Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Иркутский национальный исследовательский
технический университет»

На правах рукописи



Зыонг Ван Лам

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ СКАНИРОВАНИЯ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Пыхалов Анатолий Александрович

Иркутск – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 6
ГЛАВА 1 ОБЗОР СОСТОЯНИЯ ВОПРОСА, АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 13
1.1 Современное состояние вопросов математического моделирования интерпретации цифровых (растровых) изображений сканирования деформируемых твердых тел для построения и анализа их конечно-элементных моделей 14
1.2 Анализ проблем математического моделирования интерпретации растровых изображений сканирования деформируемых твердых тел для построения и анализа их конечно-элементных моделей 19
1.3 Постановка задачи разработки математических моделей интерпретации растровых изображений сканирования деформируемых твердых тел для построения и анализа их конечно-элементных моделей 22
1.4 Выводы по главе 26
ГЛАВА 2 ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЬТАТОВ СКАНИРОВАНИЯ И ДАННЫХ НАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ 27
2.1 Основные математические зависимости аналитической геометрии и линейной алгебры интерпретации растровых изображений сканирования для построения индивидуальной геометрии 27
2.1.1 Формирование результатов сканирования 28
2.1.2 Построение предварительной геометрии сечения 34
2.1.3 Метод исследования изменения градиента индексов цвета 40
2.1.4 Выбор опорных пикселей для векторизации геометрии сечения 44
2.1.5 Векторизация геометрии сечения в системе проектирования 48
2.1.6 Корректировка положения центра тяжести сечений 50

2.2 Основные математические зависимости для моделирования неоднородности механических характеристик материала реальных деформируемых твердых тел 51
2.2.1 Экспериментальные значения механических характеристик 52
2.2.2 Определение среднего значения индекса цвета сечения 54
2.2.3 Определение математического ожидания индексов цвета 55
2.2.4 Определение зависимости механических характеристик от значений индексов цвета 56
2.2.5 Определение индекса цвета в узлах конечных элементов 61
2.2.6 Определение механических характеристик материала в конечных элементах 68
2.3 Основные зависимости метода конечных элементов с использованием вариационно-энергетического принципа метода перемещений теории упругости для анализа напряженно-деформированного состояния деформируемых твердых тел 68
2.4 Разработка математических моделей конечных элементов, используемых для анализа объемного напряженно-деформированного состояния сканируемых деформируемых твердых тел 72
2.4.1 Конечные элементы типа гексаэдр и тетраэдр 72
2.4.2 Конечные элементы с использованием несовместных функций формы 81
2.4.3 Контактный конечный элемент для анализа взаимодействия деформируемых твердых тел 85
2.5 Выводы по главе 90
ГЛАВА 3 АЛГОРИТМ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ СКАНИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ 91
3.1 Общий алгоритм (комплекс модулей) программной реализации интерпретации растровых изображений сканирования 91

3.2 Работа отдельных модулей общего алгоритма программной реализации интерпретации растровых изображений сканирования 98
3.2.1 Модуль построения геометрии внешних контуров и внутренней структуры деформируемых твердых тел 98
3.2.2 Модуль генерации сетки конечно-элементных моделей деформируемых твердых тел 109
3.2.3 Модуль определения неоднородности механических характеристик материала в узлах и конечных элементах 117
- Определение значений индексов цвета в узлах конечных элементов на основе интерполяции 118
- Определение зависимости модуля упругости от индексов цвета 121
- Определение неоднородности механических характеристик материала в узлах и конечных элементах в конечно-элементных моделях деформируемых твердых тел 123
3.2.4 Генерация внешних нагрузок, граничных условий и условий контактного взаимодействия в конечно-элементных моделях деформируемых твердых тел 129
3.2.5 Анализ напряженно-деформированного состояния конечно-элементных моделей деформируемых твердых тел 131
3.3 Выводы по главе 132
ГЛАВА 4 АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ-СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ 133
4.1 Построение и анализ конечно-элементных моделей стандартных образцов прямоугольной формы (без контакта) 133
4.2 Построение и анализ конечно-элементных моделей стандартных образцов прямоугольной формы с решением контактной задачи 137
4.3 Построение и анализ конечно-элементных моделей реальных образцов в виде фрагмента бедренной кости человека 140
4.4 Выводы по главе 144

ГЛАВА 5 ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ РЕАЛЬНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С НЕОДНОРОДНОСТЬЮ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА И ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ 145

5.1 Построение и анализ напряженно-деформированного состояния конечно-элементной модели фрагмента средней части бедренной кости человека ... 146

5.2 Построение и анализ напряженно-деформированного состояния конечно-элементных моделей зубов человека при их работе 151

5.3 Построение и анализ напряженно-деформированного состояния конечно-элементных моделей зубов с дефектом и установкой пломбы из композитного материала 157

5.4 Выводы по главе 160

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 161

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 162

ПРИЛОЖЕНИЯ 179

Приложение А. Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ 179

Приложение Б. Акт о внедрении результатов 180

Приложение В. Сертификаты 182

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Важную роль при математическом моделировании реальных деформируемых твердых тел (ДТТ) на основе численных методов, в частности, на основе высокоэффективного метода конечных элементов (МКЭ), играет уровень точности задаваемых в нем параметров, главными из которых являются механические характеристики материала и индивидуальность геометрии.

Традиционно механические характеристики реального ДТТ задаются в виде усредненного значения, например, общего для материала детали и полученного при испытании стандартных образцов. До недавнего времени такой подход был вполне приемлем. Однако, с развитием ряда технологий, таких, например, как применение композитных материалов, сварные соединения и другие, возрос уровень требований к математическому моделированию в них изменения механических характеристик. То есть, от того насколько точно они заданы в математической модели ДТТ зависит достоверность информации о том, какой уровень надежности и долговечности закладывается в изделие в целом.

Широкий диапазон изменений структуры материала и геометрии изделий (деформируемых твердых тел) определяется технологическими аспектами их изготовления, условиями работы, длительностью эксплуатации и другими факторами. Ещё более сложный характер представленных изменений имеют ДТТ из материала природного происхождения: дерева, горной породы, бетонов, костной ткани и др. Математическая конечно-элементная (КЭ) этих объектов не может считаться эффективной без идентификации в них реального изменения механических характеристик, а также индивидуальной геометрии.

Для решения представленной проблемы в рассматриваемой работе предлагается использовать технологию сканирования деформируемых твердых тел, которая дает возможность распознавания в них изменения механических характеристик материала и геометрии, а главное, применять эти данные для повышения точности и реалистичности при математическом конечно-элементном моделировании реальных ДТТ.

На пути реализации представленного подхода существует ряд проблем, связанных, например, с тем, что плотность сканируемых материалов не тождественна их механическим характеристикам; в результате сканирования, для достаточно точной идентификации реального ДТТ в КЭ модели, требуется использовать чрезвычайно большой объем данных (информации); математическое моделирование идентификации реального ДТТ должно быть применимо для *любых физических принципов сканирования*, таких как рентгеновский, ультразвуковой и др., а также для *любых типов материалов*, когда, полученная в результате сканирования, информация сформирована в виде цифрового (растрового) изображения.

Данная работа направлена на решение этих проблем, то есть, на разработку специальных математических методов интерпретации результатов сканирования ДТТ и их алгоритмизации, без которых невозможно получить достоверную картину изменения представленных параметров.

В качестве примера исследуемого ДТТ в работе используется анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) костной ткани человека, в виде фрагмента его бедренной кости, зубов в челюсти и зубов с композитной пломбой. Представленный выбор ДТТ *не принципиален*, но обусловлен двумя важными обстоятельствами. Первое из них определяется высокой степенью неоднородности материала кости и индивидуальностью её геометрии. Вторым обстоятельством является высокий уровень развития технологии и качества сканирования компьютерным томографом (КТ) в медицине и технике. Также, необходимо отметить, что костная ткань человека хорошо изучена на практике, что способствует высокому уровню контроля правильности (достоверности) её математического моделирования.

Таким образом, разработка технологии математического моделирования и ее компьютерной реализации для интерпретации результатов сканирования ДТТ, позволяющих идентифицировать в них поле изменения механических характеристик материала и геометрии, и их использование при конечно-элементном моделировании, является актуальной научной задачей.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются ДТТ с неоднородной структурой механических характеристик и индивидуальными па-

раметрами геометрии, и, в частности, ДТТ природного происхождения. Предмет исследования – разработка численного метода математического конечно-элементного моделирования неоднородности структуры механических характеристик и индивидуальности геометрии ДТТ с использованием их КТ сканирования, и получение на этой основе картины НДС рассматриваемых объектов.

Целью исследования является разработка математических методов моделирования, вычислительных алгоритмов и комплексов проблемно-ориентированных программ, предназначенных для интерпретации результатов сканирования ДТТ, в виде структуры механических характеристик и геометрии, с последующим использованием этих данных при построении и анализе НДС их КЭ моделей.

Для достижения представленной цели исследования в настоящей работе решаются следующие **задачи**:

1. Отработка входных данных и настройка КТ при проведении сканирования исследуемого ДТТ, а также предварительная обработка её результатов в виде оценки степени неоднородности механических характеристик материала и индивидуальности геометрии (поверхностей, внутренних структур и др.).

2. Разработка комплекса математических методов и алгоритмов интерпретации результатов сканирования ДТТ для построения их индивидуальной геометрии, которая включает в себя: определение внешних контуров сечений и контуров внутренней структуры материала.

3. Разработка методов математического моделирования интерпретации неоднородности механических характеристик материала ДТТ, построенных на основе сканирования и результатов натурных испытаний образцов материала, с использованием этих данных при построении и анализе НДС КЭ моделей.

4. Исследование точности сходимости численного решения МКЭ в анализе НДС КЭ моделей реальных стандартных образцов из костной ткани, построенных на основе разработанного подхода моделирования неоднородности механических характеристик материала и данных натурных испытаний.

5. Проведение численного эксперимента на реальных ДТТ природного происхождения по исследованию влияния в них структуры материала, особенностей

геометрии, действующей внешней нагрузки и граничных условий, в частности, с применением решения контактной задачи теории упругости для анализа взаимодействия деформируемых твердых тел.

Методы исследования. В работе использовано математическое моделирование реальных ДТТ на основе аналитической геометрии, линейной алгебры и статистических методов, а также численного решения МКЭ. Для получения пиксельной характеристики сканирования ДТТ использовались технологии компьютерного томографа. При моделировании неоднородности механических характеристик использовался комплекс методов интерполяции, а также специальные сплайн-функции аналитической зависимости между пиксельной характеристикой сканирования ДТТ и его механическими характеристиками. Для программной реализации использованы среды алгоритмических языков FORTRAN, Visual Basic, PATRAN Command Language. Для построения и проведения анализа НДС КЭ моделей ДТТ использовано подключение программных комплексов: AutoCAD, NX Unigraphic, MSC Patran, Nastran и Marc.

Тематика работы соответствует следующим пунктам паспорта специальности 05.13.18: п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений»; п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента»; п. 6 «Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов на основе данных натурного эксперимента»; п. 7 «Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурного эксперимента на основе его математической модели».

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Разработан комплекс методов математического моделирования индивидуальной геометрии реальных деформируемых твердых тел (ДТТ), как для внешнего контура, так и контуров внутренней структуры материала, а также неоднородности их механических характеристик.

2. Разработан численный метод интерпретации механических характеристик материала ДТТ относительно пиксельной характеристики растровых изображений

сканирования и результатов натурных испытаний стандартных образцов, с последующим использованием этих данных при построении и анализе КЭ моделей реальных деформируемых твердых тел.

3. На основе комплекса расчетов точности и сходимости численного решения МКЭ, а также расчетов НДС реальных ДТТ природного происхождения, доказано, что свойство неоднородности их механических характеристик в КЭ модели может быть представлено набором конечных элементов, каждый из которых имеет изотропный материал со своим модулем упругости, а неоднородный (анизотропный) характер материала ДТТ в КЭ модели в целом определяется набором этих конечных элементов.

4. На основе разработанных математических методов моделирования создан комплекс программ интерпретации результатов сканирования, предназначенный для построения и анализа НДС КЭ моделей, с учетом реального изменения структуры механических характеристик деформируемого твердого тела и его геометрии; включая, методы повышения эффективности вычислительного процесса по времени и ресурсам.

Теоретической значимостью результатов диссертационной работы является математическое моделирование с разработкой численных методов и комплексов программ для построения КЭ моделей ДТТ с неоднородностью механических характеристик материала и индивидуальной геометрией на основе интерпретации результатов их сканирования КТ и данных натурных испытаний.

Достоверность результатов, полученных в ходе работы, определяется построением КЭ моделей и проведением анализа НДС стандартных образцов и реальных ДТТ, с исследованием точности и сходимости численного решения МКЭ, учетом неоднородности структуры механических характеристик и индивидуальности геометрии, при воздействии внешней нагрузки; полученные теоретические результаты согласуются на высоком уровне точности с известными результатами натурных испытаний.

Практическая значимость и внедрение работы. Предложенный комплекс математических методов моделирования и созданный пакет программ, позволяют

определить в ДТТ неоднородность структуры механических характеристик и индивидуальность геометрии, с дальнейшим использованием этих данных для повышения уровня реалистичности их КЭ моделирования и достоверности анализа НДС.

Представленный в работе комплекс математических методов моделирования может быть использован для любых типов материалов и физических принципов сканирования, когда полученная информация сформирована в виде цифрового изображения.

По результатам исследования получен акт о внедрении результатов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Установлена и доказана прямая зависимость между цветовой характеристикой пикселя и структурой механических характеристик ДТТ. Принцип основан на двух составляющих: использовании результатов сканирования ДТТ и осредненных опытных данных, полученных в натурных испытаниях стандартных образцов.

2. Установлено, что построение КЭ модели относительно реального ДТТ, проводимое на основе сканирования последнего, для их идентификации, невозможно без разработки и применения специальных математических методов моделирования неоднородности механических характеристик и индивидуальности геометрии объекта.

3. Разработана технология исследования, от получения результатов сканирования ДТТ, до построения и анализа его КЭ модели с учетом неоднородности механических характеристик материала и индивидуальности геометрии. На основе этой технологии создан комплекс программ и его интерфейс.

4. На основе специального исследования точности и сходимости численного решения МКЭ доказана эффективность моделирования свойства неоднородности механических характеристик материала и геометрии ДТТ на основе сканирования и данных натурного эксперимента. Установлено, что эта неоднородность может быть представлена набором конечных элементов, составляющих КЭ модель, в каждом из которых используется изотропная структура материала со своим модулем упругости.

5. Комплекс проведенных вычислительных экспериментов анализа НДС КЭ моделей реальных ДТТ природного происхождения показывает в них высокий

уровень достоверности изменения полей напряжений, деформаций и других параметров, чем доказывается эффективность использования представленной технологии математического моделирования в условиях проектирования и производства (контроля) изделий.

Апробация результатов исследования. Работа выполнялась на кафедре «Теоретическая механика и сопротивление материалов» ИРНИТУ. Основные результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях: международная научно-практическая конференция «Транспортная инфраструктура Сибирского региона» (г. Иркутск, 2015, 2016, 2017, 2018); V и VI научно-практическая конференция «Молодежь. Проекты. Идеи» (Иркутский авиационный завод – ИАЗ, финал ПАО, г. Иркутск, 2015, 2017); всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых (г. Иркутск, 2015); всероссийская научно-практическая конференция «Авиамашиностроение и транспорт Сибири» (г. Иркутск, 2016); VII всероссийская научно-техническая конференция с международным участием «Жизненный цикл конструкционных материалов» (г. Иркутск, 2017); II Российская научно-практическая конференция "Инженерные технологии MSC Software для высших учебных заведений" (MSC-ВУЗ-2016), (г. Москва, 2016); XX Российский форум «Компьютерные системы инженерного анализа MSC Software» (г. Москва, Измайлово, 2017); X региональная научно-практическая конференция «Инновационные технологии в практической стоматологии» (г. Иркутск, 2018).

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 17 научных работах, из них 4 статьи в изданиях, входящих в перечень ВАК; 1 статья в издании, входящем в базу данных *Scopus*. Получены 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад. Все выносимые на защиту результаты получены лично автором или при его непосредственном участии.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы из 167 наименований, и приложения. Объем работы составляет 182 страницы, 93 рисунка и 22 таблицы.

ГЛАВА 1 ОБЗОР СОСТОЯНИЯ ВОПРОСА, АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В главе представлен обзор состояния вопроса, связанного с решением проблемы математического моделирования интерпретации результатов сканирования деформируемых твердых тел (ДТТ), в виде цифровых (растровых) изображений, используемых при построении их конечно-элементных (КЭ) моделей и анализе напряжено-деформированного состояния (НДС). Представлено хронологическое развитие данного научного направления, решаемые проблемы, а также достоинства и недостатки предлагаемых подходов в математическом моделировании и алгоритмизации интерпретации результатов сканирования.

Обзор состояния вопроса и анализ проблем, связанных с моделированием неоднородности структуры материала и геометрии ДТТ на основе сканирования показывает, что это научное направление, в начальной стадии своего развития, и в последующем, связано, в большинстве своем, с изучением костной ткани человека. На современном этапе эта технология все больше развивается в направлении применения и к другим типам структур материала ДТТ, например изделиям из композитного материала. Перспективным считается их применение при изучении сварных металлических швов, когда в качестве физического принципа сканирования используется ультразвуковая волна.

Учитывая сказанное выше, в настоящей главе, в обзоре состояния вопроса и анализе проблем представлены работы связанные с изучением костной ткани, а также изделий из композитного материала.

Представленное обстоятельство объясняется двумя основными причинами:

- высокой степенью неоднородности структуры кости и индивидуальностью её геометрии, а также структурой материала изделий из композитных материалов;

- интенсивным и эффективным развитием технологии и качества сканирования компьютерным томографом (КТ) в медицине и технике.

На основе обзора состояния вопроса и анализа представленных в главе проблем поставлена научная задача.

1.1 Современное состояние вопросов математического моделирования интерпретации цифровых (растровых) изображений сканирования деформируемых твердых тел для построения и анализа их конечно-элементных моделей

Развитие научного направления о построении расчетных математических моделей объектов, изделий и их сборных конструкций, предназначенных для анализа НДС, позволяет инженерам и исследователям сэкономить прямые материальные затраты, ресурс времени, а главное, повысить уровень информативности, относительно которого, в них, и определяются параметры работоспособности, надежности и долговечности изделий.

Во всех областях инженерных расчетов, при моделировании реального объекта, ключевыми этапами являются: формирование геометрии и определение механических характеристик материала. В дальнейшем, осуществляется построение уравнения равновесия и проводится его решение, с получением поля неизвестных величин. В задачах прочности, например, неизвестными являются поля перемещений, деформаций и напряжений, относительно которых делается вывод о работоспособности изделия.

Хронологически, одним из важных направлений развития инженерных методов математического моделирования является именно совершенствование подходов интерпретации геометрии и структуры механических характеристик материала относительно реальных ДТТ: от серьезных упрощений, как качественной, так и количественной картины НДС, достигаемой, например, моделированием на основе балочных теорий (Сопротивление материалов); до применения метода конечных элементов (МКЭ), в котором возможности математического моделирования по представленным параметрам существенно продвинуты. В особенности актуально развитие представленного направления для построения математических моделей ДТТ с повышенным уровнем неоднородности структуры механических характеристик материала и индивидуальной геометрией, практически не измеряемой обычными инструментами. К ним относятся изделия, связанные с применением ДТТ природного происхождения (бетоны, камень, дерево, костная ткань, и др.).

В особенный класс задач математического моделирования ДТТ на основе сканирования следует отнести изделия из композитных материалов. Перспективным, в этом плане, считается также направление изучения сварных металлических и неметаллических швов.

Основным классом, для развития математического моделирования ДТТ на основе сканирования, следует считать решение биомеханических задач.

На начальном этапе эти задачи решались на основе науки о сопротивлении материалов (без сканирования), то есть их объекты представлялись в виде балок и стержней постоянного сечения, предложенных в работах [18, 27, 66, 90, 108]. Решение этих задач позволяет рассматривать элементы опорно-двигательного аппарата человека как механические конструкции, что дает возможность определять действующие нагрузки и выполнять расчёты конструкций на прочность. В работах [19, 32, 138] дополнительно рассматривается вопрос о подобном моделировании зубов как механической системы, а в работах [16, 27, 30, 31, 61] представлен подход на основе определения центра сопротивления зуба, с дальнейшим решением системы уравнений равновесия, что позволяет проводить решения биомеханической задачи как простой механической.

На основе использования определенных методов упрощения геометрии, при моделировании костной ткани и зуба человека, на этапе создания их первых математических моделей, в работах [28, 60, 62, 79, 113, 163] созданы и применены геометрические примитивы, позволявшие проводить оценку апробации методик инженерного анализа и фактических условий работы изучаемых объектов.

Дальнейшее развитие представленного научного направления о построении расчетных математических моделей объектов, изделий и их сборных конструкций, предназначенных для анализа НДС конструкции, связано с применением численного решения представленной задачи. В особенности, с развитием высокоэффективного решения на основе метода конечных элементов (МКЭ). На его основе, в работах [52, 79] проведено исследования напряженного состояния пародонта в области пластинчатого имплантата, а в работе [59] проведено исследование работоспособности и анализ НДС имплантатов в зубочелюстной системе. В

работах [18, 90] проведено определение жесткости фиксирующих аппаратов человека при различных видах воздействия. Авторы этих работ построили и провели анализ НДС КЭ моделей представленных ДТТ с использованием двухмерной и трехмерной геометрии тел правильной формы (цилиндр, параллелепипед, эллипсоид и др.). Значение механических характеристик материала, этих КЭ моделей взято усреднённым.

В работах [42-45] приведено построение трехмерных геометрических моделей зубов на основе базовых размеров, представленных в литературных источниках, с упрощением геометрии, использованной при построении КЭ модели. Механические характеристики материала зуба в этих КЭ моделях также используются без сканирования и берутся осредненными для двух частей – эмали и дентина.

Следующий этап развития моделирования и анализа реальных ДТТ (природного происхождения) связано с более глубоким использованием решения МКЭ. То есть, его применением при построении моделей трехмерных объектов, таких как: сердце, сосуды [24, 107], кости [58, 67] и зуб [14, 22, 111] человека. В этих работах использован более эффективный подход моделирования геометрии объекта сложной формы. Он построен на формировании каркасной модели, составленной из сечений ДТТ. Этот подход обеспечивает более высокий уровень точности геометрии трехмерной модели изучаемого объекта. Геометрия сечений в работах [14, 22, 24, 58, 67, 107, 111] построена на основе обработки аналоговых (фото) снимков сечений. Образец исследования подвергался, последовательно, поперечным распилам с определённым шагом. С использованием этих поперечных сечений (распилов) получали фотографии, которые, в дальнейшем, и использовались для компьютерного моделирования геометрии сечений. Механические характеристики в этих работах, при построении этих КЭ моделей, также использованы известными усредненными для ДТТ в целом.

Следующий этап развития представленного научного направления связан уже со сканированием ДТТ. Эта технология построена на основе использования специального оборудования для получения томографических снимков и обладает специфической возможностью показывать внутреннюю структуру и геометрию

образца с высокой точностью. При этом, она не требует разрушения объекта, подходит для различных типов материала и создает основу для разработки технологии сканирования ДТТ с целью построения геометрии сечений, трехмерных моделей и КЭ модели в целом.

Для исследования структуры и, соответственно, структуры механических характеристик, в работах [131, 139, 142, 148, 156] авторы проводили сканирование образцов из композитного материала с помощью микро- и нано-компьютерного томографа. Полученные результаты показали возможность посмотреть расположения и направления волокон, а также места пустот внутри структуры. В работах [131, 156], дополнительно, показаны места внутренних трещин. Таким образом, сканирование ДТТ является важным и наилучшим методом исследования неоднородности его материала и оценки качества изготовления.

