0:26	0:29	127	0:57	0:48	173	1:55	1:26
36	0:12	0:10	82	0:26	0:29	128	0:57	0:48	174	1:56	1:28
37	0:12	0:10	83	0:27	0:29	129	0:58	0:48	175	1:57	1:30
38	0:13	0:10	84	0:27	0:30	130	0:59	0:48	176	1:57	1:31
39	0:13	0:11	85	0:28	0:30	131	0:59	0:48	177	1:57	1:31
40	0:14	0:12	86	0:28	0:30	132	1:00	0:48	178	1:57	1:32
41	0:14	0:13	87	0:29	0:30	133	1:00	0:48	179	1:57	1:32
42	0:14	0:13	88	0:30	0:30	134	1:01	0:49	180	1:57	1:32
43	0:14	0:13	89	0:30	0:31	135	1:01	0:49	181	1:58	1:32
44	0:14	0:13	90	0:30	0:31	136	1:01	0:50	182	1:58	1:32
45	0:14	0:13	91	0:30	0:31	137	1:01	0:50	183	2:00	1:33
46	0:14	0:14	92	0:30	0:32	138	1:02	0:50	184	2:00	1:33

Таблица 6.8. Выборочные совокупности t_1 и t_2 (продолжение)

№	t_1	t_2	№	t_1	t_2	№	t_1	t_2
185	2	1:33	210	2:24	2:33	235	5:19	4:46
186	2:01	1:34	211	2:35	2:34	236	5:20	4:54
187	2:01	1:34	212	2:40	2:34	237	5:20	4:59
188	2:02	1:34	213	2:43	2:37	238	5:20	4:59
189	2:02	1:35	214	2:44	2:37	239	5:21	5:00
190	2:03	1:35	215	2:44	2:39	240	5:26	5:00
191	2:03	1:36	216	2:44	2:49	241	5:29	5:00
192	2:03	1:36	217	2:45	3:18	242	5:30	5:01
193	2:04	1:36	218	2:46	3:20	243	5:31	5:01
194	2:05	1:36	219	2:46	3:21	244	5:53	5:02
195	2:06	1:36	220	2:48	3:21	245	5:57	5:02
196	2:06	1:36	221	2:49	3:21	246	6:01	5:02
197	2:07	1:37	222	2:51	3:22	247	8:01	5:03
198	2:07	1:37	223	2:53	3:23	248	8:06	5:03
199	2:07	1:38	224	3:11	3:26	249	8:07	5:03
200	2:07	1:38	225	3:13	3:37	250	8:08	5:04
201	2:08	1:40	226	4:50	3:56	251	8:12	5:14
202	2:08	1:44	227	4:52	3:59	252	8:45	5:42
203	2:08	1:44	228	4:53	4:02	253	11:51	5:42
204	2:09	1:45	229	4:56	4:08	254	12:12	5:43
205	2:09	1:45	230	5:00	4:19	255		5:48
206	2:10	2:05	231	5:00	4:20	256		5:48
207	2:18	2:05	232	5:01	4:21	257		6:11
208	2:19	2:25	233	5:16	4:21	258		
209	2:20	2:32	234	5:17	4:29	259		