Для определения геометрии объекта, в работах [6, 7, 28, 43, 109, 159, 164] авторы в своих исследованиях применили двухмерную КЭ модель, в которой геометрия сечения построена на основе обработки данных томографии среза объекта. Результат анализа этих КЭ моделей представлен в виде картины деформаций и напряжений. Механические характеристики, в виде модуля упругости, представлены в этих работах усредненными для разных областей изучаемого зуба - эмали и дентина [43, 109]; для височно-нижнечелюстного сустава [6, 7]; а также [28, 159, 164] для участка бедренной кости - суставной хрящ, губчатая кость, трубчатая кость и др.

Для построения объемной модели сложной геометрии ДТТ, во всех вышеуказанных работах [4, 5, 14, 22, 24, 58, 60, 89, 107, 111], авторы использовали подход реализующий набор (пакет) поперечных сечений. Данный подход позволяет строить трехмерные геометрические модели любых достаточно сложных, неоднородных и сборных конструкций. Он используется повсеместно и до настоящего времени.

Дальнейшее развитие научного направления, связанного с математическим моделированием геометрии и механических характеристик ДТТ на основе сканирования КТ и использование в КЭ модели, реализуется с появлением цифрового (растрового) изображения сечения тела. В работах [40, 54, 78, 88, 95, 96, 105, 106] показан принцип работы цифрового КТ сканирования. Этот принцип входит в ос-

нову разработки технологии построения геометрии ДТТ и исследования изменения в них механических характеристик материала [1, 63].

На основе компьютерной обработки растровых изображений, в том числе растровых изображений КТ сканирования, задача выделения границ (контура, геометрии) изучаемого объекта решалась некоторыми известными авторами, например, Кэнни, Робертса, Превитта, Собеля и др. [4, 5, 25, 29, 94, 120, 121, 133, 158]. В работах [11, 50] приведено исследование методов предложенных этими авторами, в них приведено сравнение результатов по выделению границ контуров растрового изображения.

В работах [97, 134, 140] построена объемная КЭ модель целостного таза человека, геометрия которого получена на основе результатов КТ сканирования сечений. Полученный результат анализа, с применением МКЭ, показывает картинки распределения НДС в целом и его изменения в процессе ре-моделирования костной ткани, создающий основу тестирования и оптимизации дизайна искусственных суставов и устройства для фиксации костей, изучения механического поведения суставного хряща. При решении представленной задачи механические характеристики материала исследуемого объекта, авторы также считали однородными и изотропными.

Для моделирования неоднородности механических характеристик большое значение имеют результаты натурных испытаний, проводимых на образцах в условия стандартных испытаний растяжения и сжатия, и представленных в работах [119, 124, 126, 127, 160]. Опытное исследование значения модуля упругости E_1 (продольная ось) образцов бедренной кости при сжатии [124] и растяжении [124, 126, 160] колеблется в широких пределах. Это объясняется неодинаковыми условиями проведения эксперимента. Модули упругости E_2 и E_3 определены лишь несколькими авторами. В работе [124], при сжатии кубических образов из бедренной кости человека установлено, что E_1 = 1250 кгс/мм^2, E_2 = 763 кгс/мм^2, E_3 = 732 кгс/мм^2. То есть, необходимо отметить, что степень неоднородности (анизотропии) модулей упругости E_1:E_2:E_3 = 1: 0,61: 0,56. В других работах [98-101] степень неоднородности (анизотропии) модулей упругости E_1:E_2:E_3 = 1: 0,51: 0,51.

Проведенные экспериментальные исследования, являясь фундаментальны-

ми, не позволяют моделировать неоднородность механических характеристик костной ткани, при построении КЭ модели, на прямую. Однако, с одной стороны, они доказывают, что, при КЭ моделировании ДТТ, нельзя игнорировать неоднородность (анизотропию) механических характеристик материала, с другой стороны, они могут быть использованы при разработке технологии моделирования неоднородности материала на основе растрового изображения в сечении [63]. В этом случае, назначение механических характеристик материала производится для отдельного конечного элемента, а неоднородная структура материала ДТТ в целом моделируется набором этих конечных элементов [36, 37, 64, 70, 73].

Изучение представленных вопросов показывает, что, совершенствование математической модели ДТТ связано с решением двух основных задач: построением индивидуальной геометрии и определением реального изменения механических характеристик материала.

1.2 Анализ проблем математического моделирования интерпретации растровых изображений сканирования деформируемых твердых тел для построения и анализа их конечно-элементных моделей

Анализ приведенных в литературных источниках результатов исследований показывает, что математическое моделирование построения и анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) реальных деформируемых твердых тел (ДТТ), имеющих неоднородную структуру механических характеристик материала и индивидуальные параметры геометрии, является необходимым, актуальным и активно развиваемым научным направлением. Для ДТТ, работающих в условиях интенсивных внешних нагрузок и имеющих высокий уровень ответственности по параметрам надежности и долговечности, эти задачи всегда остаются актуальными и имеют зависимость друг от друга.

Хронологически, решение представленных задач было представлено в достаточно большом количестве научных исследований, с последовательным развитием и своими преимуществами и недостатками, рассматриваемыми в настоящем разделе.

На начальном этапе развития научного направления, о построении расчет-

ных математических моделей реальных ДТТ, авторы использовали разные способы, связанные, главным образом с реализацией принципа - упрощение геометрии ДТТ до возможности её интерпретации в уравнении равновесия.

В работах [16, 18, 19, 27, 30-32, 61, 66, 90, 108, 138] приведены модели ДТТ природного происхождения, построенные на принципах классической механики (Сопротивления материалов), предполагающие ряд упрощений, что приводит к достаточно серьезным расхождениям расчетной модели и экспериментальных данных. В работах [28, 60, 62, 79, 113, 163], в частности, для создания моделей костной ткани и зуба применены геометрические примитивы. В реальности, природа создала настолько разнообразные (своеобразные) формы реальных ДТТ, что использование простых геометрических фигур не позволяет адекватно их моделировать. Однако, для более сложных конструкции, построение их моделей с упрощением геометрии имеет малое практическое значение, или не отражает их истинный характер.

С применением развития МКЭ, результаты решения представленной задачи достигли существенного приближения математического моделирования к реальности. В работах [18, 42-45, 52, 59, 79, 90, 113] построены двухмерные и трехмерные КЭ модели реальных ДТТ. Анализ этих моделей позволил получить представление о качественной и, в определенной степени, количественной картине физики изучаемого процесса деформирования. Однако, отсутствие методов измерения геометрии реальных ДТТ, в особенности природного происхождения, то есть использование для них некоторой правильной геометрической формы ограничивает достоверность математического моделирования. В работах [42-45] при построении трехмерной модели сложных объектов использованы базовые размеры, представленные в литературных источниках и использованные для моделирования неиндивидуальных параметров геометрии. Полученный результат имеет значение для практики только в сочетании с экспериментальными фактическими результатами. Кроме того, недостатком этих работ является использование механических характеристик материала кости и зуба в целом, как усреднёнными и изотропными. В реальности же материал этих ДТТ имеет высокую степень неоднородности.

Для решения задачи построения трехмерной геометрической модели в работах [14, 22, 24, 58, 60, 67, 107, 111] использовался подход формирования каркасной модели, построенной на основе пакета геометрии сечений. Для получения геометрии сечений в работах [58, 60] использованы фотографии поперечных сечений и в работах [14, 22, 24] - аналоговые снимки сечений, полученных распилом реального изучаемого ДТТ, то есть, его прототипа. Этот подход обеспечивает более точную геометрию трехмерной модели для любых достаточно сложных, неоднородных объектов. Недостатком этих работ является, то что с использованием типичной геометрии сечений, при построении трехмерной КЭ моделей реальных ДТТ, не в полной мере отвечает реальным (практическим) условиям работы.

В работах [4-7, 28, 43, 97, 109, 134, 140, 159, 164] для построения геометрии КЭ моделей реальных ДТТ также использовался принцип формирования каркасной модели. Однако, для построения пакета геометрии сечений использовано сканирование. В этом случае изучаемый ДТТ остается целым, а его геометрия содержит все, имеющие в ней особенности. Проблема здесь заключается в том, что, для качества и точности построенных геометрий КЭ моделей требуется сканирование с высоким разрешением и, соответственно, эффективный математический метод его обработки. Использованные в работах [6, 7, 28, 43, 109, 159, 164] двухмерные КЭ модели имеют значительный уровень упрощений (идеализации) ДТТ относительно реальности. Недостатком методов обработки растрового изображения для выделения границ, представленные в работах [11, 25, 29, 50, 94, 120, 121, 133, 158], является сложный и неоптимальный подход именно для ДТТ природного происхождения. Эти алгоритмы работают на всю область растрового изображения, а не по области изучаемого ДТТ, то есть, полученная геометрия не имеет достаточную необходимую точность. Таким образом, требуется еще время для изживания не анализируемых областей и неиспользуемых геометрий. Кроме того, в них отсутствует выделение геометрии внутренней структуры ДТТ, то есть, областей имеющих существенные различные величины механических характеристик, необходимых при исследовании ДТТ сложных структур.

Решение задачи определения механических характеристик материала ДТТ,

как следует из обзора состояния вопроса, большинство исследователей, при построении математических моделей, не учитывают реальное распределение механических характеристик материала. В известных работах [8, 9, 28, 39, 55, 57, 79 и др.] использовано их усредненное значение. То есть, материал, использованный для моделирования реального ДТТ в целом представляется в виде КЭ модели имеющей однородную структуру и изотропные механические характеристики. Представленное обстоятельство приводит к внесению, при формировании КЭ модели ДТТ, значительного уровня погрешности.

Результаты, представленные в работах [21, 47, 99, 100, 110, 113, 114, 116, 119, 124, 126, 127, 144, 160] доказывают, что при построении КЭ моделей ДТТ природного происхождения, в данном случае – костной ткани, нельзя игнорировать их неоднородность и анизотропию механических характеристик материала.

Для реализации параметров неоднородности реальных ДТТ, при построении их КЭ моделей, в работах [7, 14, 22, 24, 43, 44, 52, и др.] использовано различное усредненное значение механических характеристик материала для разных областей, составляющих ДТТ. Результаты этих исследований показывают некоторую пробу имитировать неоднородность материала в КЭ модели, и позволяет обеспечивать более высокий уровень точности анализа. Недостаток работы заключается в том, что процесс формирования неоднородности структуры механических характеристик реализуется вручную, то есть, без использования специального математического моделирования, предназначенного для обработки данных по неоднородности структуры материала, с дальнейшим их использованием при построении двумерной и трёхмерной КЭ модели.

1.3 Постановка задачи разработки математических моделей интерпретации растровых изображений сканирования деформируемых твердых тел для построения и анализа их конечно-элементных моделей

В ходе обзора и анализа проблем удалось установить следующие положения:

1. Главной причиной недостатков работ, представленных в разделах 1.1 и 1.2, является отсутствие комплекса подходов в реализации аппаратных средств и

математического моделирования, позволяющего показать не только внешнюю геометрию, но и внутреннюю структуру механических характеристик материала, не требующих разрушения при исследовании реального ДТТ.

2. В практике инженерных расчетов, механические (прочностные) характеристики материала реальных ДТТ берутся осреднёнными, полученными путём испытаний образцов в стандартных условиях. В реальности же, реальные ДТТ имеют гораздо более широкий диапазон изменения представленных параметров, относительно их средних значений.

3. При построении КЭ модели реального ДТТ, использование их данные о неоднородности по механическим характеристикам и геометриям позволяет добиться наибольшей точности результата анализа его НДС.

4. Процесс реализации максимального по точности моделирования неоднородности механических характеристик материала и геометрии реального ДТТ, при построении КЭ модели, невозможно осуществить с небольшим разрешением аппаратных средств. Для большого разрешения требуется разработка специального математического моделирования компьютерной обработки.

5. В большинстве работ, связанных с моделированием реальных ДТТ, при построении и анализе их КЭ моделей, не рассматривается условие контактного взаимодействия в рабочем состоянии. В реальности, все ДТТ, включая природного происхождения, взаимодействуют друг с другом, например, в виде прямого контактирования или сопряжения внутри сборной конструкции.

В работах [37, 63, 64, 73] предполагается подход на основе обработки результатов сканирования ДТТ для построения их КЭ моделей. Можно сказать, что для ДТТ природного происхождения, таких как костная ткань, горная порода, бетоны и др., сканирование является единственным подходом, реализующим возможность идентификации их по геометрии и механическим характеристикам материала. Это происходит вследствие того, что этот подход обладает следующими специфическими особенностями [36, 37, 63, 64, 73, 78, 95, 106]:

- геометрия заранее не известна или расположена внутри конструкции, её невозможно измерить и идентифицировать с помощью обычных инструментов;

- внутреннюю структуру ДТТ возможно исследовать без разрушения;

- изменение механических характеристик материла ДТТ обозначено изменением плотности (номера) света пикселей.

В работах [131, 139, 142, 148, 156, 161] приведено сканирование и получены качественные (с высокой точностью) картины структуры образцов из композитного материала. Результат подтверждает правильность направления с использованием сканирования.

В работе [63] приведен подход решения представленной задачи, состоящий из комплекса методик, позволяющих получать распределение упругих механических характеристик материала и геометрии ДТТ, где, наряду с их сканированием КТ и получением растровых изображений сечений ДТТ, используются усредненные механические характеристики материала, полученные натурным испытанием на сжатие (растяжение) стандартных образцов [98-101], с последующим построением и анализом КЭ моделей.

Недостатком способа [63] является отсутствие математического моделирования интерпретации (реализации, алгоритмизации и автоматизации) этих данных для определения наиболее полного распределения механических характеристик материала и геометрии, используемых при построении КЭ модели. То есть, на пути реализации подхода [63] существует серьезная проблема, заключающая в том, что в результате сканирования ДТТ, для его достаточно точной идентификации относительно реального объекта по геометрии и механическим характеристикам материала, требуется формировать чрезвычайно большой объем данных (информации). Обработка этих данных возможна только на основе специального математического моделирования и его компьютерной реализации (алгоритмизации), с разработкой и применением комплекса методик и математических методов.

Большой объем информации при использовании сканирования для построения КЭ моделей ДТТ определяется формированием следующих наборов данных: матрицы индексов цвета от растровых изображений сканирования сечений ДТТ, их выборки, данные КЭ модели объекта, а также данные, получаемые от совместной обработки матрицы индексов цвета и КЭ модели.

Таким образом, необходимо отметить актуальность задачи разработки математического моделирования интерпретации результатов КТ сканирования ДТТ, в виде растровых (цифровых) изображений, позволяющей провести геометрическую и физическую интерпретацию с последующим использованием этих данных при построении их КЭ моделей и анализе НДС. Отдельно, необходимо отметить с последующим использованием при решении контактной задачи теории упругости.

В настоящей работе решаются следующие задачи:

1. Отработка входных данных и настройка КТ при проведении сканирования исследуемого ДТТ, а также предварительная обработка её результатов в виде оценки степени неоднородности механических характеристик материала и индивидуальности геометрии (поверхностей, внутренних структур и др.).

2. Разработка комплекса математических методов и алгоритмов интерпретации результатов сканирования ДТТ для построения их индивидуальной геометрии, которая включает в себя: определение внешних контуров сечений и контуров внутренней структуры материала.

3. Разработка методов математического моделирования интерпретации неоднородности механических характеристик материала ДТТ, построенных на основе сканирования и результатов натурных испытаний образцов материала, с использованием этих данных при построении и анализе НДС КЭ моделей.

4. Исследование точности сходимости численного решения МКЭ в анализе НДС КЭ моделей реальных стандартных образцов из костной ткани, построенных на основе разработанного подхода моделирования неоднородности механических характеристик материала и данных натурных испытаний.

5. Проведение численного эксперимента на реальных ДТТ природного происхождения по исследованию влияния в них структуры материала, особенностей геометрии, действующей внешней нагрузки и граничных условий, в частности, с применением решения контактной задачи теории упругости для анализа взаимодействия деформируемых твердых тел.

1.4 Выводы по главе

1. Обзор состояния вопроса и анализ проблем в построении математических моделей реальных ДТТ, показывает, что существующие подходы требуют дальнейшего развития в отношении возросших потребностей по точности и эффективности при моделировании реальных ДТТ с неоднородностью механических характеристик материала и сложной (индивидуальной) геометрией.

2. Для решения проблемы точности моделирования реальных ДТТ, предлагается использование технологии сканирования, результат которого позволяет реализовать возможность идентификации их по геометрии, а также определить в них поле изменения механических характеристик материала, на основе зависимости между растровым изображением сканирования и структурой механических характеристик ДТТ.

3. Сканирование ДТТ может быть построено на любом физическом принципе (рентгеновский, акустический, радиационный и др.), с получением, в результате, цифрового изображения в некотором наборе его сечений с определенным шагом, с дальнейшим применением полученных данных при построении их КЭ моделей ДТТ. В настоящее время широко используется сканирование компьютерным томографом.

4. На пути реализации технологии сканирования ДТТ существует серьезная проблема, которая заключается в том, что в результате работы сканера, для получения достаточно точной идентификации КЭ модели относительно реального ДТТ, необходимо использовать чрезвычайно большой объем данных. Решения этой проблемы возможно только через разработку специального математического моделирования и его компьютерной реализации, предназначенной для интерпретации этих данных.

ГЛАВА 2 ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЬТАТОВ СКАНИРОВАНИЯ И ДАННЫХ НАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В данной главе представляются:

- основные математические зависимости аналитической геометрии и линейной алгебры интерпретации растровых изображений сканирования для построения индивидуальной геометрии;

- основные математические зависимости для моделирования неоднородности механических характеристик материала реальных деформируемых твердых тел (ДТТ);

- основные математические зависимости метода конечных элементов (МКЭ) с использование вариационно-энергетического принципа метода перемещений теории упругости для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) твердых тел;

- разработка математических моделей конечных элементов (КЭ), используемых для анализа объемного НДС сканируемых ДТТ и их взаимодействия.

Результаты подходов и математических методов, рассмотренные в данной главе, являются основанием для построения алгоритмов и комплексов программ (глава 3).

2.1 Основные математические зависимости аналитической геометрии и линейной алгебры интерпретации растровых изображений сканирования для построения индивидуальной геометрии

При построении конечно-элементных (КЭ) моделей реальных ДТТ первой необходимой информацией являются параметры их геометрии. Для твердых тел, имеющих стандартную (простую) геометрию, процесс измерения реализуется с помощью обычных инструментов, затем полученные параметры геометрии генерируются в проектных системах CAD (Computer-aided design), таких как AutoCAD, NX Unigraphic и др. Однако, для реальных ДТТ, имеющих высокую степень нерегулярности геометрии, а также геометрии внутренней структуры ма-

териала, реализация этого процесса возможно только путем сканирования, например, КТ. То есть, основным преимуществом сканирования, с получением растрового (цифрового) изображения, является то, что геометрия ДТТ может быть заранее не известна или расположена внутри конструкции и, соответственно, ее невозможно измерить и идентифицировать в ДТТ с помощью обычных инструментов. Для деталей машин, например, это означает реализацию возможностей анализа отклонений геометрии от размеров, заданных по чертежам. Отдельно стоящей проблемой, в этом случае, является анализ геометрии сопрягаемых деталей.

Для более сложных по геометрии и структуре деформируемых тел, таких детали из композитного материала и тела природного происхождения (бетоны, горная порода, костная ткань и др.), сканирование является единственно возможным подходом, реализующим полную идентификацию их по геометрии.

2.1.1 Формирование результатов сканирования

В результате проведения сканирования деформируемых объектов, КТ позволяет формировать пакет снимков, каждый из которых представляет собой растровое изображение в определенном сечении [54, 78, 95]. Стандартными форматами растрового изображения являются: JPEG, DICOM, BMP, PNG и др. Наиболее часто используемыми форматами являются DICOM и JPEG.

Файл, хранящий изображение в стандарте DICOM (Digital Imaging and Communications in Medicine), имеет более широкий спектр (количество) оттенков. Он представляет собой сложную структуру данных, включающих в себя не только непосредственно изображение, но и сопутствующую информацию: об оборудовании; описание технологии сканирования; параметры и описание серии исследований; системы используемых координат изображений; тексто-графические элементы, графики и др. [125].

Формат JPEG (Joint Photographic Experts Group) способен кодировать изображения, основанные на любом типе цветового пространства. Он кодирует каждый компонент цветовой модели отдельно, что обеспечивает его полную независимость от любой модели цветового пространства (например, от RGB, HSV или

CMYK). Преимущество формата JPEG заключается в том, что для него достигается высокая степень сжатия объема информации. Недостатком этого формата является то, что он имеет только 256 оттенков (от 0 до 255), то есть в некоторых случаях невозможно показать структуру геометрии объектов на повышенном (на порядок) уровне измельчения изображения [83].

Независимо от используемого формата растровых изображений сканирования, их необходимо преобразовать в вид числовой матрицы для дальнейшей обработки. Формат данных файла DICOM неудобен для такой обработки, но, с помощью алгоритма сжатия он может быть представлен форматом данных JPEG, который и используется в настоящей работе.

Оценка качества полученного изображения определяется пятью факторами: пространственным разрешением; контрастностью; шумом и пространственной однородностью; линейностью и наличием артефактов [54].

Чаще всего, для оценки качества изображения, используется критерий [95] в виде отношения «сигнал-шум» *ОСШ* (по англ. "*SNR*"). Эта величина определяется как отношение среднего значения индексов цвета изображения к стандартному отклонению (дисперсии):

$$ОСШ = ОСШ(x, y) = \frac{\overline{f_в(x, y)}}{\sigma_в(x, y)}, \tag{2.1}$$

где $\overline{f_в(x, y)}$ – среднее значение индексов цвета изображения; $\sigma_в(x, y)$ – квадратный корень из дисперсии.

Чем больше это отношение, тем выше качество (точность) изображения. В общем случае, отношение «сигнал-шум» разное в разных точках изображения. Важным, в этом случае, является то, что *ОСШ* находится в пределах допустимого. Это определяется такими параметрами как среднеквадратическое отклонение и проинтегрированное среднеквадратическое отклонение.

Среднеквадратическое отклонение Δ^2(x, y) представляет собой нормированное отклонение восстановленной функции от ее истинного значения в данной точке (x, y) области и определяется равенством:

$$\Delta^2(x, y) = \frac{\overline{[f_в(x, y) - f(x, y)]^2}}{f^2(x, y)}. \tag{2.2}$$

Проинтегрированное среднеквадратическое отклонение Δ^2 – это тоже среднеквадратическое отклонение, но проинтегрированное по всей области восстановления Ω и соответствующим образом нормированное:

$$\Delta^2 = \frac{1}{s_0}\iint_{\Omega}\left[f_в(x,y) - f(x,y)\right]^2 dxdy \Big/ \left[\frac{1}{s_0}\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy\right]^2, \qquad (2.3)$$

где s_0 – площадь области Ω.

В отличии от среднеквадратического отклонения, данная величина не зависит от координат точки (x, y) области восстановления. Величины Δ^2(x, y) и Δ^2 можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta^2(x,y) = \Delta^2_ф(x,y) + \Delta^2_a(x,y) \qquad (2.4)$$

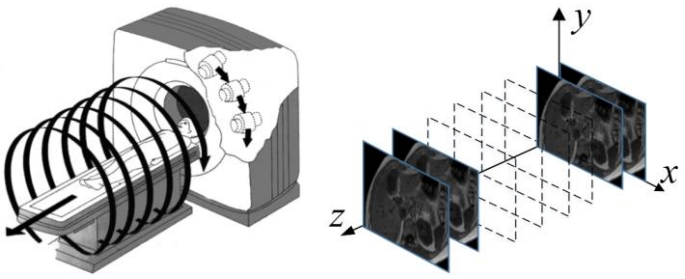
$$\Delta^2 = \Delta^2_ф + \Delta^2_a \qquad (2.5)$$

где $\Delta^2_ф(x,y)$ – количественная оценка случайных отклонений в наблюдаемом изображении от среднего изображения в данной точке (x, y); $\Delta^2_ф$ – те же отклонения, накопленные по всей области Ω; $\Delta^2_a(x,y)$ – отклонение среднего изображения от истинного в данной точке (x, y); Δ^2_a – те же отклонения, проинтегрированные по всей области Ω.