Таблица 6.9. Выборочные совокупности t_3 и t_4

№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4
1	1	1	47	7	7	93	8	9	139	9	10	185	10	12
2	2	1	48	7	7	94	8	9	140	9	10	186	10	12
3	2	1	49	7	7	95	8	9	141	9	10	187	10	12
4	3	1	50	7	7	96	8	9	142	9	10	188	10	12
5	4	2	51	7	7	97	8	9	143	9	10	189	10	12
6	4	2	52	7	7	98	8	9	144	9	10	190	10	12
7	4	2	53	7	7	99	8	9	145	9	11	191	10	12
8	4	2	54	7	7	100	8	9	146	9	11	192	10	12
9	4	2	55	7	7	101	8	9	147	9	11	193	10	12
10	5	2	56	7	8	102	8	9	148	9	11	194	10	12
11	5	3	57	7	8	103	8	9	149	9	11	195	10	12
12	5	3	58	7	8	104	8	9	150	9	11	196	10	12
13	5	4	59	7	8	105	8	9	151	9	11	197	10	12
14	5	4	60	7	8	106	8	9	152	9	11	198	10	12
15	5	4	61	7	8	107	8	9	153	9	11	199	10	12
16	6	4	62	7	8	108	8	9	154	9	11	200	10	12
17	6	4	63	7	8	109	8	9	155	9	11	201	10	12
18	6	4	64	7	8	110	8	9	156	9	11	202	10	12
19	6	4	65	7	8	111	8	9	157	9	11	203	10	12
20	6	4	66	7	8	112	8	9	158	9	11	204	11	12
21	6	4	67	8	8	113	8	9	159	9	11	205	11	12
22	6	4	68	8	8	114	8	9	160	9	11	206	11	12
23	6	5	69	8	8	115	8	9	161	9	11	207	11	12
24	6	5	70	8	8	116	8	9	162	9	11	208	11	12
25	6	5	71	8	8	117	8	9	163	9	11	209	11	12
26	6	5	72	8	8	118	8	9	164	9	11	210	11	12
27	6	5	73	8	8	119	8	9	165	9	11	211	11	12
28	6	5	74	8	8	120	8	9	166	9	11	212	11	12
29	6	5	75	8	8	121	9	9	167	9	11	213	11	12
30	7	5	76	8	8	122	9	9	168	9	11	214	11	12
31	7	5	77	8	8	123	9	9	169	9	11	215	11	12
32	7	6	78	8	8	124	9	10	170	9	11	216	11	12
33	7	6	79	8	8	125	9	10	171	9	11	217	11	12
34	7	6	80	8	8	126	9	10	172	10	11	218	11	12
35	7	6	81	8	8	127	9	10	173	10	11	219	11	12
36	7	6	82	8	8	128	9	10	174	10	11	220	11	12
37	7	7	83	8	8	129	9	10	175	10	11	221	11	12
38	7	7	84	8	8	130	9	10	176	10	11	222	11	12
39	7	7	85	8	8	131	9	10	177	10	11	223	11	13
40	7	7	86	8	8	132	9	10	178	10	11	224	11	13
41	7	7	87	8	8	133	9	10	179	10	11	225	11	13
42	7	7	88	8	9	134	9	10	180	10	11	226	11	13
43	7	7	89	8	9	135	9	10	181	10	11	227	11	13
44	7	7	90	8	9	136	9	10	182	10	11	228	11	13
45	7	7	91	8	9	137	9	10	183	10	11	229	11	13
46	7	7	92	8	9	138	9	10	184	10	11	230	11	13

Таблица 6.9. Выборочные совокупности t_3 и t_4 (продолжение)