Подобное представление величин Δ^2(x, y) и Δ^2 имеет определенный физический смысл: первые слагаемые в выражениях (2.4) и (2.5) определяются статистическими характеристиками присутствующих флуктуационных эффектов, а вторые – от них не зависят. Если оба слагаемых примерно равны, то оба фактора влияют на качество изображения примерно одинаково. Нарушение этого приближенного равенства в ту или иную сторону говорит о преобладании того или иного фактора, искажающего изображения.

Схема получения данных сканирования КТ

Процесс сканирования проводится с помощью КТ. В результате его работы формируется набор растровых изображений в сечениях сканируемого тела, с определенным шагом, которые сохраняются на запоминающем устройстве КТ. На рисунке 2.1а представлена технология спирального КТ сканирования [54, 96], которая является наиболее распространенной для получения данных в медицине (рисунок 2.1б).



а) б)

Рисунок 2.1 − Спиральная технология сканирования (а)
и полученный пакет растровых изображений (б)

Промышленные КТ сканирования сохраняют результат в виде специальных файлов, которые отформатированы производителем. Для возможности использования этих файлов, их необходимо преобразовать к стандартному формату растрового изображения или прямое их представление в виде цифровой матрицы.

Определение растровых изображений заданного в оттенках серого

Этот процесс связан с преобразованием изображения в чёрно-белое и называемое обесцвечиванием. Он необходим для получения единого спектра оттенков (не по цвету), позволяющий реализовать возможность исследования градиента индексов цвета, как для определения геометрии сечения, так и для определения структуры индексов света пикселей сечения в целом.

Растровое изображение определяется функцией:

$$I_{rgb}(x;y): N \times N([0;255];[0;255];[0;255]). \quad (2.6)$$

Для создания всех цветов, существующих в природе, смешиваются три первичных цвета RGB красный (Red), зеленый (Green) и синий (Blue), а также задается их интенсивность по шкале условных единиц от 0 до 255. Когда интенсивность всех цветов высокая, итоговый оттенок будет бледным, когда низкая – густым и темным. Например, белый цвет – $(R-255;G-255;B-255)$, а черный – $(R-0;G-0;B-0)$. Для обозначения цветовых оттенков используются записи: $I_r(x,y) = I_{rgb}(x,y)_r$ – для красной компоненты; $I_g(x,y) = I_{rgb}(x,y)_g$ – для зеленой компоненты; $I_b(x,y) = I_{rgb}(x,y)_b$ – для синей компоненты.

Преобразование растрового изображения, заданного в оттенки серого (черно-белого или обесцвечивания) используется функция:

$$I_{grey}(x,y): N \times N \to [0,255]. \quad (2.7)$$

В черно-белом изображении, три значении красного, зеленного и синего одинаковы, то есть, для обесцвечивания изображения можно использовать любой из следующих каналов: $I_r(x,y)$ – красный канал; $I_g(x,y)$ – зеленый канал; $I_b(x,y)$ – синий канал.

Для остальных (цветных) растровых изображений три значении красного, зеленного и синего неодинаковы. Существует много способов обесцвечивания [129, 135, 141], приведем несколько популярных из них:

- среднее значение трех компонентов: $I_{grey} = \frac{1}{3}(I_r + I_g + I_b)$;

- среднее значение наибольшего и наименьшего значений индексов цвета компонентов: $I_{grey} = \frac{1}{2}(I_{\max}(I_{rgb}) + I_{\min}(I_{rgh}))$;

- по формуле "Luma": $I_{grey} = 0,3I_r + 0,59I_g + 0,11I_b$, где значения коэффициентов иногда могут отличаться от приведенных выше, но их сумма всегда равна 1.

Из опыта, полученного при обработке растровых изображений сканирования КТ ДТТ природного материала, наилучший результат получается при использовании способа среднего значения трех компонентов.

Разрешение растрового изображения и размеры пикселя

Разрешение растрового изображения характеризуется количеством пикселей на единицу длины. Установка разрешения зависит от конструкции устройства сканирования и его настройки в процессе проведения сканирования. Для КТ сканирования в медицине разрешение полученного растрового изображения изменяется в диапазоне от 72 до 300 dpi (точки на дюйм, 1 дюйм – 2,54 *см*). Такое разрешение удовлетворяет необходимому уровню качества сканирования ДТТ природного происхождения (кости, зуба). Для ДТТ более сложных структур механических характеристик, например, композитных материалов, необходим более высокий уровень разрешения, который может быть получен только с помощью промышленного томографа. Например, компьютерная томографа GE phoenix-v-tome-x-M300, которая может добиться размер пикселя до 2 *мкм* (т.е. 1000 пикселей на 1 *мм*) [157]. Это также означает, что в результате сканирования возрастает, в значительной степени, и объем данных.

Необходимо разобраться с измерением разрешающей способности, используемой для принтера и сканера. Единицы изменения их разрешающей способности отличаются. Принтер, исторически, появился раньше сканера. То есть, его (принтера) разрешающая способность определялась числом точек на дюйм: чем больше этих точек (на дюйм) тем точнее изображение. Такая мера измерения разрешающей способности была принята за основу и называется dpi – сокращение для (англ.) *dots per inch*, количество точек на дюйм.

Однако сканер, в действительности, точки (*dots*) никуда не ставит и разрешающая способность, получаемого на его основе, изображения определяется количеством элементарных площадок (участков) на которые разбита площадка размером "дюйм х дюйм". Таким образом, при сканировании используется измерение: число пикселей на дюйм (ppi). То есть, чем на большее количество пикселей разбит дюйм, тем точнее изображение.

В таблице 2.1 представляются разрешения цифровых изображений, полученные при проведении сканирования в медицине и технике. Этот параметр является необходимым при определении геометрических параметров относительно реального объекта, а также для определения относительного расположения узлов КЭ сетки в пространстве между растровыми изображениями.

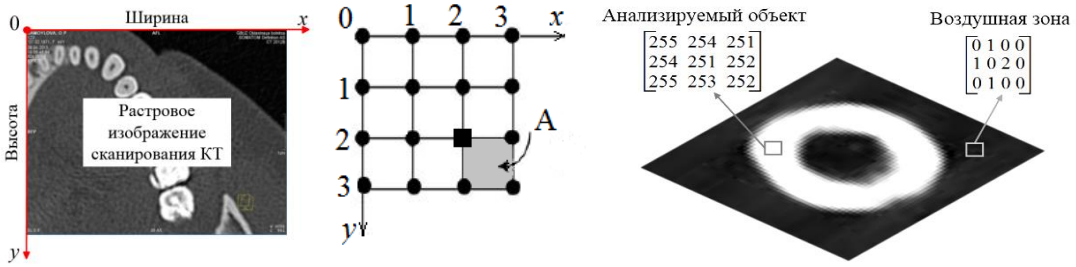
Таблица 2.1

Разрешение цифровых изображений сканирования и размеры пикселя

Параметры результатов сканирования	dpi (*точки на дюйм*)	Размеры матрицы (*пикселя*)	Количество пикселей	Физические размеры (*мм*)	Размеры одного пикселя (*мм*)
В медицине					
JPEG files	72	512x512	262144	180,9x180,9	0,353
JPEG files	96	512x512	262144	135,45x135,45	0,265
JPEG files	96	1024x768	786432	270,9x203,2	0,265
JPEG files	300	512x512	262144	43,35x43,35	0,0847
DICOM files	300	1024x768	786432	86,71x65,03	0,0847
DICOM files	300	1280x720	921600	108,38x60,96	0,0847
DICOM files	300	1920x1080	2073600	162,57x81,45	0,0847
В технике [157]					
Rikagu Nano3DX	-	-	-	-	0,00027
GE phoenix v-tome-x-L240	-	-	-	-	0,001
GE phoenix v-tome-x-M300	-	-	-	-	0,002

Определение системы координат растрового изображения и его представление в виде цифровой матрицы

Система координаты растровых изображений – двухмерная, в которой представлены ширина и высота, измеренные в пикселях. Каждая координата является смещением от верхнего левого угла изображения (рисунок 2.2а).



а) б)

Рисунок 2.2 − Система координат растрового изображения (а) и выделение в нем области исследования (б)

Матрица индексов цвета растрового изображения имеет следующий вид:

$$I(m,n)=\begin{bmatrix} I_{1,1} & \cdots & I_{1,j} & \cdots & I_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ I_{i,1} & \cdots & I_{i,j} & \cdots & I_{i,n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{m,1} & \cdots & I_{m,j} & \cdots & I_{m,n} \end{bmatrix} i \in [1,\mathrm{m}];\ \mathrm{j} \in [1,\mathrm{n}]\,.$$

При построении модели геометрии сечения и его внутренней структуры, для уменьшения объема обрабатываемой информаций и времени, в растровом изображении необходимо выделить анализируемую область объекта исследования (рисунок 2.2б).

2.1.2 Построение предварительной геометрии сечения

Геометрия сечения определяется двумя компонентами: внешним контуром и контурами внутренней структуры в нем. Поэтому, для реализации их построения, используются два этапа.

На первом этапе, проводится выделение областей с ярко выраженными изменениями механических характеристик. Он осуществляется с использованием функций «0-1» и «0-1-2». Его целью является построение предварительных контуров в сечении (внешней геометрии и внутренней структуры) и определение

временного центра тяжести в них.

На втором этапе, относительно контуров, полученных на первом этапе, проводится уточнение геометрии внешнего контура и внутренних контуров структуры материала в сечения, с использованием метода исследования изменения градиентов индексов цвета пикселей.

Использование представленного подхода позволяет, наряду с определением внешнего контура геометрии, определять геометрический контур некоторых внутренних областей ДТТ, имеющих, например, отличительные особенности по механическим характеристикам твердого тела.

Функция «0-1»

Функция осуществляет временное (предварительное) присвоение пикселям матрицы индексов цвета следующих значений: для определения области объекта – значений, равных 1, для остальных пикселей – значений, равных 0:

$$f_{01}(n_{НП}, n_{ВП}, I_{grey}) = \begin{cases} 0, I_{grey} < n_{НП} \text{ или } I_{grey} > n_{ВП} \\ 1, n_{НП} \le I_{grey} \le n_{ВП} \end{cases}, \quad (2.8)$$

где $n_{ВП}$ и $n_{НП}$ – верхний и нижний фиксированные пределы определения области объекта, $n_{ВП}, n_{НП} \in [0, 255]$; I_{grey} – исходная матрица индексов цвета.

Результат (рисунок 2.3) записывается в новую матрицу $I_m = f_{01}(n_{ВП}, n_{НП}, I_{grey})$. Значения $n_{ВП}$ и $n_{НП}$ определяются опытом путем и зависят от исходного растрового изображения. Например, пределы для растрового изображения сканирования фрагмента бедренной кости – [90-255], эмали зуба человека – [191-255], дентина зуба человека – [70-190], бетонной породы – [80-140].

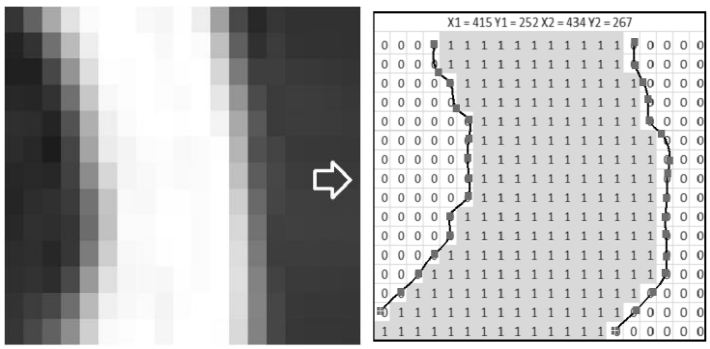


Рисунок 2.3 − Функция «0-1»

Функция «0-1-2»

Преимущество использования функции «0-1» состоит в простоте предварительного определения контура сечения объекта. При необходимости для областей с повышенным уровнем сложности геометрии используется функция «0-1-2» (рисунок 2.4):

$$f_{012}(n_{НП}, n_C, n_{ВП}, I_{grey}) = \begin{Bmatrix} 0, I_{grey} < n_{НП} \\ 1, n_{НП} \le I_{grey} < n_C \\ 2, n_C < I_{grey} \le n_{ВП} \end{Bmatrix}, \quad (2.9)$$

где $n_{ВП}$ и $n_{НП}$ – верхний и нижний фиксированные пределы определения области объекта исследования; n_c– предел определения силовой части объекта; $n_{ВП}, n_C, n_{НП} \in [0, 255]$; I_{grey}– исходная матрица индексов цвета.

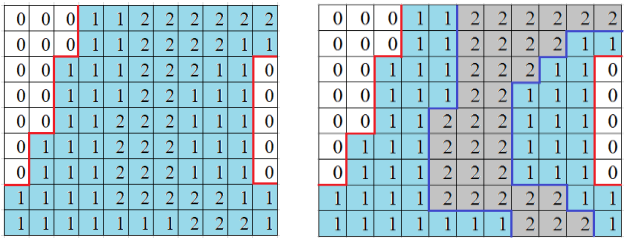
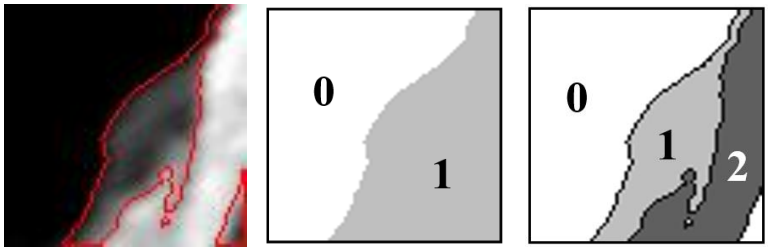


Рисунок 2.4 − Принцип работы функций «0-1» и «0-1-2»

По существу, силовая часть представляет собой более высокую плотность на растровых изображениях и, с представлением силовой части, результат прогнозирует, что в более плотно заполненном месте будет большее восприятие внешних нагрузок (рисунок 2.5).



а) б) в)

Рисунок 2.5 − Результаты построения контуров сечения:

а) – растровое изображение сканирования; б) – результат функции «0-1»;

в) – результат функции «0-1-2» с представлением силовой части

В результате использования этих функций получается бинарное изображение, в котором его структурный элемент представляет собой два значения 0 и 1 (результат функции «0-1» - рисунок 2.5б), или три значения 0, 1 и 2 (результат функции «0-1-2» - рисунок 2.5в).

Множества заполненных точек предварительного контура, образуемых по направлениям *x* и *y*, обозначаются:

- по оси x (слева направо):

$$\begin{cases} P_x(x_i; y_j) \; при \; f(I_{grey}(x_i; y_j)) - f(I_{grey}(x_{i+1}; y_j)) < 0 (-1 \; или \; -2) \\ P_x(x_{i+1}; y_j) \; при \; f(I_{grey}(x_i; y_j)) - f(I_{grey}(x_{i+1}; y_j)) > 0 (1 \; или \; 2) \end{cases}. \quad (2.10)$$

- по оси y (сверху вниз):

$$\begin{cases} P_y(x_i; y_j) \; при \; f(I_{grey}(x_i; y_j)) - f(I_{grey}(x_i; y_{j+1})) < 0 (-1 \; или \; -2) \\ P_y(x_i; y_{j+1}) \; при \; f(I_{grey}(x_i; y_j)) - f(I_{grey}(x_i; y_{j+1})) > 0 (1 \; или \; 2) \end{cases}. \quad (2.11)$$

В некоторых случаях, их можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} P_x(px_1, px_2 ... px_n) \; где \; \forall (x_i, y_j); \forall (x_{i+1}, y_j); \left| I(x_{i+1}, y_j) - I(x_i, y_j) \right| \neq 0 \\ P_y(py_1, py_2 ... py_m) \; где \; \forall (x_i, y_j) \notin Px; \forall (x_i, y_{j+1}) \notin Px; \left| I(x_i, y_{j+1}) - I(x_i, y_j) \right| \neq 0 \end{cases}. \quad (2.12)$$

Структурные пиксели контура сечения

Набор пикселей, которые соединяются с другими с одинаковым значением индекса цвета, называется структурными пикселями [118, 122]. Для нахождения структурных пикселей контура сечения объекта, на первом этапе, в данной работе используются алгоритмы, построенные на принципе 8-связных форм (код Фримена) [104, 117, 130]. Работа этого принципа представлена на рисунке 2.6.

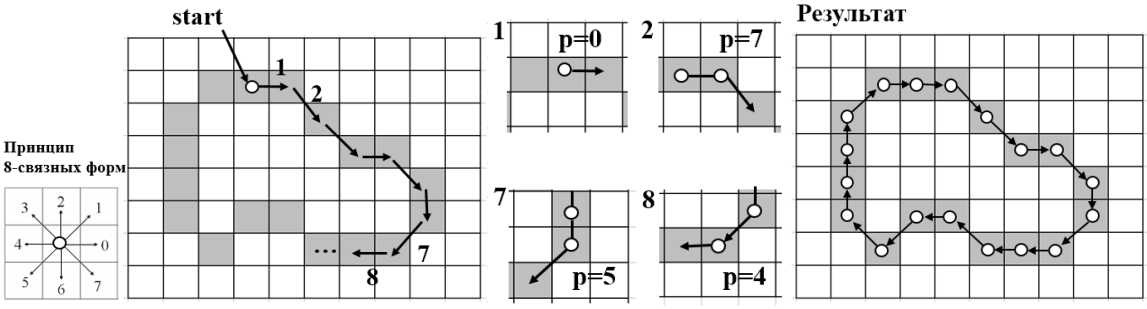


Рисунок 2.6 − Определение структурных пикселей контура сечения

Начало формирования контура определяется начальным пикселем и с этого места запускается трассировщик. Он проверяет 8 соседних пикселей, если один из них имеет тоже самое значение индекса цвета, что и начальный пиксель (1 или 1-2), то к нему допускается движение трассировщика. При этом, для исключения его движения в обратном направлении, пиксель, который произошел переход, перекрашивается в временное значение "0". Все координаты структурных пикселей контура сечения сохраняется в виде матрицы.

Определения площади сечения изучаемого объекта

При определении площади сечения, на его растровом изображении, предлагается два метода: первый использует сумму площадей внутренних пикселей контура сечения и, второй определяется по формуле площади Гаусса.

Площадь пикселя определяется выражением вида:

$$F_{П} = \frac{x}{a}.\frac{y}{b}, \tag{2.13}$$

где x и y – линейные размеры матрицы в миллиметрах по сторонам Ox и Oy; a и b – количества пикселей по соответствующим сторонам Ox и Oy.

Площадь сечения изучаемого объекта на растровом изображении определяется выражением:

$$F_{Сечения} = \sum_{i=1}^{n} F_i = nF_{П}, \tag{2.14}$$

где $F_П$ – площадь одного пикселя; n – число пикселей внутри контура сечения изучаемого объекта.

Для второго метода определения площади сечения объекта на растровом изображении, по формуле площади Гаусса [20], считается, что каждый пиксель – вершина многоугольника:

$$\begin{aligned} F_{Сечения} &= \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n-1}(x_i y_i - x_n y_1) - \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} y_i - x_1 y_n)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|x_1 y_2 + x_2 y_3 + \ldots + x_{n-1} y_n + x_n y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - \ldots - x_n y_{n-1} - x_1 y_n\right| \end{aligned} \tag{2.15}$$

Другое представление этой же формулы:

$$F_{Сечения} = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right|, \tag{2.16}$$

где $x_{n+1} = x_1$ и $x_0 = x_n$, так же как $y_{n+1} = y_1$ и $y_0 = y_n$; n – количество сторон многоугольника, в этом случае, количество пикселей контуры сечения объекта; (x_i, y_i), $i = 1, 2\ldots, m$ – координаты пикселей края контуры сечения.

В представленной работе используются оба принципа.

Определение координат центра тяжести сечения

Рассматривая произвольную геометрию контура сечения, связанную с системой координат Oxy, координаты её цента тяжести [65] определяются:

$$x_ц = \frac{S_y}{F};\ y_ц = \frac{S_x}{F},\tag{2.17}$$

где F – площадь контура сечения; S_x и S_y – статические моменты площади соответственно относительно осей x и y.

Для вычисления статических моментов сложной фигуры, ее разбивают на простые части. В рассматриваемом случае этими частями являются пиксели растрового изображения внутри контура сечения объекта исследования:

$$\begin{aligned} S_x &= F_1 y_1 + F_2 y_2 + ... + F_n y_n = \sum_{i=1}^{n} F_i y_i = F_П \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ S_y &= F_1 x_1 + F_2 x_2 + ... + F_n x_n = \sum_{i=1}^{n} F_i x_i = F_П \sum_{i=1}^{n} x_i. \end{aligned}\tag{2.18}$$

С использованием формулы (2.18), координаты центра тяжести сложной геометрии определяются выражениями:

$$\begin{aligned} x_ц &= \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{F_П \sum_{i=1}^{n} x_i}{nF_П} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \\ y_ц &= \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{F_П \sum_{i=1}^{n} y_i}{nF_П} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}. \end{aligned}\tag{2.19}$$

Результат определения координат центра тяжести сечения Ц($x_ц$, $y_ц$) используется при:

- уточнении геометрии сечения изучаемого объекта симметричного замкнутого вида или вида окружности;

- корректировке положения центра тяжести пакета сечений;

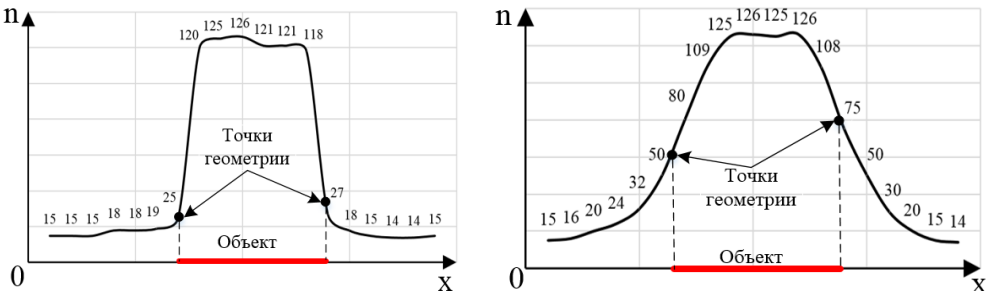
- заданию граничного условия в КЭ модели для анализа НДС;

- заданию криволинейной поверхности сечения, используется для обозначения места (внутри ДТТ, имеющих сложную форму) эквивалентных напряжений при анализе НДС деформируемых твердых тел.

2.1.3 Метод исследования изменения градиента индексов цвета

Целью метода является определение и построение уточненной геометрии сечения изучаемого объекта, на основе исследования изменения градиента индексов цвета растрового изображения сканирования КТ.

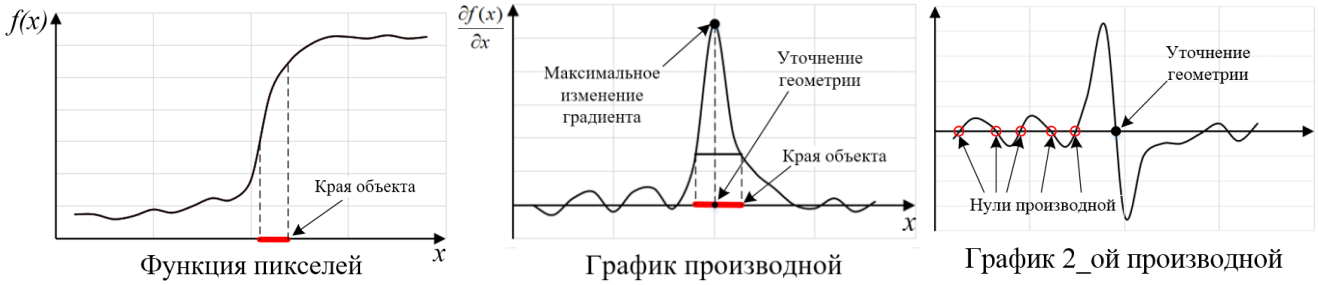
В идеальных условиях контур геометрии сечения определяется пикселями, на которых имеет место максимальный градиент изменяются в индексах цвета по сравнению с остальными (рисунок 2.7а). В реальности же, это случается крайне редко (рисунок 2.7б). Чаще всего на растровом изображении сканирования КТ, между зонами анализируемого и неанализируемого объекта, существует переходная зона, в которой значения индексов цвета пикселей изменяются достаточно слабо.



а) б)

Рисунок 2.7 – Четкое изменение (а) и слабое изменение (б) индексов цвета

Таким образом, для получения уточненной геометрии контура предлагается метод исследования изменения градиента индексов цвета [37]. Так как, на основе дифференцирования индексов цвета растровых изображений сканирования [94], рассматриваемых как функция пространственных координат, осуществляется реализация возможности их применения для уточнения геометрии сечения. На рисунке 2.8 представляется принцип измерения градиента изменения индексов цвета [132], то есть их анализ по первой и второй производной изображения.



Функция пикселей График производной График 2_ой производной

Рисунок 2.8 – Графики функции пикселей и её производной

Обнаружение контуров для изображения со значениями индексов цвета *f(x,y)* по осям *Ox* и *Oy*, которое обеспечивается взятием частной производной *df/dx* и *df/dy*. Эти производные характеризуют скорости изменения индексов цвета в направлениях *Ox* и *Oy* соответственно. Для вычисления производной по произвольному направлению используется градиент изменения индексов цвета:

$$\text{grad } f(x, y) = f(x, y). \tag{2.20}$$

При этом, градиент это вектор в двумерном пространстве, ориентированный по направлению наиболее быстрого возрастания индексов цвета, и рассчитывается выражением вида:

$$|\nabla f(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}. \tag{2.21}$$

Для выделения контура в произвольном направлении используется модуль градиента поля индексов цвета. Для изображений вместо производных выбираются дискретные разности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &\approx \Delta_x = f(n_{i+1}, n_j) - f(n_i, n_j); \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &\approx \Delta_y = f(n_i, n_{j+1}) - f(n_i, n_j). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Максимальное изменение градиента определяется по следующей функции:

$$g(\Delta) = \max\{|\Delta_x|, |\Delta_y|\}. \tag{2.23}$$

На этой основе, при построении уточненной геометрии сечения объекта исследования, выполняется определение комплекса пикселей с локальными максимумами вдоль направлений градиента (рисунок 2.9).

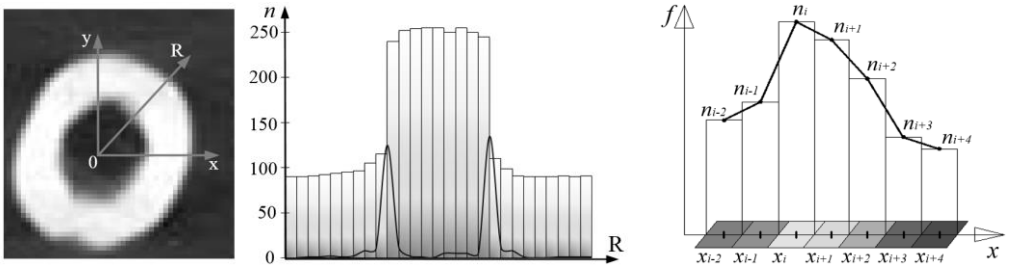


Рисунок 2.9 − Изменение индексов цвета и исследование градиента функции индексов цвета

Функция индексов цвета (рисунок 2.9) позволяет уточнить положение точки контура сечения и представляется в виде полинома (2.24):

$$f(x) = a_1 x + a_2, \tag{2.24}$$

где x – значение координаты пикселя; a_1 и a_2 – коэффициенты полинома.

Градиент функции определяется по формулам (2.25), (2.26), (2.27):

$$\begin{cases} f(x) = n_i \quad при \quad x = x_i \\ f(x) = n_{i+1} \quad при \quad x = x_{i+1} \end{cases}; \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{n_{i+1} - n_i}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{\Delta n_{(i+1;i)}}{\Delta L} \\ a_2 = \dfrac{n_i x_{i+1} - n_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} = \dfrac{n_i x_{i+1} - n_{i+1} x_i}{\Delta L} \end{cases}; \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{n_{i+1} - n_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\Delta n_{(i+1;i)}}{\Delta L}. \tag{2.27}$$

Шаг координат точек растровых изображений в направлении осей принимает значения $\Delta L = 1, 2, 3 \ldots m$. Переход к линейному измерению в прямоугольной системе координат определяется формулой:

$$\Delta L = (x_{i+1} - x_i) k_x^{-1}, \tag{2.28}$$

где x – координаты точек контура в пикселях; k_x – коэффициент перевода от измерения координат в пикселях к их измерению в миллиметрах.

Существует два случая исследования изменения градиента геометрии контуров в сечении.

В первом случае контур сечения замкнутый и имеет приблизительно симметричный вид. Тогда определение уточненных точек геометрии сечения осуществляется с помощью исследования индексов цвета по лучам, построенным через центр тяжести (рисунок 2.10).

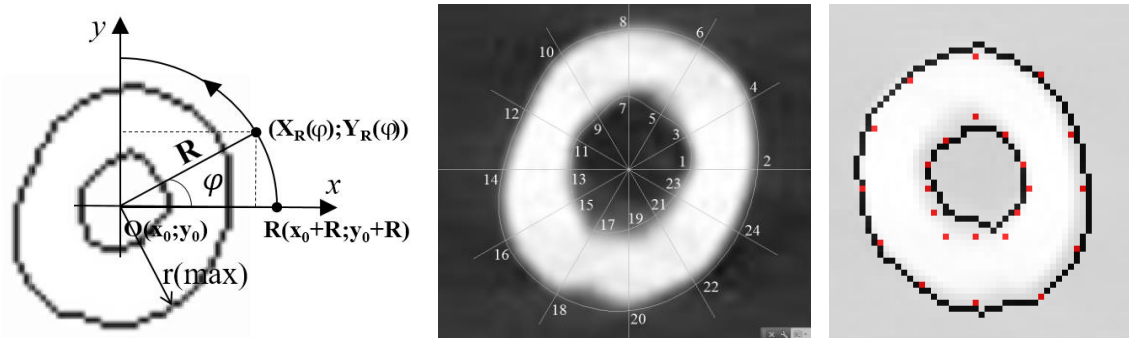


Рисунок 2.10 − Исследование изменения градиента по лучами, построенным через центр тяжести

При этом, назначается радиус R, который больше чем максимальный радиус – r внешнего контура предварительной геометрии. Координаты точки вращения определяются:

$$\begin{cases} X_R(\varphi) = X_0 + R\cos(\varphi) \\ Y_R(\varphi) = Y_0 + R\sin(\varphi) \end{cases}, \tag{2.29}$$

где $\varphi = (i-1)\varphi_0; 0 \le \varphi \le 2\pi; i = 1,2 \ldots i_{\max} + 1$.

Множество уточненных точек геометрии сечения в целом формируется в следующим виде:

$$P_{resul} = \left\{ (X_{P_i^{\max}(\varphi)}; Y_{P_i^{\max}(\varphi)}), (X'_{P_i^{\max}(\varphi)}; Y'_{P_i^{\max}(\varphi)}) \mid i = 1,2,3 \ldots i_{\max} \right\}. \tag{2.30}$$

Для каждого луча, построенного через центр тяжести сечения, максимальное изменение градиента индексов цвета формируется в виде:

$$P_i^{\max}(\varphi) = \left\{ \max\left(\frac{\left| n_{(x_0 + j\Delta_x(\varphi); y_0 + j\Delta_y(\varphi))} - n_{(x_0 + (j+1)\Delta_x(\varphi); y_0 + (j+1)\Delta_y(\varphi))} \right|}{\Delta_L(\varphi)} \right) \mid j = 0,1,2..j_{\max} - 1 \right\}. \tag{2.31}$$

Координаты уточненных точек геометрии сечения определяются по условиям:

$$\begin{cases} X_{P_i^{\max}(\varphi)} = X_0 + j\Delta_x(\varphi) \\ Y_{P_i^{\max}(\varphi)} = Y_0 + j\Delta_y(\varphi) \end{cases} при \max\left(\frac{n_{(x_0 + j\Delta_x(\varphi); y_0 + j\Delta_y(\varphi))} - n_{(x_0 + (j+1)\Delta_x(\varphi); y_0 + (j+1)\Delta_y(\varphi))}}{\Delta_L(\varphi)} \right);$$

$$\begin{cases} X'_{P_i^{\max}(\varphi)} = X_0 + (j+1)\Delta_x(\varphi) \\ Y'_{P_i^{\max}(\varphi)} = Y_0 + (j+1)\Delta_y(\varphi) \end{cases} при \min\left(\frac{n_{(x_0 + j\Delta_x(\varphi); y_0 + j\Delta_y(\varphi))} - n_{(x_0 + (j+1)\Delta_x(\varphi); y_0 + (j+1)\Delta_y(\varphi))}}{\Delta_L(\varphi)} \right), \tag{2.32}$$

где $j = 0,1,2..\, j_{\max} - 1$; $\Delta_L(\varphi) = \frac{R}{j_{\max}}$; $\Delta_x(\varphi) = \frac{X_R(\varphi) - X_0}{j_{\max}}$; $\Delta_y(\varphi) = \frac{Y_R(\varphi) - Y_0}{j_{\max}}$.

В втором случае, когда контур сечения имеет произвольный вид. Тогда в заданных точках производится построение отрезков перпендикулярных предварительному контуру сечения (нормалей) и на них проводится исследование градиента для определения уточненных точек геометрии сечения (рисунок 2.11).

Множество уточненных точек геометрии сечения в целом формируется в следующим виде:

$$P_{resul} = \left\{ (X_{P_i^{\max}}; Y_{P_i^{\max}}), \mid i = 1,2,3 \ldots i_{\max} \right\}. \tag{2.33}$$



Рисунок 2.11 − Исследование изменения градиента по отрезкам нормалей к предварительному контуру геометрии сечения

Для каждого отрезка нормали, построенного по предварительной геометрии кривой (рисунок 2.11), максимальное изменение градиента индексов цвета формируется в виде:

$$P_i^{\max} = \left\{ \max\left(\frac{\left| n_{(x_{Hi}+j\Delta_{xi};\, y_{Hi}+j\Delta_{yi})} - n_{(x_{Hi}+(j+1)\Delta_{xi};\, y_{Hi}+(j+1)\Delta_{yi})} \right|}{\Delta_{Li}} \right) \middle|\; j = 0,1,2..j_{\max}-1 \right\}. \qquad (2.34)$$

Координаты уточненных точек геометрии сечения определяются:

$$\begin{cases} X_{P_i^{\max}} = X_0 + j\Delta_{xi} \\ Y_{P_i^{\max}} = Y_0 + j\Delta_{yi} \end{cases} при \max\left(\frac{\left| n_{(x_{Hi}+j\Delta_{xi};\, y_{Hi}+j\Delta_{yi})} - n_{(x_{Hi}+(j+1)\Delta_{xi};\, y_{ni}+(j+1)\Delta_{yi})} \right|}{\Delta_{Li}} \right) \middle|\; j = 0,1,2..\, j_{\max}-1, \qquad (2.35)$$

где $\Delta_{Li} = \dfrac{\sqrt{(x_{Ki}-x_{Hi})^2 + (y_{Ki}-y_{Hi})^2}}{j_{\max}}$; $\Delta_{xi} = \dfrac{x_{Ki}-x_{Hi}}{j_{\max}}$; $\Delta_{yi} = \dfrac{y_{Ki}-y_{Hi}}{j_{\max}}$.

В данной работе используются оба приведенных случая. Отличительным признаком является то, что уточнение градиентным методом проводится по предварительно контуру, построенному с помощью функций «0-1» или «0-1-2».

Кроме того, в обоих случаях, задача должна удовлетворять требованию, чтобы сравниваемые градиенты не должны быть определены на одном и том же пикселе. Этот требование осуществляется путем сравнения координат точек.

2.1.4 Выбор опорных пикселей для векторизации геометрии сечения

Для векторизации (интерполяции) геометрия сечения (в виде линий, сплайнов, дужек и др.) необходимо выбрать некоторые пиксели $P_i(x_i, y_i)$. Для этого существуют несколько принципов, в том числе: по шагу пикселя, по пределу изменения угла и по пределу минимального радиуса.

Выбор опорных пикселей по шагу пикселя

Этот метод (рисунок 2.12) часто используется для создания геометрии объектов, которые не слишком сложны, невысокой кривизны, без линий сгиба. Например, сечения обычной геометрии: многоугольник, окружность или дуга с большим радиусом и т.д. Это простейшее решение и самый простой алгоритм, который все еще достигает хороших результатов.

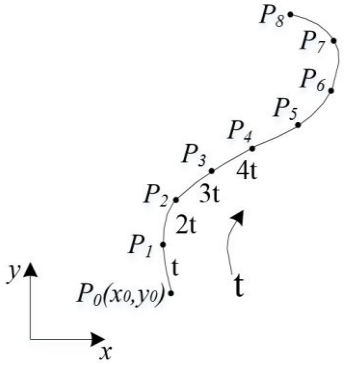


Рисунок 2.12 − Интерполяция геометрии по шагу пикселя

Выбор опорных пикселей по пределу изменения угла

Этот метод (рисунок 2.13) используется для определения опорных пикселей в случаях представления контуров сечения в виде сплайнов, в особенности, когда имеется индивидуальная геометрия с многими сложенными изломанными линиями, для которых необходимы высокие степени приближения.

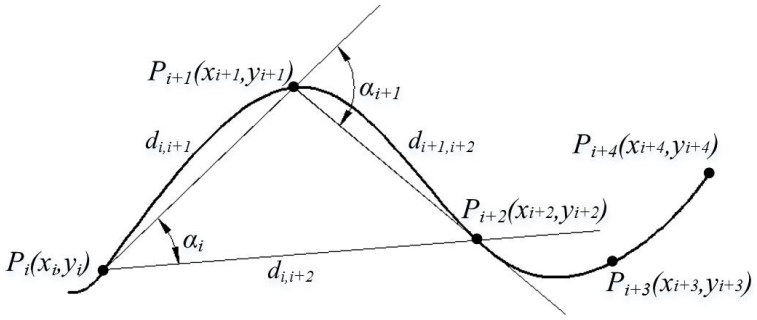


Рисунок 2.13 − Вычисление изменения угла

Математической основой этого подхода [3, 17, 68, 80, 102] является сравнение изменения угла между лучами, построенными из временной начальной точки и следующей последовательной точкой. Если угол изменения недостаточно велик, т.е. эти пиксели находятся вдоль линии, то используются только начальный и конечный пиксели, пропускается пиксель в середине. Этот процесс повторяется до конца набора пикселей контура сечения.

Общая формула определения расстояния между точкам с координатами $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$ имеет вид:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \,. \tag{2.36}$$

Определение угла изменения между лучами (рисунок 2.13):

$$\cos(\alpha_i) = \frac{d_{i,i+1}^2 + d_{i,i+2}^2 - d_{i+1,i+2}^2}{2d_{i,i+1}d_{i,i+2}}; \tag{2.37}$$

$$\alpha_i = \arccos\left(\frac{d_{i,i+1}^2 + d_{i,i+2}^2 - d_{i+1,i+2}^2}{2d_{i,i+1}d_{i,i+2}}\right); \tag{2.38}$$

$$\cos(\pi - \alpha_{i+1}) = \frac{d_{i,i+1}^2 + d_{i+1,i+2}^2 - d_{i,i+2}^2}{2d_{i,i+1}d_{i+1,i+2}}; \tag{2.39}$$

$$\alpha_{i+1} = \arccos\left(-\frac{d_{i,i+1}^2 + d_{i+1,i+2}^2 - d_{i,i+2}^2}{2d_{i,i+1}d_{i+1,i+2}}\right), \tag{2.40}$$

где $d_{i,i+1}$, $d_{i,i+2}$ и $d_{i+1,i+2}$ – длины участков P_iP_{i+1}, P_iP_{i+2} и $P_{i+1}P_{i+2}$; α_i – угол между лучами $\overline{P_iP_{i+1}}$ и $\overline{P_iP_{i+2}}$; α_{i+1} – угол между лучами $\overline{P_iP_{i+1}}$ и $\overline{P_{i+1}P_{i+2}}$.

Пусть $\alpha_{ВП}$ и $\alpha_{НП}$ – пределы изменения угла между лучами. В зависимости от изменения угла $\Delta(\alpha_{i+1}, \alpha_i)$, выбираются точки по заданному критерию:

$$\Delta(\alpha_{i+1}, \alpha_i) = \begin{Bmatrix} \Delta \geq \alpha_{ВП}, выбраны\ P_i, P_{i+1}, P_{i+2} \\ \alpha_{НП} \leq \Delta < \alpha_{П}, выбраны\ P_i, P_{i+2} \\ \Delta < \alpha_{НП}, выбраны\ P_i, P_{i+n-1} \end{Bmatrix},$$

При $\Delta(\alpha_{i+1}, \alpha_i) < \alpha_{НП}$, пропустить точку P_{i+2}, повторить проверку $\Delta(\alpha_{i+n}, \alpha_i)$, остановится когда $\Delta(\alpha_{i+n}, \alpha_i) \geq \alpha_{НП}$. Выбраны точки P_i и P_{i+n-1}. Проверка повторяется с последней выбранной точкой до конца множества точек.

На рисунке 2.14 представлены результаты с пределами $\alpha_{ВП} = 30^\circ$ и $\alpha_{НП} = 0.5^\circ$.

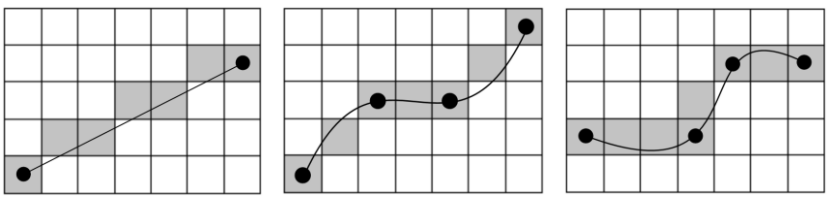
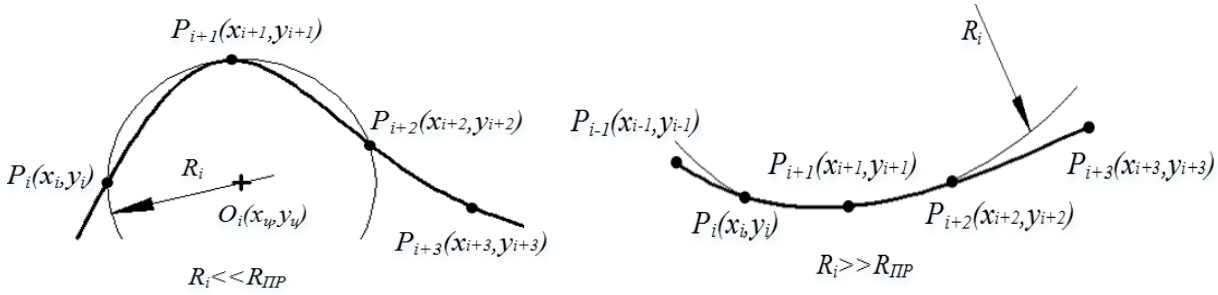


Рисунок 2.14 − Результат алгоритма методом предела изменения угла

В некоторых случаях, при необходимости, количество контрольных пикселей можно добавлять для повышения точности результатов построения геометрии, относительно реальных объектов.

Выбор опорных пикселей по пределу минимального радиуса

Этот метод (рисунок 2.15) компенсирует недостатки метода выбора опорных пикселей по пределу изменения угла между лучами, т.к. если контуры сечения имеют вид извилистой индивидуальной геометрии (не изломанной), то выбор опорных пикселей по пределу изменения угла может привести к погрешностям.



а) б)

Рисунок 2.15 − Варианты изменения радиуса дуги, построенной через три пикселя: а) - $R_i << R_{пр}$ и б) - $R_i >> R_{пр}$

Математическая основа этого подхода [3, 17, 68, 102] базируется на сравнении радиусов дуг, проведенных через три выбранные пиксели: если контур сечения дуги будет меньше предельного значения радиуса $R_{пр}$, тогда выбираются все три пикселя. И наоборот, при радиусе дуги, большем предельного значения радиуса $R_{пр}$, набор этих пикселей обозначает типы линий или сплайнов с небольшим искривлением по краю (рисунок 2.15б). Предельное значение радиуса $R_{пр}$ выбирается опытным путем.

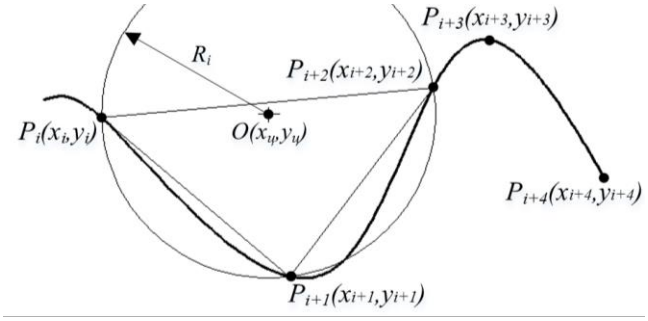


Рисунок 2.16 − Определение радиуса дуги через пиксели P_i , P_{i+1} и P_{i+1}

Окружность (дуга) проходит через три пиксели P_i, P_{i+1} и P_{i+2} (рисунок 2.16). Пусть радиус-векторы точек соответственно 0, a и b. Радиус-вектор r – задающий положение производной точки центра окружности. Тогда точка центра $O(x_ц, y_ц)$ лежит в плоскости $r(a \times b) = 0$, и также лежит в плоскостях, перпендикулярных отрезкам P_iP_{i+1}

и P_iP_{i+2}, делящих эти отрезки пополам. Следовательно: $r.a = a^2/2$ и $r.b = b^2/2$.

Радиус R_i определяется:

$$R^2 = r.r = \frac{a^2b^2(a^2 - 2ab - b^2)}{4|a \times b|^2}. \quad (2.41)$$

От (2.41), имеем: $$R_i = \frac{|a||b||a-b|}{2|a \times b|}, \quad (2.42)$$

где $|a| = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$; $|b| = \sqrt{(x_{i+2} - x_i)^2 + (y_{i+2} - y_i)^2}$;

$|a \times b| = |(x_{i+1} - x_i)(y_{i+2} - y_i) - (y_{i+1} - y_i)(x_{i+2} - x_i)|$;

$|a - b| = \sqrt{(x_{i+1} - x_i - y_{i+1} + y_i)^2 + (x_{i+2} - x_i - y_{i+2} + y_i)^2}$.