№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4
231	7	7	283	8	9	335	9	10	387	10	11	439	11	13
232	7	7	284	8	9	336	9	10	388	10	12	440	11	13
233	7	7	285	8	9	337	9	10	389	10	12	441	11	13
234	11	13	286	13	14	338	16	16	390	19	19	442	23	22
235	11	13	287	13	14	339	16	16	391	19	19	443	23	22
236	11	13	288	13	14	340	16	16	392	19	19	444	23	22
237	11	13	289	13	15	341	16	16	393	19	19	445	23	22
238	12	13	290	14	15	342	16	16	394	19	19	446	23	22
239	12	13	291	14	15	343	16	17	395	19	19	447	23	22
240	12	13	292	14	15	344	16	17	396	19	19	448	23	22
241	12	13	293	14	15	345	17	17	397	19	19	449	23	22
242	12	13	294	14	15	346	17	17	398	19	19	450	23	22
243	12	13	295	14	15	347	17	17	399	19	19	451	23	22
244	12	13	296	14	15	348	17	17	400	19	19	452	23	22
245	12	13	297	14	15	349	17	17	401	19	19	453	24	22
246	12	13	298	14	15	350	17	17	402	20	19	454	24	23
247	12	13	299	14	15	351	17	17	403	20	19	455	24	23
248	12	13	300	14	15	352	17	17	404	20	19	456	24	23
249	12	13	301	14	15	353	17	17	405	20	19	457	24	23
250	12	14	302	14	15	354	17	17	406	20	19	458	24	23
251	12	14	303	14	15	355	17	17	407	20	19	459	24	23
252	12	14	304	14	15	356	17	17	408	20	20	460	25	23
253	12	14	305	14	15	357	17	17	409	20	20	461	25	23
254	12	14	306	14	15	358	17	17	410	20	20	462	25	23
255	12	14	307	14	15	359	17	17	411	20	20	463	25	23
256	12	14	308	14	15	360	17	17	412	20	20	464	25	23
257	12	14	309	15	15	361	17	17	413	20	20	465	25	23
258	12	14	310	15	15	362	17	17	414	20	20	466	25	23
259	12	14	311	15	15	363	18	17	415	21	20	467	25	23
260	12	14	312	15	15	364	18	18	416	21	20	468	26	23
261	12	14	313	15	15	365	18	18	417	21	20	469	26	24
262	12	14	314	15	15	366	18	18	418	21	20	470	26	24
263	12	14	315	15	15	367	18	18	419	21	20	471	26	24
264	12	14	316	15	15	368	18	18	420	21	20	472	26	24
265	12	14	317	15	16	369	18	18	421	21	20	473	27	24
266	12	14	318	15	16	370	18	18	422	21	20	474	27	24
267	12	14	319	15	16	371	18	18	423	21	20	475	27	24
268	12	14	320	15	16	372	18	18	424	22	21	476	27	24
269	13	14	321	16	16	373	18	18	425	22	21	477	27	24
270	13	14	322	16	16	374	18	18	426	22	21	478	27	24
271	13	14	323	16	16	375	18	18	427	22	21	479	27	24
272	13	14	324	16	16	376	18	18	428	22	21	480	27	24
273	13	14	325	16	16	377	18	18	429	22	21	481	27	24
274	13	14	326	16	16	378	18	18	430	22	21	482	28	25
275	13	14	327	16	16	379	18	18	431	22	21	483	28	25
276	13	14	328	16	16	380	18	18	432	22	21	484	28	25
277	13	14	329	16	16	381	18	18	433	23	21	485	28	25
278	13	14	330	16	16	382	18	18	434	23	21	486	29	25

Таблица 6.9. Выборочные совокупности t_3 и t_4 (продолжение)

№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4
279	13	14	331	16	16	383	18	18	435	23	21	487	29	25
280	13	14	332	16	16	384	18	18	436	23	21	488	29	26
281	13	14	333	16	16	385	18	18	437	23	21	489	29	26
282	13	14	334	16	16	386	19	19	438	23	22	490	29	26
490	30	26	539	38	29	588	47	38	637	57	47	686	77	57
491	30	26	540	38	29	589	47	38	638	58	47	687	79	57
492	30	26	541	38	29	590	48	38	639	58	48	688	79	57
493	30	26	542	38	30	591	48	38	640	58	48	689	79	57
494	30	26	543	38	30	592	48	39	641	58	48	690	80	58
495	30	26	544	39	30	593	48	39	642	59	48	691	81	58
496	30	26	545	39	30	594	49	39	643	59	48	692	81	58
497	31	26	546	39	30	595	49	39	644	59	48	693	82	59
498	31	26	547	39	30	596	49	39	645	59	48	694	82	59
499	31	26	548	39	30	597	49	39	646	59	48	695	84	61
500	31	26	549	39	30	598	49	40	647	60	49	696	86	61
501	31	26	550	40	31	599	49	40	648	60	49	697	86	61
502	31	26	551	40	31	600	50	40	649	61	49	698	86	61
503	32	26	552	40	31	601	50	40	650	61	49	699	87	61
504	32	26	553	40	31	602	50	40	651	61	49	700	91	61
505	32	26	554	41	31	603	50	40	652	62	49	701	91	61
506	32	26	555	41	32	604	51	41	653	62	50	702	91	62
507	32	27	556	41	32	605	51	41	654	63	50	703	92	62
508	33	27	557	41	32	606	51	41	655	63	50	704	93	62
509	33	27	558	42	32	607	51	41	656	63	51	705	94	63
510	33	27	559	42	33	608	51	41	657	64	52	706	95	63
511	33	27	560	42	33	609	51	41	658	64	52	707	96	63
512	34	27	561	42	33	610	51	42	659	64	52	708	97	63
513	34	27	562	42	33	611	52	42	660	64	52	709	97	64
514	34	27	563	42	34	612	52	42	661	65	52	710	98	64
515	34	27	564	42	34	613	52	42	662	65	53	711	98	65
516	34	27	565	42	34	614	52	42	663	65	53	712	101	65
517	35	27	566	42	34	615	53	42	664	65	53	713	103	68
518	35	27	567	43	34	616	53	42	665	67	53	714	104	68
519	35	27	568	43	34	617	53	42	666	67	53	715	105	69
520	35	27	569	43	34	618	53	43	667	68	54	716	108	69
521	35	27	570	44	34	619	53	43	668	68	54	717	111	69
522	35	27	571	44	35	620	53	43	669	68	54	718	111	69
523	35	27	572	44	35	621	53	43	670	68	54	719	111	70
524	35	28	573	44	35	622	53	43	671	68	54	720	113	70
525	35	28	574	44	35	623	54	43	672	68	54	721	115	71
526	36	28	575	45	35	624	54	43	673	70	54	722	118	71
527	36	28	576	45	36	625	54	43	674	70	55	723	119	71
528	36	28	577	46	36	626	55	44	675	71	55	724	120	72
529	36	28	578	46	36	627	55	45	676	72	55	725	121	72
530	36	28	579	46	36	628	55	45	677	72	55	726	121	72
531	37	28	580	46	36	629	55	45	678	73	55	727	121	73
532	37	28	581	46	37	630	55	45	679	73	55	728	122	73
533	37	28	582	46	37	631	55	45	680	73	55	729	123	73