Радиус окружности R_i определяется выражением вида:

$$R_i = \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}\sqrt{(x_{i+2} - x_i)^2 + (y_{i+2} - y_i)^2}\sqrt{(x_{i+1} - x_i - y_{i+1} + y_i)^2 + (x_{i+2} - x - y_{i+2} + y_i)^2}}{2[(x_{i+1} - x_i)(y_{i+2} - y_i) - (y_{i+1} - y_i)(x_{i+2} - x_i)]}. \quad (2.43)$$

Пусть $R_П$ – предел минимального радиуса. В зависимости от радиуса внешней окружности R_i, выбираются пиксели по заданному критерию:

$$R_i = \begin{Bmatrix} R_i \le R_П, выбраны\ P_i, P_{i+1}, P_{i+2} \\ R_i > R_П, выбраны\ P_i, P_{i+2} \end{Bmatrix}.$$

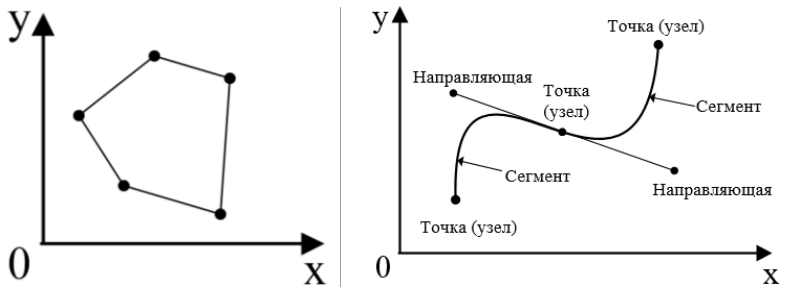
Процесс повторяется до конца набора пикселей контура сечения.

Координаты опорных точек записывается в виде матрицы, используется импортировать в проектную систему, как AutoCAD, для построения геометрию в виде линии, сплайнов. Однако, это результат возможно использовать для построения геометрии с помощью формулы сплайнов, обозначается прямо на исходном растровом изображении.

2.1.5 Векторизация геометрии сечения в системе проектирования

Результат определения уточненной геометрии и выбора опорных пикселей используется для векторизации (интерполяции) геометрии сечения в систему проектирования в виде линий и сплайнов. Для примера, используется система AutoCAD.

Для ДТТ простой геометрической формы векторизации (интерполяции) выполняется путем соединения базовых точек отрезками прямых линий. Этот способ называется линейной интерполяцией (рисунок 2.17а).



а) б)

Рисунок 2.17 − Линейная векторизация (интерполяция) (а)
и сплайн-интерполяция геометрии сечения (б)

В реальности, ДТТ природного происхождения имеет более сложную геометрию, определяемую как индивидуальная геометрия. Поэтому, более приемлемой является интерполяция проводимая с помощью некоторой гладкой кривой, и называется сплайн-интерполяцией (рисунок 2.17б).

Существует много формул сплайнов. Самыми известными из них является: B-сплайн, кривые Безье, кубические сплайны, параметрические сплайны и др. Каждый из них имеет свои достоинства и недостатки [2, 23, 102, 103]. В данной работе используются кубические кривые Безье и B-сплайны.

Кривые Безье является частным случаем многочленов Бернштейна и представляется собой параметрическую кривую, которая задается выражением:

$$B(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i b_{i,n}(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{2.44}$$

где n – количество опорных точек; i – номер опорной точки; t – шаг; P – координата опорной точки; $b(t)$ – базисная функция кривой Безье (полином Бернштейна).

Базисная функция b(t) определяет вес опорной точки:

$$b_{i,n}(t)=\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}. \tag{2.45}$$

Кривую Безье можно построить для любого числа точек, но вычислять полиномы десятитысячной степени сложно. Поэтому чаще используется упрощенный подход. Все опорные точки разбивают на группы, по 4 штуки в каждой [51]. Далее, для каждой группы строят кривые Безье и соединяют полученные сегменты в единую кривую. Такой подход, при моделировании геометрии, проще с точки зрения эффективности, поддержки и расчётов (рисунок 2.18).

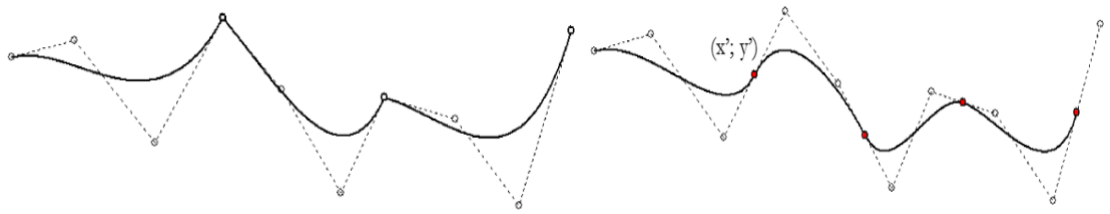


Рисунок 2.18 − Построение непрерывной кривых Безье

Координаты кривой для четырех точек описываются в зависимости от параметра t∈[0,1], входящего в выражение:

$$P = (1-t)^3P_1 + 3(1-t)^2tP_2 + 3(1-t)t^2P_3 + t^3P_4, \quad (2.46)$$

где вместо P_i нужно подставить координаты i-й опорной точки (x_i, y_i).

Чтобы составная кривая Безье была геометрически непрерывной, необходимо, чтобы каждые три точки в месте стыковки лежали на одной прямой. Составную кривую построим из наборов элементарных кривых Безье для четверок вершин (рисунок 2.18).

Кривые Безье имеют следующие преимущества [112]: результат построения геометрии имеет высокие параметры сходимости; при масштабировании и изменении пропорций кривой не нарушается её стабильность (гладкость); обмен местами между начальной и конечной точками (изменение направления траектории) не влияет на форму кривой. Благодаря этим преимуществам представленный метод имеет широкое применение в компьютерной графике для моделирования гладких линий. В данной работе интерполяция геометрии кривыми Безье используется на опорных точках, выбранных после уточнения геометрии сечения, прямо на его растровом изображении.

В некоторых случаях, кроме кривой Безье, в данной работе, удобно, в дополнение, использовать построение кривых на основе B-сплайна третьей степени. Представленное обстоятельство определяется тем, что этот метод является основным при построении сплайнов в системе проектирования AutoCAD.

2.1.6 Корректировка положения центра тяжести сечений

В результате сканирования, ось, проходящая через центры тяжести пакета сечения, чаще всего не совпадает с осью системы координат (рисунок 2.19). Для

некоторых типов задач, например, для изучения чистого сжатия или растяжения, несовпадающие оси сечений, при действующей на ДТТ осевой нагрузки, вызывают напряжения изгиба. Таким образом, при необходимости, проводится корректировка положения центров тяжести сечений по осям Ох и Оу [68].

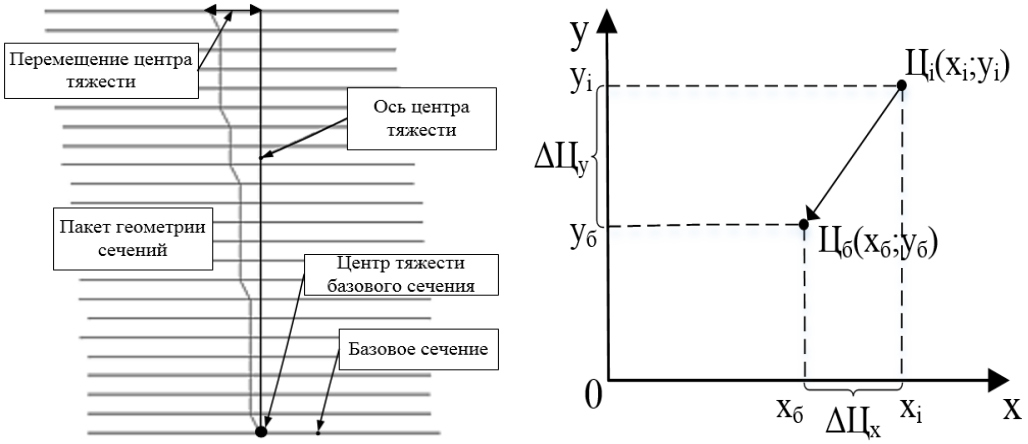


Рисунок 2.19 − Корректировка положения центра тяжести сечений

При этом, нижнее сечение назначается в качестве базового. Перемещение по Ох, Оу центра тяжести *i*-ого сечения производится в точку центра тяжести базового сечения определяется выражением (2.47):

$$\begin{cases} \Delta u_x = x_i - x_б \\ \Delta u_y = y_i - y_б \end{cases}, \tag{2.47}$$

где $Ц_i(x_i,y_i)$ – координаты центра тяжести *i*-ого сечения; $Ц_б(x_б,y_б)$ – координаты центра тяжести базового сечения; Δu_x, Δu_y – значения перемещения центра тяжести по Ох и Оу.

В большинстве случаев анализа НДС КЭ модели корректировки положения центра тяжести сечений не требуется.

2.2 Основные математические зависимости для моделирования неоднородности механических характеристик материала реальных деформируемых твердых тел

В практике, механические характеристики материала определяются как осредненные значения для ДТТ в целом, полученные на образцах в условиях стандартных испытаний [13, 65]. В реальности же, для ДТТ, имеющих высокую

степень неоднородности материала, например, ДТТ природного происхождения, изменение механических характеристик материала в них сильно отличается от их усредненного значения.

В настоящей работе, используется способ определения реального изменения механических характеристик материала ДТТ [63], основанный на использовании, с одной стороны, пиксельной характеристики растровых изображений сканирования КТ, с другой стороны, данные, полученные в результате натурных испытаний стандартных образцов. Результаты использования такого подхода позволяет осуществить возможность моделировать эти неоднородности при построении КЭ модели реальных ДТТ.

В данном разделе рассматриваются основные математические зависимости для определения: - экспериментального (среднего) значения механических характеристик; - среднего значения и математического ожидания индексов цвета пакета растровых изображений сканирования; - зависимости механических характеристик от значений индексов цвета; индекса цвета в узлах конечных элементов; и - механических характеристик материала в конечных элементах.

2.2.1 Экспериментальные значения механических характеристик

Механические характеристики, в виде модуля упругости и коэффициента Пуассона, полученные в эксперименте [13, 65], используются в качестве усреднённых (интегральных) характеристик. Экспериментальные исследования, проведенные на растяжение (сжатие) стандартных образцов, показывают, что абсолютные удлинения, имеют место в начальной стадии растяжения (сжатия), остаются прямо пропорциональными растягивающей (сжимающей) силе и зависят от первоначальной длины образца l_0 и площади поперечного сечения А:

$$\Delta l = \frac{Fl_0}{EA}. \qquad (2.48)$$

Коэффициент E носит название модуля упругости, а зависимость (2.48) закон Гука в абсолютных значениях. Чем больше значение Е, тем меньше, при прочих равных условиях, продольная деформация. Из формулы (2.48) следует, что

модуль упругости E определяется выражением вида:

$$E = \frac{Fl_0}{A\Delta l} = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \tag{2.49}$$

где E – модуль упругости (МПа); σ – нормальное напряжение в сечении образца; Δl – изменение его длины; ε – деформация; A – площадь поперечного сечения образца.

Материал природного происхождения, например, бедренная костная ткань, как неоднородная (анизотропная) среда, имеет особенности при определении модуля упругости с точки зрения механики ДТТ. В отличии от стандартных испытаний металлических образцов, при исследовании неоднородных (анизотропных) материалов, необходимо учитывать ряд факторов, оказывающих существенное влияние на характеристики упругих, деформативных и прочностных свойств материала [48]. В этом числе, механическими факторами является: вид испытания, форма и размеры образца, скорость нагружения, ориентация образца относительно главных осей анизотропии и условия среды во время эксперимента.

На рисунке 2.20 представлены экспериментальное условие и результат исследования неоднородности характера деформирования котной ткани [46, 84].

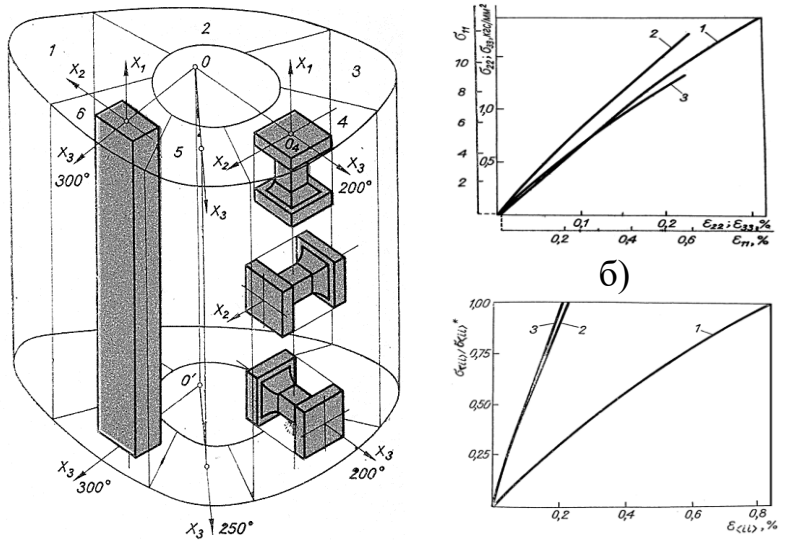


Рисунок 2.20 − Ориентация образцов экспериментального исследования механических характеристик материала кости (а), кривые деформирования при растяжении осей x_1, x_2, x_3 (б) и кривые деформирования $\sigma\langle ii\rangle / \sigma^*\langle ii\rangle - \varepsilon\langle ii\rangle$ (в)

Результат исследования [46, 84] показывает, что разрушающее напряжение вдоль продольной оси кости значительно выше, чем вдоль осей x_2 и x_3. Отношение

$\sigma_{11}^{*}:\sigma_{22}^{*}:\sigma_{33}^{*}=1:0{,}13:0{,}10$, характеризующее степень анизотропии (неоднородности) разрушающих напряжений костной ткани при растяжении; при сжатии, анизотропия значительно менее выраженная $\sigma_{11}^{*}:\sigma_{22}^{*}:\sigma_{33}^{*}=1:0{,}73:0{,}66$ [84]. Такие отношения неоднородности связаны с необходимыми особенностями при строении моделей ДТТ, в частности, из костной ткани [123, 128], а также для любых неоднородных ДТТ.

При построении КЭ моделей ДТТ природного происхождения для исследования напряжения чистого растяжения (сжатия), опытное значение модуля упругости определяется по ориентациям образцов при проведении исследования (продольному, осевому, радиальному):

$$E_{ОП} = E_i . \tag{2.50}$$

Однако, для общих типов задач, в которых построение и проведение анализа КЭ моделей ДТТ в целом, опытное значение модуля упругости определяется как усреднением значений, полученных из всех ориентаций:

$$E_{ОП} = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{3} . \tag{2.51}$$

2.2.2 Определение среднего значения индекса цвета сечения

Усреднённые (интегральные) механические характеристики, полученные при натурных испытаниях образцов, в данной работе уточняются относительно матрицы пикселей растрового изображения, полученного посредством сканирования КТ, определяются выражением вида:

$$n_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{q} n_i}{q} , \tag{2.52}$$

где n_i – значение индекса цвета каждого из пикселей в рассматриваемом сечении объекта; q – количество пикселей рассматриваемого сечения.

Все значения индексов цвета сечения сохраняются в виде матрицы, поэтому формула (2.52) можно представить в другом виде:

$$n_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} I(i, j)}{mn} . \tag{2.53}$$

2.2.3 Определение математического ожидания индексов цвета

Однако, для большого объема данных сканирования КТ ДТТ, имеющих высокую степень неоднородности структуры, для определения среднего значения индекса цвета, необходимо использовать зависимость математического ожидания. То есть, $n_{ср}$ определяется здесь как среднестатистическая величина.

Высокая степень неоднородности механических характеристик характеризуется следующим (рисунок 2.21):

- распределение индексов цвета пикселей не может быть одинаковым в разных сечениях пакета растровых изображений сканирования ДТТ;

- в разных растровых изображениях сканирования пакета сечений ДТТ имеется разное количество пикселей в зоне исследования;

- разное количество пикселей, имеющих одинаковое значение индекса цвета в разных растровых изображениях сканирования сечений;

- силовая часть и не силовая часть, показываются индексами цвета пикселей, разными в разных растровых изображениях сканирования сечений ДТТ.

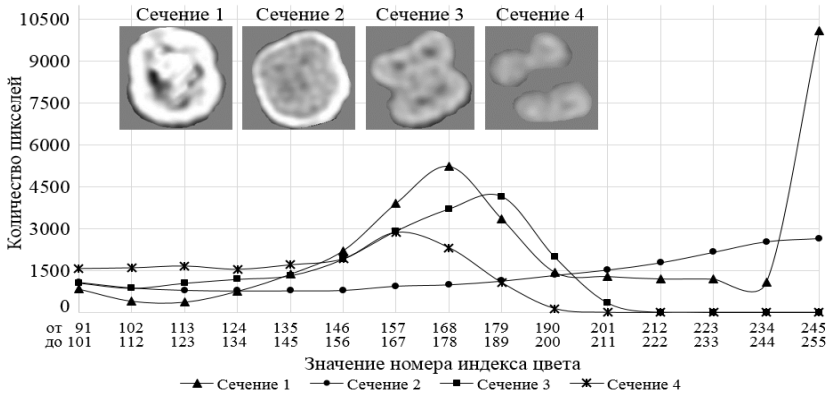


Рисунок 2.21 − Неравномерности между растровыми изображениями

Таким образцом, при построении математических моделей ДТТ, в настоящей работе предлагается комбинированный подход, определяемый двумя обстоятельствами:

- используется простое среднее значение величин индексов цвета по формулам (2.52) и (2.53) когда растровые изображения имеют гладкую степень неравномерности в сечении и между ними;

- используется математическое ожидание [17, 20] когда растровые изображения имеют явную степень неравномерности в сечении и между ними.

Математическое ожидание $a = E(\xi)$ характеризует центр закона распределения величин, то есть ту точку на числовой оси, около которой следует ожидать наиболее вероятное появления случайной величины. Для дискретной случайной величины математическое ожидание определяется формулой:

$$a = E(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i p_i \,. \tag{2.54}$$

Интервал изменения дискретной величины или дисперсия σ^2 и среднее квадратическое отклонение σ характеризуют рассеивание (разброс) значений случайной величины около ее математического ожидания – возможные отклонения – "размазанность" кривой плотности распределения. Чем больше дисперсия, тем шире "колокол" этой функции. Для дискретной случайной величины дисперсия определяется формулами:

$$\sigma^2 \equiv D(\xi) \equiv E(\xi - a)^2 = \sum_{i=1}^{M} (\xi_i - a)^2 p_i \,. \tag{2.55}$$

а для непрерывной случайной величины – формулой:

$$\sigma^2 \equiv D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 f(x) dx \,. \tag{2.56}$$

Интервал для используемого формата изображения JPEG определяется значением 256, однако, для другого формата он может быть изменен, поэтому учитывается в настоящей работе.

Из формулы (2.54), математическое ожидание индексов цвета для пакета растровых изображений сечений определяется выражением вида:

$$n_{cp} = E(n) = \sum_{i=1} n_i p_i(n_i) \,, \tag{2.57}$$

где n_i – значение индекса цвета на интервале I; $p_i(n_i)$ – вероятность появления n_i (значения индекса цвета) на интервале I.

2.2.4 Определение зависимости механических характеристик от значений индексов цвета

Определение зависимости механических характеристик, в виде модуля упругости, от значения индексов цвета осуществляется с использованием специального весового коэффициента, устанавливающего зависимость между средним

значением индексов цвета $n_{ср}$ и опытным (экспериментальным) значением $E_{ОП}$. На рисунке 2.22 представлено реальное изменение механических характеристик, в том числе это изменение представлено по толщине стенки кости.

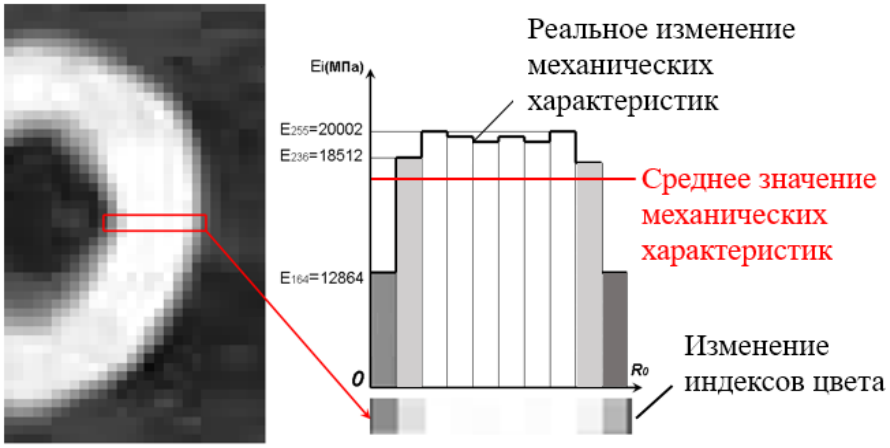


Рисунок 2.22 − Моделирование изменения механических характеристик от значений индексов цвета

Среднее значение модуля упругости ($E_{ОП}$), полученное в эксперименте на сжатие (растяжение) фрагмента бедренной кости человека, используется при интерпретации изменений механических характеристик по пиксельной характеристике [63]. Тогда, весовой коэффициент, определяющий переход от индекса цвета пикселя к модулю упругости, определяется выражением вида:

$$k_E = \frac{E_{ОП}}{n_{ср}}. \tag{2.58}$$

Таким образом, присвоение пикселям, каждый из которых имеет соответствующий индекс цвета, значений модуля упругости материала E_i, будет производиться с помощью весового коэффициента k_E, по формуле:

$$E_i = n_i\, k_E\,, \tag{2.59}$$

где E_i – значение модуля упругости, соответствующее значению номера индекса цвета n_i; k_E – весовой коэффициент модуля упругости.

Линейная зависимость модуля упругости от индексов цвета

Материал бедренной кости человека допустимо характеризовать как имеющий не высокий градиент неоднородности. Для такого типа материала может быть построена с использованием линейного закона (2.59), для идентификации которого используется единственное постоянное значение весового коэффициента модуля

упругости. Однако, в природе и технике подобные материалы встречается редко.

Чаще всего материал ДТТ по механическим характеристикам имеет некоторую структуру, в которой можно выделить несколько областей, каждая из которых имеет свой, отличный от других диапазон изменения модуля упругости. Например, структура зуба человека состоит из областей: эмали, дентина и материала пористого канала. То есть, на растровом изображении сканирования (рисунок 2.23) показаны разные области со своим диапазоном изменения индексов цвета: эмаль [191-255], дентин [70-190], материал пористого канала [16-69].

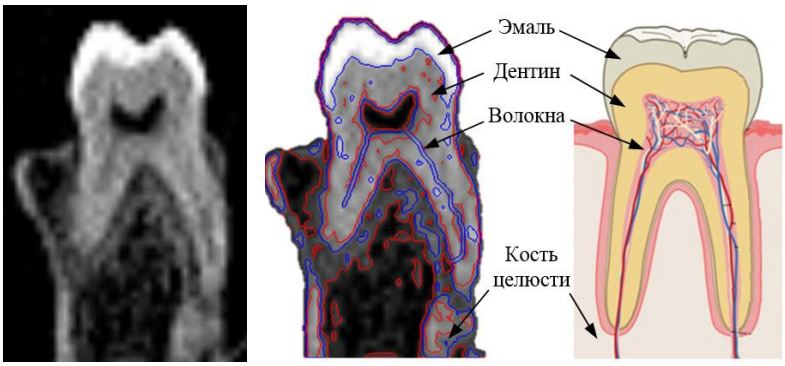


Рисунок 2.23 − Структура зуба по механическим характеристикам

Усредненные значения модуля упругости трех областей структуры зуба, полученные в экспериментах, представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Опытные значения механических характеристик структуры зуба

Авторы	Модуль упругости эмали, (*МПа)*	Модуль упругости дентина, (*МПа)*	Модуль упругости кости, (*МПа)*
Чуйко А. Н. [109]	$4{,}00.10^4$	$1{,}56.10^3$	$6{,}89.10^3$
Zaytsev D [166, 167]	$5{,}64.10^3$	$4{,}04.10^3$	-
Зайцев Д. В. [33]	$5{,}49.10^3$	$3{,}67.10^3$	-

Другим характерным примером неоднородности со структурой нескольких областей, является композитный материал. На рисунке 2.24 представлено растровое изображение, полученное под микроскопом, где видна структура материала в виде: волокна и матрицы. То есть, композитный материал состоит из волокна и матрицы и их механические характеристики сильно отличаются друг от друга. В работе [91] приводятся данные о модулях упругости волокнистого композитного материала, где для стеклянного волокна он составляет порядка – E = 50 ГПа, для эпоксидной матрицы – E = 2,5 ГПа.