Таблица 6.9. Выборочные совокупности t_3 и t_4 (продолжение)

№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4	№	t_3	t_4
534	37	28	583	46	37	632	55	45	681	74	55	730	124	73
535	37	29	584	47	37	633	56	46	682	74	55	731	128	73
536	37	29	585	47	37	634	57	46	683	75	56	732	130	73
537	37	29	586	47	38	635	57	46	684	76	56	733	130	74
538	38	29	587	47	38	636	57	46	685	77	56	734	131	75
735	138	75	748	187	79	761		89	774		102	787		127
736	138	75	749	190	80	762		90	775		103	788		140
737	142	75	750	190	80	763		90	776		104	789		141
738	145	75	751	212	81	764		91	777		104	790		143
739	147	76	752	870	82	765		91	778		104	791		144
740	147	76	753		82	766		93	779		106	792		156
741	149	76	754		83	767		94	780		107	793		195
742	156	76	755		83	768		95	781		110	794		219
743	160	76	756		85	769		97	782		110	795		221
744	162	78	757		86	770		97	783		113	796		760
745	171	79	758		86	771		98	784		116			
746	174	79	759		87	772		101	785		116			
747	184	79	760		88	773		102	786		116			

Таблица 6.10. Матрицы интенсивностей ВМАР-потока, которые описывают входящий вагонопоток

$D_0 = \begin{pmatrix} -1,61 & 0 \\ 0 & -1,61 \end{pmatrix}$	$D_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, i = \overline{1,4}$	$D_5 = \begin{pmatrix} 0,020 & 0,007 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$D_6 = \begin{pmatrix} 0,032 & 0,0012 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$D_7 = \begin{pmatrix} 0,047 & 0,017 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$D_8 = \begin{pmatrix} 0,064 & 0,024 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$D_9 = \begin{pmatrix} 0,085 & 0,031 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$D_{10} = \begin{pmatrix} 0,101 & 0,037 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$D_{11} = \begin{pmatrix} 0,116 & 0,043 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$D_{12} = \begin{pmatrix} 0,123 & 0,046 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$D_{13} = \begin{pmatrix} 0,129 & 0,048 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$D_{14} = \begin{pmatrix} 0,129 & 0,048 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$D_{15} = \begin{pmatrix} 0,096 & 0,036 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$D_{16} = \begin{pmatrix} 0,085 & 0,031 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$D_{17} = \begin{pmatrix} 0,060 & 0,022 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$D_{18} = \begin{pmatrix} 0,042 & 0,016 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$D_{19} = \begin{pmatrix} 0,028 & 0,010 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$D_{20} = \begin{pmatrix} 0,018 & 0,007 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$D_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, i = \overline{21,60}$	$D_{61} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,017 & 0,006 \end{pmatrix}$	$D_{62} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,024 & 0,009 \end{pmatrix}$
$D_{63} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,032 & 0,0012 \end{pmatrix}$	$D_{64} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,040 & 0,015 \end{pmatrix}$	$D_{65} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,048 & 0,018 \end{pmatrix}$
$D_{66} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,056 & 0,021 \end{pmatrix}$	$D_{67} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,151 & 0,056 \end{pmatrix}$	$D_{68} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,178 & 0,066 \end{pmatrix}$
$D_{69} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,095 & 0,035 \end{pmatrix}$	$D_{70} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,133 & 0,049 \end{pmatrix}$	$D_{71} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,087 & 0,032 \end{pmatrix}$
$D_{72} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,072 & 0,027 \end{pmatrix}$	$D_{73} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,066 & 0,024 \end{pmatrix}$	$D_{74} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,050 & 0,019 \end{pmatrix}$
$D_{75} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,042 & 0,016 \end{pmatrix}$	$D_{76} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,033 & 0,012 \end{pmatrix}$	$D_{77} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,024 & 0,009 \end{pmatrix}$
$D_{78} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,017 & 0,006 \end{pmatrix}$	$D_{79} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,010 & 0,004 \end{pmatrix}$	$D(1) = \begin{pmatrix} -0,435 & 0,435 \\ 1,175 & -1,175 \end{pmatrix}$
$D'(1) = \begin{pmatrix} 1,175 & 0,435 \\ 1,175 & 0,435 \end{pmatrix}$		

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2016663545

**Программный комплекс для моделирования и расчетов
параметров систем массового обслуживания**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт динамики систем и теории
управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения
Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН) (RU)*

Авторы: *Жарков Максим Леонидович (RU),
Казаков Александр Леонидович (RU)*

Заявка № 2016661187

Дата поступления 24 октября 2016 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 12 декабря 2016 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев





УТВЕРЖДАЮ
Ректор ИрГУПС,

д.т.н., профессор С.К. Каргапольцев

« 17 » 10 2019 г.

**Акт о внедрении программного продукта
«Программный комплекс для моделирования и расчетов систем массового
обслуживания»**

(авторы М.Л. Жарков, А.Л. Казаков)

Комиссия в составе: Р.Ю. Упырь, к.т.н., зав. кафедрой «Управление эксплуатационной работой», Г.И. Суханов, к.т.н., профессор кафедры «Управление эксплуатационной работой», А.В. Дудакова, к.т.н., доцент кафедры «Управление эксплуатационной работой», составила настоящий акт о том, что программный продукт «Программный комплекс для моделирования и расчетов систем массового обслуживания», авторами которого являются Максим Леонидович Жарков и Александр Леонидович Казаков, внедрен в учебный процесс и использован в научных исследованиях аспирантов на кафедре «Управление эксплуатационной работой» ИрГУПС.

Применение «Программного комплекса для моделирования и расчетов параметров систем массового обслуживания» (Свидетельство о государственной регистрации № 201663545 от 24 октября 2016 г.) позволяет решать задачи определения стационарных вероятностей и показателей эффективности систем массового обслуживания (СМО), нахождения функциональных характеристик моделируемых микрологистических транспортных систем, а также проводить многовариантные сценарные расчеты.

Заявленные характеристики системы предполагают наличие следующих основных возможностей:

- генерирование набора случайных величин по заданным параметрам;
- проверки выборки случайных величин на соответствие наиболее распространенным законам распределения, а также уточнение параметров выбранного закона распределения с помощью метода покоординатного спуска по комбинированному критерию, который основан на критериях Пирсона и Колмогорова-Смирнова;
- генерирование потоков заявок: простейшего потока, пуассоновского неординарного потока, *ВМАР*-потока;
- моделирование работы многофазных СМО с конечными очередями и групповым поступлением заявок;
- отображение процесса работы СМО в графическом виде;
- определение стационарных вероятностей состояний и показателей эффективности моделируемых СМО.

В ходе эксплуатации программного комплекса подтверждено, что он обладает всеми заявленными возможностями.

Программный комплекс имеет удобный и интуитивно понятный интерфейс, предназначен для исследователей, аспирантов и магистрантов, научные интересы которых лежат в области изучения транспортно-логистической инфраструктуры и теории массового обслуживания, а также студентам при изучении соответствующих дисциплин.

Председатель комиссии



Р.Ю. Упырь

Члены комиссии




Г.И. Суханов

А.В. Дудакова