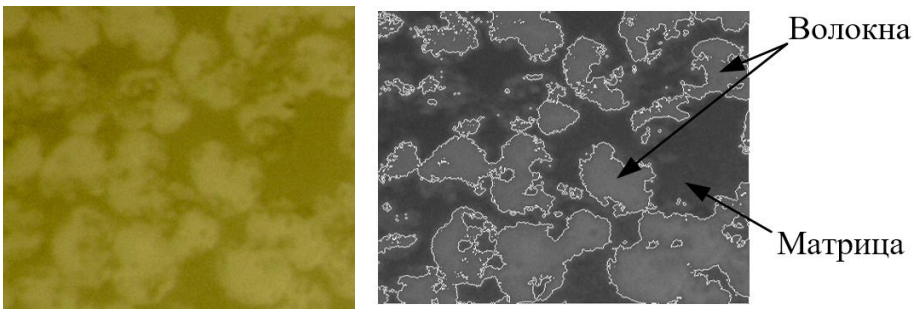


Рисунок 2.24 − Структура композитного материала
по механическим характеристикам

Таким образом, для материалов со структурой нескольких областей, невозможно использовать одно значение весового коэффициента модуля упругости для ДТТ в целом. Для решения этой проблемы предлагается, в каждой области структуры ДТТ, использовать свое значение весового коэффициента. В этом случае, зависимость изменения модуля упругости ДТТ от индексов цвета представляется в виде кусочно-линейной функции (рисунок 2.25).

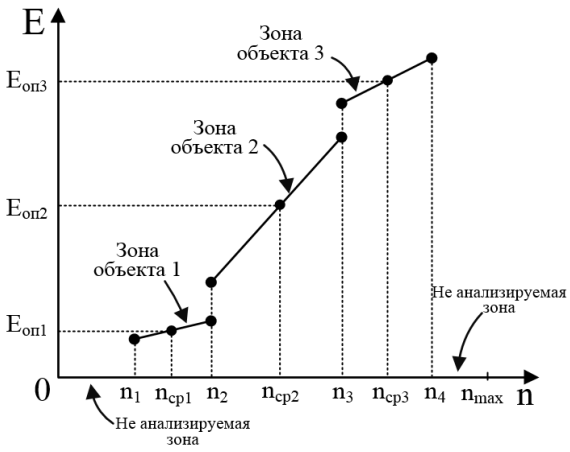


Рисунок 2.25 − Кусочно-линейная функция зависимости изменения
модуля упругости ДТТ от значений индексов цвета

Таким образом, для каждой области структуры ДТТ, её весовой коэффициент определяется соотношением вида:

$$k_{Ei} = \frac{E_{ОП\,i}}{n_{ср\,i}}, \tag{2.60}$$

где i изменяется от 1 до m; m –количество областей структуры материала, имеющих свой, отличный от других диапазон изменения модуля упругости; $E_{ОПi}$ – среднее значение модуля упругости каждой области ДТТ, определяется по формуле (2.49); n_{cpi} – среднее значение индексов цвета, определяется по формулам (2.53) и (2.57).

Кусочно-линейная функция зависимости изменения модуля упругости от значений индексов цвета E_j(n) для ДТТ в целом записывается в виде:

$$E_j(n) = \begin{cases} n\dfrac{E_{ОП\,i}}{n_{ср\,i}}, n \in [n_i, n_{i+1}] \\ 0 \qquad\quad , n \notin [n_i, n_{i+1}] \end{cases}. \tag{2.61}$$

Нелинейная зависимость модуля упругости от индексов цвета

Использование кусочно-линейной функции затруднительно с точки зрения эффективности вычислительного алгоритма, например по следующим причинам: - чем больше количество областей структуры ДТТ, тем больше количество весовых коэффициентов, и тем сложнее вычисление модуля упругости для узлов и конечных элементов; - переходные значения индексов цвета между областями ДТТ представляются собой не одно значение, а диапазоны значений индексов цвета на растровом изображении (рисунок 2.26); и другие.

Для решения представленной проблемы, предлагается построить на основе кусочно-линейной функции нелинейную зависимость в виде сплайна, например кубического. Представленная нелинейная зависимость модуля упругости ДТТ от индексов цвета носит универсальный характер для объединения нескольких зон с различным порядком механических характеристик (рисунок 2.26).

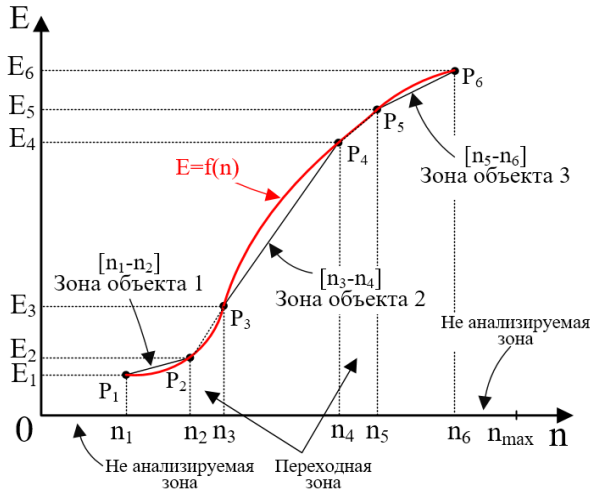


Рисунок 2.26 − Непрерывная функция зависимости модуля упругости ДТТ от значений индексов цвета

Таким образом, вычисление значения модуля упругости ДТТ, определяется в виде непрерывной функции от значения индекса цвета, имеет вид:

$$E = f(n). \tag{2.62}$$

Для реализации формулы (2.62), необходимо построить интерполяционную функцию через полученные точки кусочно-непрерывной функции, которые являются пределами индексов цвета, обозначающих зоны разных областей структуры ДТТ (рисунки 2.25 и 2.26). Через набор точек $P_i(E_i, n_i)$ происходит построение интерполяционной функции $E = f(n)$. Эти координаты определяются выражениями вида:

$$E_i = \frac{E_{ОПi}}{n_{cpi}} . n_i , \tag{2.63}$$

$$E_{i+1} = \frac{E_{ОПi}}{n_{cpi}} . n_{i+1} , \tag{2.64}$$

где i = 1, 3, 5 … – нечетное целое число, обозначающее начальный индекс цвета областей структуры ДТТ (рисунок 2.26).

Для построения функции (2.62) в настоящей работе используется кубический сплайн, основанный на кривых Безье [23], так как он обеспечивает меньшую ошибку по сравнению с линейной интерполяцией. Формула построения и условия непрерывности кривых Безье рассмотрена в разделе 2.1.5.

2.2.5 Определение индекса цвета в узлах конечных элементов

Дальнейшая обработка данных сканирования связана с передачей значений индексов цвета от пикселей к узлам сетки КЭ модели ДТТ, проводимая в соответствии с их взаимным расположением.

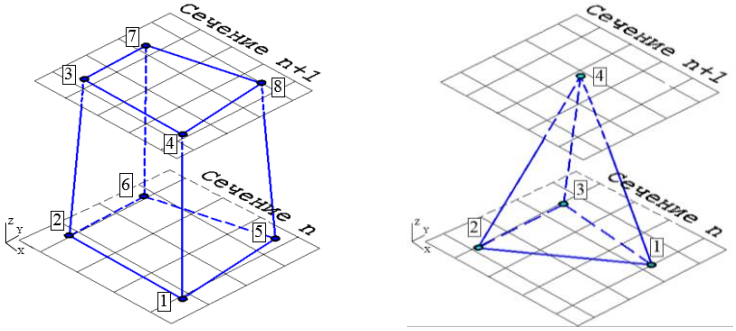


Рисунок 2.27 − Узлы конечных элементов находятся в сечении

Различаются два случая. Первый из них, самый простой (рисунок 2.27), имеет место когда узлы КЭ сетки полностью лежат в плоскостях с растровым изображением и размер конечных элементов равен дистанции между ними. Присвоение узлам КЭ сетки значений индексов цвета от пикселей здесь осуществляется пря-

мым совпадением узла КЭ сетки с пикселем, по совпадающим координатам.

Однако, размер реального объекта исследования не соответствует с размером обозначения на растровом изображении, так как в зависимости от качества и размеров записывающих растровых изображений сканирования.

Таким образом, совмещение координат узлов сетки КЭ модели с координатами пикселей растрового изображения проводится с помощью масштабных коэффициентов по направлениям Ox, Oy и Oz.

Координаты узлов, с уточнением положения центров тяжести сечений, осуществляются с использованием зависимостей:

$$\begin{cases} x_u = (x_p + \Delta u_x)k_x \\ y_u = \left[h - (y_p + \Delta u_y)\right]k_y \\ z_u = z_p k_z \end{cases}, \qquad (2.65)$$

где (x_p, y_p, z_p) – координаты узлов в *мм*; (x_u, y_u, z_u) – координаты узлов в растровом изображении (пиксели); k_x, k_y, k_z – коэффициенты перевода из *мм* в пиксели по осям Ox, Oy и Oz; h – высота изображения в *мм*; Δu_x, Δu_y – перемещения центра тяжести по Ox и Oy.

При корректировке центра тяжести сечения изменяются значения x и y, а координата z (шаг сечений в модели) остается неизменной (k_z = 1). И, в общем случае, коэффициенты k_x, k_y одинаковые.

Второй случай (рисунок 2.28) сложнее и является общим для решения задачи определения индекса цвета узлов конечных элементов. Он связан с тем, что узлы КЭ сетки по их координатам лежат между соседними плоскостями с растровым изображением, но не совпадают с ними.

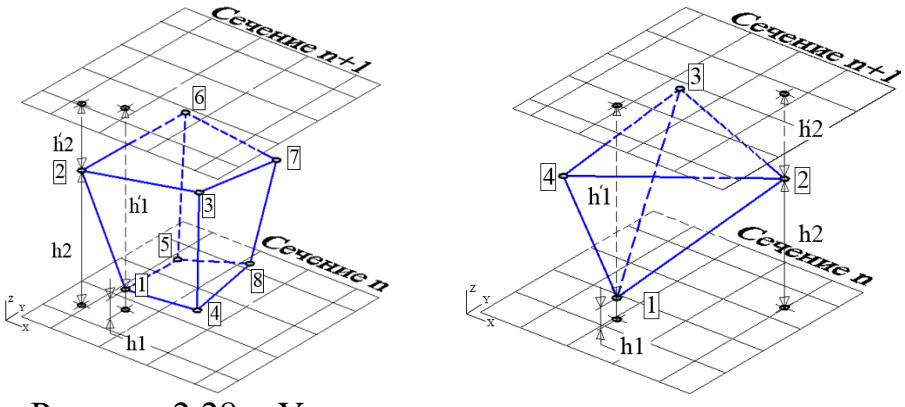
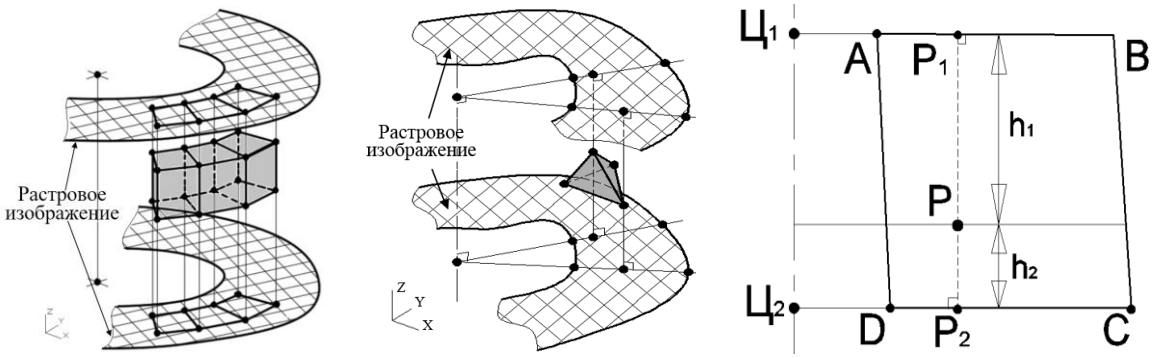


Рисунок 2.28 – Узлы конечных элементов находятся в пространстве между сечениями

В этом случае, используется прямая интерполяция. Более простой её вариант возможен, если соседние плоскости растрового изображения имеют общую ось и, по форме и размерам, отличаются в незначительной степени (рисунки 2.29а и 2.29б). Индекс цвета узла *P* сетки объемной КЭ модели определяется интерполяцией между соответствующими пикселями P_1 и P_2 соседних плоскостей, в соответствии с расстояниями h_1 и h_2 на прямой, параллельной оси между сечениями (рисунок 2.29в). На рисунке 2.29б представлен наиболее общий случай с использованием конечных элементов типа тетраэдр.



а) б) в)

Рисунок 2.29 − Интерполяция по прямой, параллельной оси *Z*

Основными этапами алгоритма этой интерполяции [36] являются:

- определение координат узла *P* в объемной КЭ модели: – $P(x_p; y_p; z_p)$;

- построение проекций $P_1(x_p;y_p;z_1)$ и $P_2(x_p;y_p;z_2)$ на соседние плоскости сечений;

- определение абсолютных (h_1 и h_2) и относительных коэффициентов пропорции (k_1 и k_2):

$$h_1 = | z_1 - z_p |,\ h_2 = | z_2 - z_p |; \tag{2.66}$$

$$k_1 = \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{h_1}{s},\ k_2 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} = \frac{h_2}{s} = 1 - k_1, \tag{2.67}$$

где s – шаг положения плоскостей растрового изображения при сканировании.

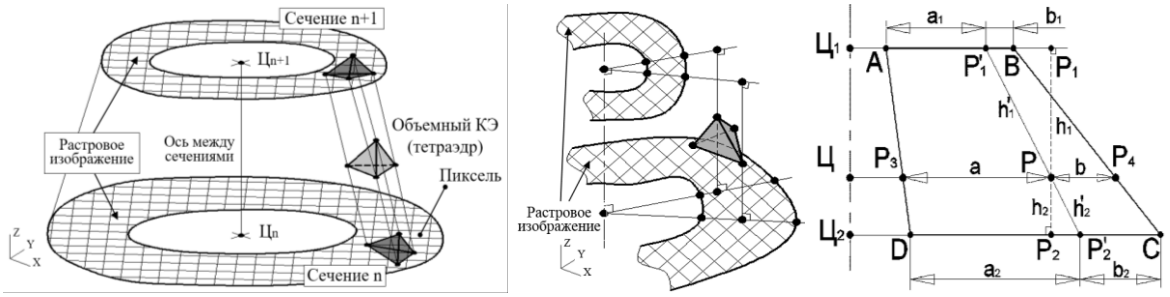
- определение номера индекса цвета пикселей n_{P1} и n_{P2} в точках P_1 и P_2, (рисунок 2.29в) соседних плоскостей растрового изображения;

- определение интерполяцией индекса цвета n_P в узле *P* по формуле:

$$n_P = k_1 n_{P1} + k_2 n_{P2}. \tag{2.68}$$

- определение модулей упругости в узлах КЭ сетки, с использованием весового коэффициента модуля упругости k_E [37, 63, 64].

Ещё более сложная интерполяция (рисунок 2.30) используется когда соседние сечения с растровым изображением имеют между собой существенные различия по форме и размерам, а также характеризуются появлением в них дополнительных внутренних контуров и других геометрических особенностей. Чаще всего эта интерполяция (рисунок 2.30а) используется, когда проекция узла КЭ модели P_1 не находится в зоне сечения с растровым изображением объекта. То есть, когда по прямой параллельной вертикальной оси Z интерполяция индексов цвета невозможна (рисунок 2.30б).



а) б) в)

Рисунок 2.30 − Интерполяция по прямой, наклонной к оси Z

Для решения представленной проблемы, в настоящее работе предложена интерполяция по прямой, наклонной к оси каркасной модели исследуемого объекта. Угол наклона к оси Z (рисунок 2.30в) определяется пропорциями отрезков a_1, b_1 и a_2, b_2. Основными этапами алгоритма этой интерполяции являются [36]:

- определение координат узла Р в объемной КЭ модели: – Р (x_p; y_p; z_p), а также для точек центра тяжести соседних сечений Ц$_1$ ($x_ц$; $y_ц$; z_1), Ц$_2$ ($x_ц$; $y_ц$; z_2);

- построение проекций P_1 (x_p, y_p, z_1) и P_2 (x_p; y_p; z_2) относительно прямой, параллельной оси Z (рисунок 2.30в);

- построение линий Ц$_1$Р$_1$ и Ц$_2$Р$_2$, где направляющий вектор $\overline{Ц_1P_1} = \overline{Ц_2P_2} = (x_p - x_ц; y_p - y_ц; 0)$, параметрические уравнения Ц$_1$Р$_1$ и Ц$_2$Р$_2$ в пространстве записываются в виде:

$$\overline{Ц_1P_1}\begin{cases} x = x_p + (x_p - x_ц)t_1 \\ y = y_p + (y_p - y_ц)t_1 \\ z = z_1 \end{cases}; \quad \overline{Ц_2P_2}\begin{cases} x = x_p + (x_p - x_ц)t_2 \\ y = y_p + (y_p - y_ц)t_2 \\ z = z_2 \end{cases}. \qquad (2.69)$$

- определение контура пересечения ABCD, где АВ – пересечение Ц$_1$Р$_1$ с геометрией первого сечения, CD – пересечение Ц$_2$Р$_2$ с геометрией второго сечения;

- построение линии (рисунок 2.30в) находящейся в плоскости ABCD, проходящей через узел P параллельно AB и CD:

$$\overline{ЦР}\begin{cases} x = x_p + (x_p - x_ц)t_3 \\ y = y_p + (y_p - y_ц)t_3 \\ z = z_p \end{cases}. \qquad (2.70)$$

- определение точек пересечения ЦР с AD и BC – P_3 и P_4:

$$P_3\begin{cases} x = x_A + (x_D - x_A)\dfrac{h_1}{h_2 + h_1} \\ y = y_A + (y_D - y_A)\dfrac{h_1}{h_2 + h_1} \\ z = z_A + (z_D - z_A)\dfrac{h_1}{h_2 + h_1} \end{cases}, \quad P_4\begin{cases} x = x_B + (x_C - x_B)\dfrac{h_1}{h_2 + h_1} \\ y = y_B + (y_C - y_B)\dfrac{h_1}{h_2 + h_1} \\ z = z_B + (z_C - z_B)\dfrac{h_1}{h_2 + h_1} \end{cases}, \qquad (2.71)$$

при $P_3 \equiv A$, то $h_1 = 0$, $h_2 = h_1 + h_2 = s$ и $\dfrac{h_1}{h_1 + h_2} = 0$,

при $P_3 \equiv D$, то $h_1 = h_1 + h_2 = s$, $h_2 = 0$ и $\dfrac{h_1}{h_1 + h_2} = 1$.

- определение отношения:

$$k = \frac{a}{a+b} = \frac{\overline{P_3P}}{\overline{P_3P} + \overline{PP_4}} = \frac{\overline{P_3P}}{\overline{P_3P_4}}. \qquad (2.72)$$

- определения координат точки $P_1^{'}$ и $P_2^{'}$ по отношениям $\dfrac{\overline{AP_1^{'}}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DP_2^{'}}}{\overline{DC}} = k$:

$$P_1^{'}\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)k \\ y = y_A + (y_B - y_A)k \\ z = z_1 \end{cases}; \quad P_2^{'}\begin{cases} x = x_D + (x_C - x_D)k \\ y = y_D + (y_C - y_D)k \\ z = z_2 \end{cases}. \qquad (2.73)$$

- присвоение номера индекса цвета пикселя $n_{P1'}$ и $n_{P1'}$ узлам КЭ сетки P'_1 и P'_1 сечения от соответствующего по координатам пикселя растрового изображения [37, 63];

- интерполяция индекса цвета n_P в точке P определяется по формуле:

$$n_P = k_1 n_{P_1^{'}} + k_2 n_{P_2^{'}}, \qquad (2.74)$$

где $k_1 = \dfrac{h_1}{h_1 + h_2} = \dfrac{h_1}{s}$; $k_2 = \dfrac{h_2}{h_1 + h_2} = \dfrac{h_2}{s} = 1 - k_1$.

В большинстве случаев достаточно точность обеспечивается при использовании значения индекса цвета в месте проекции узла конечных элементов. Однако, это не всегда приемлемо по следующим причинам:

- в нескольких случаев, в месте проекции узлов в сечении, изменение значения индексов цвета неясно (слабо);

- вероятность того, что точка проекции узла лежит в центре пикселя растрового изображения сечения невысока.

Поэтому предлагается еще два подхода определения индекса цвета узлов на растровом изображении: на основе усреднённого значений индексов цвета соседних узлов и с использованием зависимости математического ожидания.

Усреднённое значение индексов цвета узла

Усреднённое значение индексов цвета (рисунок 2.31), присваиваемых узлу КЭ сетки, определяется выражением вида:

$$n_{P_i} = \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{9} n_j \ , \qquad (2.75)$$

где P_i (x,y) – номер (координаты) узла КЭ сетки в растровом изображении сечения; n_j – значение индекса цвета соседних пикселей узла P_i, координаты n_1 (x,y), n_2 (x+1,y), n_3 (x+1,y-1), n_4 (x,y-1), n_5 (x-1,y-1), n_6 (x-1,y), n_7 (x-1,y+1), n_8 (x,y+1), n_9 (x+1,y+1) – соседние пиксели проекции узла P_i в растровом изображении сечения.

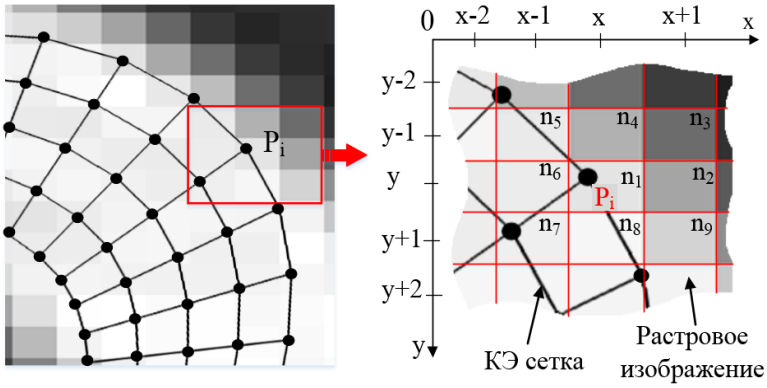


Рисунок 2.31 – Усреднённое значение индексов цвета соседних пикселей узла

Математическое ожидание индексов цвета узла

Более точное значение индекса цвета, присеваемое узлу КЭ сетки, определяется на основе использования выражения для определения математического ожидания [20]. Для рассматриваемой задачи, математическое ожидание индексов цвета узла определяется выражением вида:

$$n_{Pi} = \sum_{j=1}^{4} n_j \frac{d_j}{d} \ , \qquad (2.76)$$

где n_{Pj} – номер (координаты) узла КЭ сетки в растровом изображении сечения; n_j – значения индекса цвета соседнего пикселя, ближайшего и соответствующему узлу P_i; d – сумма расстояния между координатами узла P_i и центрами пикселей, определяется выражением вида (рисунок 2.32):

$$d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 . \qquad (2.77)$$

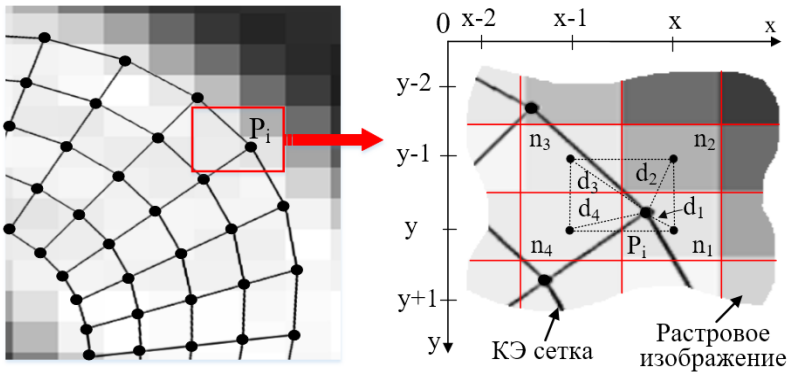


Рисунок 2.32 − Математическое ожидание индексов цвета узла

В качестве примера, приведено определение значения индекса цвета узла P (номер 171 в КЭ модели бедренной кости):

- определение по формуле усреднённого значения индекс цвета:

Таблица 2.3

Значения индексов цвета окружающих пикселей проекции P_0

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9
191	165	108	140	197	199	252	212	174

$$n_{Pi} = \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{9} n_j = \frac{1}{9}(191+165+108+140+197+199+252+212+174) = 159,89 .$$

- определение по формуле математического ожидания:

Таблица 2.4

Значения индексов цвета окружающих пикселей узла и их расстояния от проекции P_0

$d_1 = 0,39$	$d_2 = 0,73$	$d_3 = 1,09$	$d_4 = 0,90$
$n_1 = 191$	$n_2 = 140$	$n_3 = 197$	$n_4 = 199$

$$d = 0,39 + 0,73 + 1,09 + 0,90 = 3,11;$$

$$n_{Pi} = \sum_{j=1}^{4} n_j \frac{d_j}{d} = \frac{0,39}{3,11}191 + \frac{0,73}{3,11}140 + \frac{1,09}{3,11}197 + \frac{0,90}{3,11}199 = 183,45 .$$

Опыты при обработке огромных данных сканирования КТ деформируемых твердых тел для интерполяции значения индексов цвета узлам конечных элемен-

тов позволяет сделать следующие рекомендации:

- используется значение индекса цвета в месте проекции узла, если значения индексов цвета на растровом изображении четко изменяются или проекция узла находится в центре пикселя;

- используется формула усреднённого значения индексов цвета если значения индексов цвета на растровом изображении слабы изменяются, и проекция узла не находится в центре пикселя;

- используется зависимость математического ожидания индекса цвета если значения индексов цвета на растровом изображении четко изменяются, и проекция узла находится на краях пикселя.

2.2.6 Определение механических характеристик материала в конечных элементах

Модуль упругости каждого конечного элемента рассчитывается как среднее арифметическое значение модулей упругости его узлов по формуле (2.78):

$$E_i = k_E \frac{\sum_{j=1}^{q} n_j}{q}, \tag{2.78}$$

где q – число узлов в элементе (q = 4, 8); n_j – индекс цвета j-ого узла; E_i – модуль упругости i-ого конечного элемента; k_E – весовой коэффициент модуля упругости.

2.3 Основные зависимости метода конечных элементов с использованием вариационно-энергетического принципа метода перемещений теории упругости для анализа напряженно-деформированного состояния деформируемых твердых тел

Метод конечных элементов [10, 34, 56, 85] по существу сводится к аппроксимации сплошной среды с бесконечным числом степеней свободы, к совокупности подобластей (элементов), имеющей конечное число степеней свободы. Таким образом, рассчитываемый объект (или область его определения) представляется в виде некоторой дискретной модели, разбитой на конечное число подобластей или

конечных элементов (КЭ). В области определения каждого КЭ распределение неизвестной функции и других свойств анализируемого объекта, описывается с помощью базисных функций формы Nm [34], которые построены с использованием простейших алгебраических полиномов, преобразованных относительно значений этих функций в узлах КЭ [85]. Эти алгебраические полиномы выбираются с учетом удовлетворения определенными условиям непрерывности решения в межэлементной зоне [34]. Такие условия необходимы для достижения процесса сходимости представленного численного решения к точному.

Алгоритм решения физической задачи на основе МКЭ сводится, в большинстве случаев, к реализации вариационного принципа минимума функционала рассматриваемой физики явления, позволяющей получить приближенное решение, не прибегая к прямому построению системы дифференциальных уравнений.

В основе вариационных задач механики ДТТ лежит принцип стационарности или минимума изменения функционала виртуальной работы. Его использование является независимым общим подходом. Применение этого принципа в МКЭ заключается в том, что выражение рассматриваемого функционала определено как общее для каждого отдельно взятого конечного элемента, а построение соотношения для всей области – следующая отдельная процедура.

Таким образом, в качестве варьируемого параметра используется распределение самой неизвестной функции, входящей в выражение функционала и определенной на области определения конечного элемента. Как более совершенный в такой постановке используется энергетический метод, где построение глобального соотношения осуществляется на основе "суммирования" – энергии отдельных конечных элементов.

Для исследований, проводимых в механике ДТТ, основополагающим является упругий расчет моделей МКЭ, где существуют две энергетические формы его реализации: принцип виртуальных перемещений и принцип виртуальных сил. В свою очередь названные зависимости приводят к общеизвестным принципам стационарности в первом случае потенциальной, во втором некоторой дополнительной энергии деформируемой системы.

Благодаря определенному набору преимуществ в использовании, наибольшее распространение получил принцип виртуальных перемещений. Его применение предполагает, что на тело, находящееся в состоянии равновесия, действуют объемные и поверхностные сипы. При этом для объекта задается некоторое виртуальное (воображаемое) поле перемещений, которое является искомым и характеризуется, в каждой точке пространства значением вектора $\{\delta\}$. Равновесие будет полным только тогда, когда при произвольных вариациях перемещений виртуальные работы воздействующих сил равны работе внутренних сил сопротивления ДТТ.

Сами виртуальные перемещения ДТТ должны быть допустимыми, то есть являться непрерывными функциями пространственных координат и удовлетворять кинематическим граничным условиям.

Необходимое условие непрерывности при использовании КЭ аппроксимации формулируется в следующем виде [34]: аппроксимирующая функция должна быть непрерывна вместе со своими производными до $(n-1)$ порядка включительно. Наличие у производных n-го порядка разрывов ступенчатого типа допускается, поскольку рассматриваемая функция остается ограниченной. Выполнение указанного условия обеспечивает сходимость решения МКЭ к точному, при уменьшении размеров конечных элементов.

С учетом представленного выше условия непрерывности, используемый вариационно-энергетический принцип виртуальных перемещений теории ДТТ утверждает, что сумма изменений потенциальной энергии воздействующих нагрузок dW_p и величины внутренней энергии деформации $d\Lambda$, при некотором поле перемещений $\{\delta\}$, равна нулю. То есть, имеем [85]:

$$d\Pi = d\left(\Lambda + Wp\right) = 0\,. \tag{2.79}$$

Работа внешних сил W равна по величине и противоположна по знаку их потенциальной энергии – Wp:

$$Wp = -W\,. \tag{2.80}$$

Таким образом, энергетическое состояние деформируемой механической системы характеризуется выражениями вида:

$$П = \Lambda - W;\ \frac{\partial П}{\partial \{\delta\}} = 0, \tag{2.81}$$

где каждое из его составляющих является некоторой функцией от вектора перемещений $\{\delta\}$.

Функционал потенциальной энергии, представленный в соотношении (2.81), для дискретной области определения деформируемой системы, запишется в виде:

$$П = \sum_{e=1}^{E} (\Lambda^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^{E} П^{(e)}, \tag{2.82}$$

где E – число КЭ, на которое разбита область определения; $П^{(e)}$ – доля потенциальной энергии КЭ; $\Lambda^{(e)}$ – внутренняя энергия деформации КЭ; $W^{(e)}$ – работа внешних сил на конечном элементе.

Внутренняя энергия упругой деформации (сопротивления) определяется:

$$\Lambda^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \{\varepsilon\}^{T} \{\sigma\} dV, \tag{2.83}$$

где $V^{(e)}$ – объем КЭ; $\{\varepsilon\}$ и $\{\sigma\}$ – векторы деформаций и напряжений [93].

Подставляя значения $\{\varepsilon\}$ и $\{\sigma\}$ в выражение (2.83) для внутренней энергии упругой деформации, имеем:

$$\Lambda^{(e)} = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \{\delta\}^{(e)T} [B]^{T} [D][B]\{\delta\}^{(e)} dV, \tag{2.84}$$

где $\{\delta\}^{(e)}$ – вектор узловых перемещений КЭ [85]; $[B]$ – матрица дифференцирования вектора $\{\delta\}^{(e)}$; $[D]$ – матрица упругости моделируемого материала.

Работа, совершаемая внешними силами, записанными через эквивалентные узловые значения $\{\delta\}$ и $\{F\}$, определяется выражением вида:

$$W^{(e)} = \{\delta\}^{(e)T} \{F\}^{(e)}, \tag{2.85}$$

где $\{F\}^{(e)}$ – вектор внешней эквивалентной узловой нагрузки КЭ [85].

Подстановкой (2.84) и (2.85) в выражение для полной потенциальной энергии механической деформируемой системы (2.82), получается:

$$П = \sum_{e=1}^{E} \left(\frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \{\delta\}^{(e)T} [B]^{T} [D][B]\{\delta\}^{(e)} dV - \{\delta\}^{(e)T} \{F\}^{(e)} \right). \tag{2.86}$$

Реализуя принцип стационарности величины потенциальной энергии $П$ де-

формируемой системы по перемещению $\{\delta\}$, получается:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}} = \sum_{e=1}^{E} \left(\int_{V^{(e)}} [B]^T [D][B] dV \{\delta\}^{(e)} - \{F\}^{(e)} \right) = 0. \quad (2.87)$$

Объёмный интеграл в формуле (2.87) определяет матрицу жесткости КЭ:

$$[K]^{(e)} = \int_{V^{(e)}} [B]^T [D][B] dV. \quad (2.88)$$

Глобальная матрица жесткости $[K]$ и глобальный вектор-столбец эквивалентных узловых сил $\{F\}$ записываются в виде сумм:

$$[K] = \sum_{e=1}^{E} [K]^{(e)} \; ; \; \{F\} = \sum_{e=1}^{E} \{F\}^{(e)}. \quad (2.89)$$

Формирование глобальной матрицы жесткости $[K]$ осуществляется путем суммирования из отдельных матриц элементов, проводимого относительно некоторого списка номеров узлов конечного элемента, полученного из глобальной нумерации КЭ модели деформируемого твердого тела.

Формирование вектора $\{F\}$ осуществляется по номенклатуре и топологии тех областей КЭ модели, где эти нагрузки определены.

Таким образом, общее уравнение равновесия рассматриваемой механической системы в целом в матричном виде составляют:

$$[K]\{\delta\} = \{F\}. \quad (2.90)$$

В результате решения глобальной системы алгебраических уравнений (2.90) вычисляется некоторое поле перемещений, представленное в узловых точках значениями компонент глобального вектор – столбца перемещений $\{\delta\}$.

2.4 Разработка математических моделей конечных элементов, используемых для анализа объемного напряженно-деформированного состояния сканируемых деформируемых твердых тел

2.4.1 Конечные элементы типа гексаэдр и тетраэдр

В ряду конечных элементов, используемых для объемного моделирования, наибольшее распространение получил восьми узловой линейный изопараметрический элемент (HEX), представленный на рисунке 2.33. В настоящей

работе он реализован в декартовой системе координат 0, *x*, *y*, *z*, а также, при необходимости, в полярно-цилиндрической системе координат 0, *r*, θ, *z*.

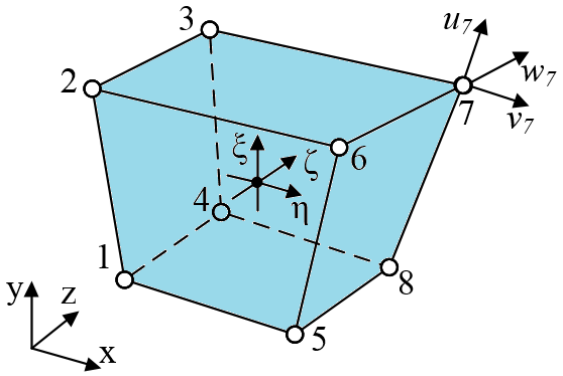


Рисунок 2.33 − Изо-параметрический гексаэдр
объемного НДС в декартовой системе координат

Вектор перемещений *i*-го узла конечного элемента определяется тремя компонентами: u, v, w, измеряемыми в рассматриваемой системе координат [56]:

$$\{\delta_i\} = \{u_i, v_i, w_i\}^T . \qquad (2.91)$$

Общий вид интерполяционного полинома для линейной аппроксимации физических величин определяется выражением вида:

$$U = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 zx + \alpha_8 xyz . \qquad (2.92)$$

Построение функций формы $[N]$ на основе этого полинома, для типа конечного элемента гексаэдр, осуществляется с использованием местной системы нормализованных координат (рисунок 2.33). При этом, если переменные ξ, η, ζ удовлетворяют условиям: $-1 \le \xi \le 1;\ -1 \le \eta \le 1;\ -1 \le \varsigma \le 1,$ то функции формы линейного восьми узлового гексаэдра имеют следующий вид:

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\varsigma\varsigma_i), \qquad (2.93)$$

где *i* – изменяется от 1 до 8, а координаты узлов относительно системы координат элемента $0, \xi, \eta, \zeta$ составляют: $\xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1.$

Матрица функций формы гексаэдра имеет вид:

$$\{N\} = \{N_1,\ N_2 \ldots N_8\}^T . \qquad (2.94)$$

Переход от местной системы координат к глобальной осуществляется с применением зависимостей вида:

$$x=\{N\}^T\begin{Bmatrix}x_1\\x_i\\\vdots\\x_8\end{Bmatrix};\ y=\{N\}^T\begin{Bmatrix}y_1\\y_i\\\vdots\\y_8\end{Bmatrix};\ z=\{N\}^T\begin{Bmatrix}z_1\\z_i\\\vdots\\z_8\end{Bmatrix}, \tag{2.95}$$

где x_i, y_i, z_i – координаты узлов в глобальной декартовой системе координат.

Составляющие вектора локальных перемещений произвольной точки изопараметрического гексаэдра определяются аналогичными выражениями:

$$u=\{N\}^T\begin{Bmatrix}u_1\\u_i\\\dots\\u_8\end{Bmatrix};\ v=\{N\}^T\begin{Bmatrix}v_1\\v_i\\\dots\\v_8\end{Bmatrix};\ w=\{N\}^T\begin{Bmatrix}w_1\\w_i\\\dots\\w_8\end{Bmatrix}, \tag{2.96}$$

где u_i, v_i, w_i – глобальные перемещения узлов конечного элемента.

Таким образом, выражение для аппроксимации неизвестного поля перемещений на рассматриваемом конечном элементе в матричной форме имеет вид:

$$\{\delta\}^e=\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1&0&0&N_2&0&\dots&N_8&0&0\\0&N_1&0&0&N_2&\dots&0&N_8&0\\0&0&N_1&0&0&\dots&0&0&N_8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\w_1\\\dots\\u_8\\v_8\\w_8\end{Bmatrix}. \tag{2.97}$$

В декартовой системе координат, вектор деформаций $\{\varepsilon\}$ содержит все шесть компонент и определяется известными [93] выражениями вида:

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\\\varepsilon_z\\\gamma_{xy}\\\gamma_{yz}\\\gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\\dfrac{\partial v}{\partial y}\\\dfrac{\partial w}{\partial z}\\\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\\\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\\\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\end{Bmatrix}. \tag{2.98}$$

Дифференцируя функции формы элемента по соответствующим координатным направлениям вектора перемещений $\{\delta\}^e$, можно получить необходимое со-

отношение для определения вектора деформаций на элементе:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} = [B_1, B_2, \cdots, B_8]\{\delta\}, \tag{2.99}$$

где матрица дифференцирования $[B]$ для любого узла в конечном элементе имеет вид [85] для декартовой системы координат соответственно:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}; \tag{2.100}$$

В декартовой системе координат, вектор напряжений в рассматриваемой точке конечного элемента определяется из общего выражения:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = [D]\left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_{T0}\}\right) + \{\sigma_0\} \tag{2.101}$$

где $\{\sigma_0\}$ – вектор начальных напряжений; $[D]$ – матрица упругости материала.

При использовании обычных упругих постоянных изотропного материала, для объёмного напряженно-деформированного состояния, матрица $[D]$ имеет следующий вид:

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ \textit{Сим.} & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}. \tag{2.102}$$

где E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала КЭ.

В общем случае матрицы КЭ, определяющие его свойства (такие как жест-

кость, распределение массы между узлами и тому подобные), имеют вид:

$$\int_V [f]dV\,, \tag{2.103}$$

где [*f*] – матрица, зависящая от функций формы N_i или их производных по глобальным координатам *x*, *y*, *z*; V и dV – объем и элементарный объем КЭ.

Для вычисления величин, представленных на элементе в матричном виде, необходимо сделать два преобразования.

Во-первых, выразить производные функций формы по глобальным координатам *x*, *y*, *z* через производные функций формы N_i, которые, в свою очередь, выражены в локальной нормализованной системе координат ξ, η, ζ.

Во-вторых, элементарный объем dV, по которому производится интегрирование, необходимо также представить в координатах ξ, η, ζ относительно пределов интегрирования по ним.

Для установления связи производных в местной нормализованной и глобальной системе координат используется правило частного дифференцирования. В трёхмерном случае, например по координате ξ, это правило для декартовой системы координат имеет вид:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\,. \tag{2.104}$$

Дифференцируя аналогичным образом по координатам η и ζ, и используя матричную форму записи, получаем необходимое соотношение [35], позволяющее проводить дифференцирование используемых величин относительно местной системы нормализованных величин. Имеем для декартовой системы координат:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}, \tag{2.105}$$

где [*J*] – матрица Якоби [34, 85].

Производные функций форм по локальным координатам (локальные производные) находятся простым дифференцированием функций форм, представленных в таблице 2.5.

Таблица 2.5

Производные функций форм по локальным координатам

$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)$	$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)$	$\frac{\partial N_1}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)$
$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)$	$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)$	$\frac{\partial N_2}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)$
$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)$	$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)$	$\frac{\partial N_3}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)$
$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)$	$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)$	$\frac{\partial N_4}{\partial \zeta} = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)$
$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = -\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)$	$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)$	$\frac{\partial N_5}{\partial \zeta} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)$
$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = \frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)$	$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)$	$\frac{\partial N_6}{\partial \zeta} = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)$
$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = \frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)$	$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)$	$\frac{\partial N_7}{\partial \zeta} = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)$
$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = -\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)$	$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)$	$\frac{\partial N_8}{\partial \zeta} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)$

После нахождения производных функций форм по глобальным координатам находим матрицу дифференцирования $[B]$.

Для преобразования переменных и области интегрирования применим стандартный прием, использующий определитель матрицы $[J]$ [34]. Тогда выражение для вычисления элементарного объема, в области определения конечного элемента, в декартовой системе координат соответственно преобразуется к видам:

$$dV = dxdydz = det[J]d\xi d\eta d\zeta \,. \tag{2.106}$$

Интегрирование осуществляется численно с применением схемы Гаусса-Лежандра. Концепция численного интегрирования в этом случае заключается в вычислении определенного интеграла на интервале $[-1;1]$ в виде [72]:

$$\int_{-1}^{1}\left[f(\xi)\right]d\xi = \sum_{i=1}^{n} H_i\left[f(\xi_i)\right], \tag{2.107}$$

где n – число точек интегрирования; H_i – весовые множители; ξ_i – нормализованная координата точки интегрирования.

Для трехмерных случаев декартовой системы координат имеем:

$$\int_{V^{(e)}}[f]dV = \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} H_i H_j H_m\left[f\left(\xi_i,\eta_j,\zeta_m\right)\right]\det\left[j\left(\xi_i,\eta_j,\zeta_m\right)\right]. \tag{2.108}$$

Тройное суммирование заменяется простым по n^3 точкам гекса-элемента в декартовой системе координат. Тогда выражения (2.108) можно представить в следующим виде:

$$\int\limits_{V^{(e)}} [f]dV = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ m=1}}^{n^3} H_i H_j H_m \left[f\left(\xi_i, \eta_j, \zeta_m\right)\right] \det\left[j\left(\xi_i, \eta_j, \zeta_m\right)\right]. \qquad (2.109)$$

Точки интегрирования находятся решением полинома Лежандра соответствующей степени:

$$P_n\left(\xi\right) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\xi^n}\left[\left(\xi^2 - 1\right)^n\right] = 0\,. \qquad (2.110)$$

Весовые множители определяются как:

$$H_{in} = \frac{2\left(1-\xi_{in}^2\right)}{n^2\left(P_{n-1}\left(\xi_{in}\right)\right)^2}\,. \qquad (2.111)$$

Для двухточечной схемы интегрирования в трехмерном случае точки интегрирования и весовые множители представлены выражениями:

$$\xi_i = \pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ \eta_j = \pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ \zeta_m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ H_{ijm} = 1. \qquad (2.112)$$

Точки интегрирования располагаются в соответствии с принятым обходом номеров узлов в элементе (рисунок 2.33). Значения для координат этих точек, а также соответствующие им весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса-Лежандра приведены в таблице 2.6.

Таблица 2.6

Координаты точек интегрирования и весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса-Лежандра (для двухточечной схемы)

№	1	2	3	4	5	6	7	8
ξ_i	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
η_j	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
ζ_m	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
H_{ijm}	1							

При построении соотношений для изо-параметрического КЭ предполагается, что его координат и перемещения интерполируются одинаково, используя один и те же функции формы.

Таким образом, выражение (2.88) для матрицы жесткости одного конечного элемента можно представить в квадратурной форме. Для декартовой системы координат соответственно:

$$[K]^{(e)} = \sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ m=1}}^{8} \left[B\left(\xi_i,\eta_j,\zeta_m\right)\right]^T \cdot \left[D\left(T_{ijm}\right)\right] \cdot \left[B\left(\xi_i,\eta_j,\zeta_m\right)\right] \cdot \det\left[j\left(\xi_i,\eta_j,\zeta_m\right)\right]. \qquad (2.113)$$

Выражение (2.102) для матрицы упругости перепишем в следующем виде:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix}. \qquad (2.114)$$

Матрица жесткости гекса-элемента записывается в следующем виде:

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{28} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{81} & K_{82} & \cdots & K_{88} \end{bmatrix}, \qquad (2.115)$$

где K_{11}, K_{12} и т.д. – подматрицы [3×3], соответствующие трем координатным направлениям.

Для тетраэдрального элемента (рисунок 2.34), как трехмерного аналога треугольного элемента, наиболее распространенной является естественная система координат, определяемая относительными L-координатами [85]. Эти координаты определяются как отношения расстояний от выбранной произвольной точки элемента до одной из его граней к высоте, опущенной на эту грань из противолежащей вершины.

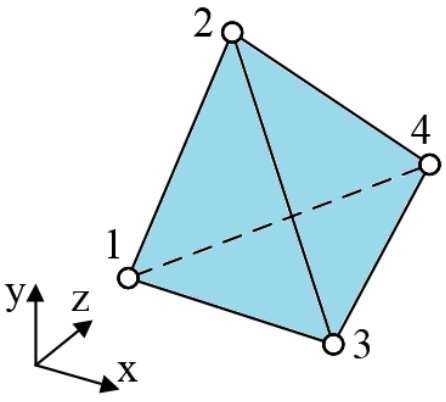


Рисунок 2.34 – Тетраэдральный элемент в декартовой системе координат

Такие L-координаты называются объемными, они связаны между собой соотношением:

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1. \tag{2.116}$$

Специальные координаты определяются с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 \\ z &= L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4 \end{aligned}. \tag{2.117}$$

По сколько пространственные L-координаты связаны с декартовыми линейно и принимают значения от единицы в какой-либо вершине до нуля на противоположной грани, то функции формы имеет вид:

$$N_i = L_1, N_j = L_2, N_p = L_3, N_m = L_4. \tag{2.118}$$

Преимуществом использования L-координат является существование интегральных формул, которые упрощают вычисление интегралов. Например, интеграл по площади имеет вид:

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A. \tag{2.119}$$

Выражение для объемного интеграла записывается следующим образом:

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dA = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V. \tag{2.120}$$

Матрицу дифференцирования для тетраэдрального элемента можно представить в виде:

$$B = \frac{1}{6V}\begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_p & 0 & 0 & b_m & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_p & 0 & 0 & c_m & 0 \\ 0 & 0 & d_i & 0 & 0 & d_j & 0 & 0 & d_p & 0 & 0 & d_m \\ c_i & b_i & 0 & c_j & b_j & 0 & c_p & b_p & 0 & c_m & b_m & 0 \\ 0 & d_i & c_i & 0 & d_j & c_j & 0 & d_p & c_p & 0 & d_m & c_m \\ d_i & 0 & b_i & d_j & 0 & b_j & d_p & 0 & b_p & d_m & 0 & b_m \end{bmatrix}, \tag{2.121}$$

где b_i, c_i, d_i – коэффициенты, представляющие собой определители для узла i (остальные определители получаются циклической перестановкой индексов p, i, j, m):

$$b_i = -\det\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad c_i = -\det\begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix}, \quad d_i = -\det\begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix}, 6V = \det\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}. \tag{2.122}$$

Матрица упругих характеристик объемного НДС имеет вид, представленный выражением (2.102). Таким образом, поскольку [*B*] и [*D*] содержат только постоянные члены, выражение (2.88) для матрицы жесткости отдельного конечного элемента можно записать в виде:

$$[K]^{(e)} = \int_{V^{(e)}} [B]^T [D][B] dV = [B]^T [D][B] \int_{V^{(e)}} dV = [B]^T [D][B] V \cdot \qquad (2.123)$$

2.4.2 Конечные элементы с использованием несовместных функций формы

Процедура решения задачи может оказаться эффективнее, если аппроксимировать поле перемещений полиномами более высокий степени, чем координаты. Увеличение порядка полиномов для базисных функций формы (относительно узлов) приводит к появлению дополнительных узлов на ребрах КЭ (боковых поверхностях, объеме) [34], что практически не снижает, а, чаще, увеличивает размерность задачи.

Более удобный способ улучшения эффективности изо-параметрического элемента предложен в работе [10]. Он связан с использованием в области конечного элемента "несовместных" функций формы. В работе [72] этот способ применен для моделирования тонкостенных валов, при их работе на изгиб.

В этом случае поле перемещений деформируемой системы, в отличие от выражения (2.96), представляется в виде:

$$u = \{\overline{N}\}^T \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{11} \end{Bmatrix}; v = \{\overline{N}\}^T \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{11} \end{Bmatrix}; w = \{\overline{N}\}^T \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_{11} \end{Bmatrix}, \qquad (2.124)$$

где u_9, u_{10}, $\dots w_{11}$ – дополнительные степени свободы, определяющие более высокую степень интерполяции перемещений;

$$\{\overline{N}\}^T = \{N_1\ N_2 \dots N_{11}\}; \qquad (2.125)$$

N_9, N_{10}, N_{11} – несовместные функций формы:

$$N_9 = 1-\xi^2; N_{10} = 1-\eta^2; N_{11} = 1-\varsigma^2. \qquad (2.126)$$

Выражение для вычисления матрицы жесткости конечного элемента с использованием несовместных функций формы записывается в виде:

$$[\overline{K}]^{(e)} = \int_{V^{(e)}} [\overline{B}]^T [D][\overline{B}] dV. \qquad (2.127)$$

Или, в квадратурной форме записи:

$$[K]^{(e)} = \sum_{\substack{i=1\\ j=1\\ m=1}}^{8} \left[B\left(\xi_i, \eta_j, \zeta_m, r_{ijm}\right) \right]^T \cdot \left[D\left(T_{ijm}\right) \right] \cdot \left[\overline{B}\left(\xi_i, \eta_j, \zeta_m, r_{ijm}\right) \right] \cdot \det\left[j\left(\xi_i, \eta_j, \zeta_m\right) \right] r_{ijm} . \quad (2.128)$$

Выражение для матрицы дифференцирования, с использованием несовместных функций формы (2.126), приобретает вид:

$$[\overline{B}] = [B_1\ B_2\ \ldots\ B_{11}]. \quad (2.129)$$

Рассматривая получение матрицы жесткости элемента, необходимо заметить, что использование выражения (2.127) приводит к матрице $\left[\overline{K}\right]^{(e)}$ 33-ого порядка, а степени свободы u_9, u_{10},…,w_{11} не связаны с узлами конечного элемента. Для снижения размерности матрицы до 24-х, дополнительные степени свободы исключаются путем статической конденсации, которая эквивалентна минимизации полной потенциальной энергии конечного элемента, как деформируемой системы, относительно перемещений u_9, u_{10}, …, w_{11}.

Рассмотрим уравнение равновесия:

$$[\overline{K}]^{(e)} \begin{Bmatrix} \{\delta\}^{(e)} \\ \overline{\delta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}^{(e)} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.130)$$

где $[\overline{K}]^{(e)} = \begin{bmatrix} \overline{K} & K \\ K^T & \overline{\overline{K}} \end{bmatrix}$; $\{\delta\}^{(e)}$ – содержит узловые переменные (выражение (2.99)); $\overline{\delta}$ – содержит переменные, не связанные с узлами КЭ.

Из второй строки в (2.130) находим:

$$\overline{\delta} = -\overline{\overline{K}}^{-1} K^T \{\delta\}^{(e)} . \quad (2.131)$$

И после подстановки этого выражения в первую строку (2.129), получаем:

$$\left[K\right]^{(e)} \left\{\delta\right\}^{(e)} = \left\{F\right\}^{(e)}, \quad (2.132)$$

где $[K]^{(e)}$ – редуцированная матрица жесткости конечного элемента порядка 24:

$$[K]^{(e)} = \overline{K} - K\overline{\overline{K}}^{-1} K^T . \quad (2.133)$$

Нередуцированная матрица жесткости элемента может быть записана в виде:

$$\left[\overline{K}\right]^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{111} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{211} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{111} & K_{112} & \cdots & K_{1111} \end{bmatrix}, \quad (2.134)$$

где каждая из подматриц имеет размерность [3×3] и строится следующим образом:

$$K_{rs}=\sum_{\substack{i=1\\j=1\\m=1}}^{8}\begin{bmatrix}k_{11}^{rs} & k_{12}^{rs} & k_{13}^{rs}\\ k_{21}^{rs} & k_{22}^{rs} & k_{23}^{rs}\\ k_{31}^{rs} & k_{32}^{rs} & k_{33}^{rs}\end{bmatrix}\det\left[J\left(\xi_i,\eta_j,\zeta_m\right)\right]r_{ijm}; \tag{2.135}$$

$$\begin{bmatrix}k_{11}^{rs} & k_{12}^{rs} & k_{13}^{rs}\\ k_{21}^{rs} & k_{22}^{rs} & k_{23}^{rs}\\ k_{31}^{rs} & k_{32}^{rs} & k_{33}^{rs}\end{bmatrix}=\left[B_r\left(\xi_i,\eta_j,\zeta_m,r_{ijm}\right)^T\left[D\left(T_{ijm}\right)\right]B_s\left(\xi_i,\eta_j,\zeta_m,r_{ijm}\right)\right]. \tag{2.136}$$

Подстановки матрицы дифференцирования для любого узла КЭ и матрицы упругости материала, для объемного НДС, в (2.136) элементы K_{rs} записываются в явном виде:

$$\begin{aligned}
k_{11}^{rs}&=\left(B_1^rB_1^s+B_2^rB_2^s\right)\cdot D_1+\left(B_1^rB_2^s+B_1^sB_2^r\right)\cdot D_2+\left(B_3^rB_3^s+B_4^rB_4^s\right)\cdot D_3;\\
k_{12}^{rs}&=\left(B_1^rD_2+B_2^rD_1\right)\cdot B_3^s+B_3^rB_5^sD_3;\\
k_{13}^{rs}&=\left(B_1^r+B_2^r\right)\cdot B_4^sD_2+B_1^sB_4^rD_3;\\
k_{21}^{rs}&=\left(B_1^sD_2+B_2^sD_1\right)\cdot B_3^s+B_3^sB_5^rD_3;\\
k_{22}^{rs}&=\left(B_5^rB_5^s+B_4^rB_4^s\right)D_3+B_3^rB_3^sD_1;\\
k_{23}^{rs}&=B_3^rB_4^sD_2+B_3^sB_4^rD_3;\\
k_{31}^{rs}&=\left(B_1^s+B_2^s\right)\cdot B_4^rD_2+B_1^rB_4^sD_3;\\
k_{32}^{rs}&=B_3^sB_4^rD_2+B_3^rB_4^sD_3;\\
k_{33}^{rs}&=B_4^rB_4^sD_1+\left(B_1^rB_1^s+B_3^rB_3^s\right)D_3.
\end{aligned} \tag{2.137}$$

Поскольку матрица конечного элемента $[K]^{(e)}$ симметрична, удобно хранить её в памяти вычислительной машины и работать с ней только с верхней её (нижней) частью, включая главную диагональ.

Таким образом, столбцы верхнего треугольника матрицы с диагональными элементами можно последовательно поместить в вектор $\{K\}^{(e)}$:

$$\{K\}^{(e)}=\begin{Bmatrix}K_1 & K_3 & K_6 & K_{10} & \cdots & K_{300}\\ & K_2 & K_5 & K_9 & \cdots & \cdots\\ & & K_4 & K_8 & \cdots & \cdots\\ & & & K_7 & \cdots & \cdots\\ & & & & \cdots & \cdots\\ & & & & & K_{277}\end{Bmatrix}. \tag{2.138}$$

Для доступа к *i*-му, *j*-му элементу используется следующая Fortran-конструкция [72]:

$$Value=Ke(j\frac{j+1}{2}+1-i), \tag{2.139}$$

где $Value$ – *i*-й, *j*-й элемент матрицы $[K]^{(e)}$.

Сравнение работы "обычного" изо-параметрического, имеющего только узловые (базисные) функции формы, и гексаэдра с дополнительным использованием в нем несовместных функций формы приведено в работах [71, 72, 77] на примере изгиба тонкостенной пластины (рисунок 2.35). Целью исследования являлось изучение преимуществ использования несовместных функций формы в представленном типе объемного КЭ.

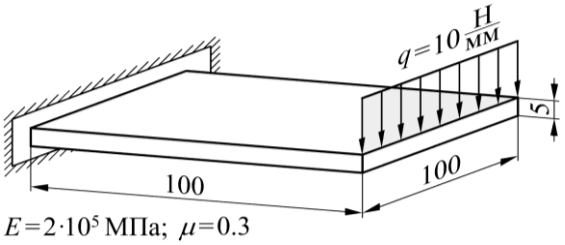


Рисунок 2.35 – Пластина для тестирования конечных элементов

Результаты исследования (рисунок 2.36), в виде графиков упругих линий изгиба пластины, показывают, что решение для варианта (рисунок 2.36г), имеющего в сетке разбиения максимальное число обычных КЭ (8 КЭ по толщине стенки), практически совпадает с графиком результата точного решения. Однако, с использованием в КЭ несовместных функций формы, подобные результаты достигаются на самой грубой, из представленных, сетке разбиения (рисунок 2.36д).

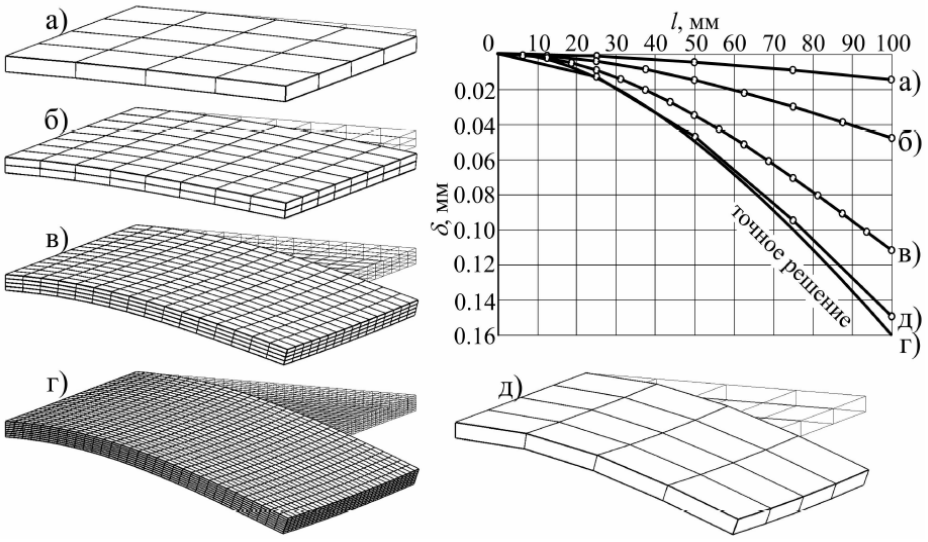


Рисунок 2.36 – Результаты анализа КЭ моделей тонкостенной пластины на изгиб с различной плотностью сетки: а, б, в, г – модели для КЭ с обычным набором функций формы первого порядка; д – модели для КЭ с дополнительным использованием несовместных функций

Необходимо обратить внимание на два обстоятельства. Первое из них состоит в том, что в представленном варианте д, используется один КЭ по толщине пластины. Второе обстоятельство заключается в том, что, с увеличением геометрических размеров тонкостенных деталей, относительно размеров толщины их стенки, точность результатов, с применением несовместных функций формы, увеличивается [10].

2.4.3 Контактный конечный элемент для анализа взаимодействия деформируемых твердых тел

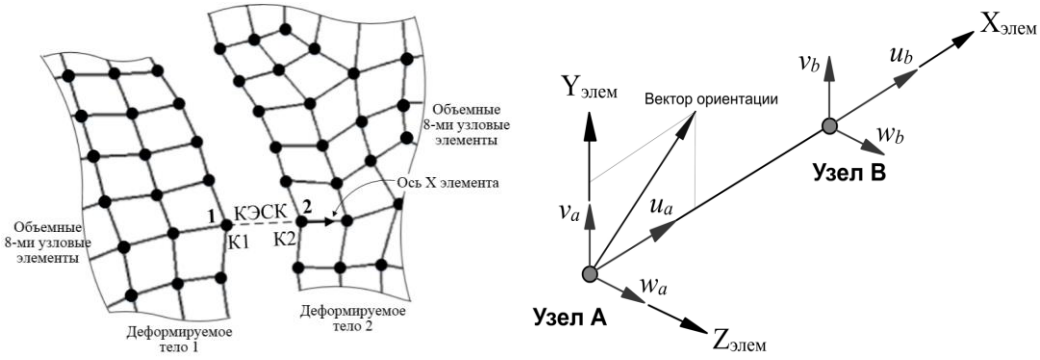
Известно, что при анализе НДС одной (монолитной) детали, в построении и минимизации выражения функционала потенциальной энергии деформируемой системы (П), проводимой относительно вектора перемещений, участвуют две составляющие (выр. (2.81)): работа внешних сил – W [69, 85] и внутренняя энергия сил сопротивления тела – Λ.

При анализе контактирующих ДТТ выражение для величины W остается неизменным, так как работа сил контактного взаимодействия ДТТ не входит в ее состав. Это доказывается, прежде всего, тем, что внешняя нагрузка, действующая на контактирующие ДТТ, задается не зависимо от начальных условий их контактного взаимодействия [77].

Силы контактного взаимодействия между деформируемыми телами, в свою очередь, зависят от величины "невязки" (неравенства) вектора перемещений на сопрягаемых поверхностях и, соответственно, входят в состав внутренней энергии сил сопротивления – Λ [77].

В настоящей работе предлагается использование решения контактной задачи теории упругости на основе МКЭ, используемое при моделировании взаимодействия деформируемых твердых тел. Решение построено с использованием принципа «узел в узел» [77]. Графически контактный конечный элемент, названный в работе [77]: контактным элементом сопряжения конструкций – КЭСК, представлен на рисунках 2.37а и 2.37б, где линия соединения двух узлов 1 и 2, соответствующих узлам А и В (рисунок 2.37б), принадлежащих, соответственно, сопрягаемым телам: Телу 1 и Телу 2. Узловые значения u_a, v_a, w_a (рисунок 2.37б) –

являются перемещениями узла А; значения u_b, v_b, w_b – перемещениями узла В, в местной системе координат.



а) б)

Рисунке 2.37 – Контакт-взаимодействие двух ДТТ (а)
и контактный элемент сопряжения конструкций (б)

Для моделирования контактных сил, действующих на контактном конечном элементе, используется известный в МКЭ [34] принцип аппроксимации внешней распределенной нагрузки, приводящий к ее замене эквивалентными узловыми силами.

Для каждой пары контактирующих оппозитных узлов контактного конечного элемента, например, для узлов А и В (рисунок 2.37б), а также с учетом представленной выше модификации, имеем обобщенный вектор невязки координат:

$$\{\delta_K\} = \begin{Bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_B - u'_A + u_0 \\ v'_B - v'_A + v_0 \\ w'_B - w'_A + w_0 \end{Bmatrix}, \tag{2.140}$$

а также обобщенный вектор сил контактного взаимодействия:

$$\{F_K\} = \begin{Bmatrix} F_n \\ F_\tau^y \\ F_\tau^z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_n & 0 & 0 \\ 0 & K_\tau^y & 0 \\ 0 & 0 & K_\tau^z \end{bmatrix} \{\delta_K\}, \tag{2.141}$$

где K_n и K_τ – величины нормальной и поперечной (касательной) жесткости в КЭСК.

Переход к локальным координатам узлов контактного элемента осуществляется посредством матрицы направляющих косинусов.

После минимизации функционала (2.79), с учетом соотношений (2.140) и (2.141), получаем известную формулу глобальной системы алгебраических уравнений МКЭ, используемую в данном случае для задачи расчета НДС контактирующих ДТТ:

$$[K]\{\delta\} = \{F\}, \tag{2.142}$$

где $\{F\}$ и $\{\delta\}$ – глобальные векторы-столбцы сил и неизвестных перемещений.

Глобальная матрица жесткости [K], представленная в выражении (2.142), имеет симметричную блочно-диагональную структуру, где каждый блок матрицы содержит в себе характеристику жесткости деформируемого тела входящей в систему контактирующих между собой ДТТ. Для моделирования контактного взаимодействия ДТТ блоки матрицы [K] соединяются между собой по определенной схеме относительно глобальных номеров узлов контактных конечных элементов. Эти узлы, одновременно, принадлежат и КЭ моделям контактирующих ДТТ, на сопрягаемых поверхностях. Подобный принцип соединения блоков подробно рассмотрен в работах [15, 69, 74]. В работе [74] он упрощен и построен относительно узлов КЭ сетки, при этом схема соединения блоков глобальной матрицы сохраняется. Тем самым, вместо процедуры поверхностного интегрирования, используется принцип работы метода штрафных функций. Преобразование глобальной матрицы жесткости, в этом случае, осуществляется напрямую, относительно величины невязки (неравенства) вектора перемещений между контактирующими узлами КЭ сетки ДТТ.

Дополнительно к модифицированию глобальной матрицы жесткости, относительно тех же номеров узлов контактных элементов, осуществляется соответствующее модифицирование и вектора-столбца сил $\{F\}$ рассматриваемой глобальной системы алгебраических уравнений (выражения (2.140) и (2.141)). Тем самым, в вектор $\{F\}$ суммируются величины внутренних контактных узловых сил, возникающих вследствие контактного взаимодействия ДТТ. Общая схема модифицирования глобальной системы алгебраических уравнений, при использовании представленного подхода в решении контактной задачи, имеет вид:

$$[K]+\left[K_K(\delta)\right]=\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & +\tilde{K} & \cdots & -\tilde{K} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & -\tilde{K} & \cdots & +\tilde{K} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \quad \{F\}+\{F_K(\delta)\}=\begin{Bmatrix} \cdots \\ \pm\tilde{F} \\ \cdots \\ \mp\tilde{F} \\ \cdots \end{Bmatrix}, \qquad (2.143)$$

где $\tilde{K}$ – узловая жесткость контактного элемента; $\tilde{F}$ – вектор узловой силы контактного элемента.

Механизма выполнения условий контактного взаимодействия ДТТ в представленном типе контактного КЭ определяется состояниями: «открыт» либо «за-

крыт» [72]. Физическая сущность этих состояний определяется двумя типами условий сопряжения контактных поверхностей: зазором и натягом (касанием), которые аппроксимируются соответственно двумя ветвями кусочно-линейной функции (рисунок 2.38), определяющей эти состояния:

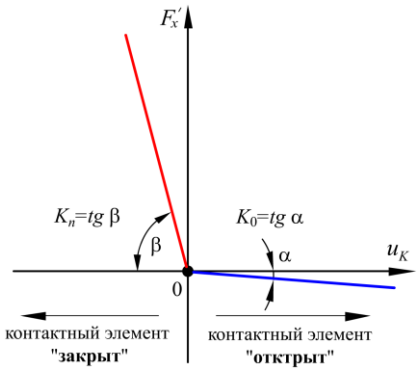


Рисунок 2.38 – Работа контактного элемента в локальной системе координат

1) контактный элемент "открыт", что соответствует неравенству: $(x_A - x_B) > 0$; а выражения для контактной жесткости и вектора сил в узлах КЭСК имеют вид:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_0 & 0 & 0 \\ 0 & K_0 & 0 \\ 0 & 0 & K_0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{F}' = \begin{Bmatrix} F_{x'} \\ F_{y'} \\ F_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{2.144}$$

где K_0 – малая величина жесткости, необходимая и достаточная для положительного определения глобальной матрицы жесткости системы (2.142);

2) контактный элемент "закрыт" (с трением покоя), что соответствует неравенству: $(x_A - x_B) \le 0$; а выражения для контактной жесткости и сил в узлах контактного элемента определяются выражениями вида:

$$\tilde{K}' = \begin{bmatrix} K_n & 0 & 0 \\ 0 & K_{ty'} & 0 \\ 0 & 0 & K_{tz'} \end{bmatrix}; \; \tilde{F}' = \begin{Bmatrix} F_{x'} \\ F_{y'} \\ F_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 K_n \\ v_0 K_{ty'} \\ w_0 K_{tz'} \end{Bmatrix}, \tag{2.145}$$

где K_n – величина большой (штрафной) жесткости, которая выбирается из условия не-проникновения контактирующих поверхностей и варьируется в пределах на 2÷3 порядка больше жесткости узлов контактируемых тел (методика определения необходимой и достаточной величины K_n представлена в работе [72]); K_{ty}, K_{tz} – величины поперечной (касательной) жесткости, зависящие от условий трения на сопрягаемых поверхностях.

Практически, значения жесткостей K_n, $K_{\tau y}$, $K_{\tau z}$ и K_0 определяются до решения контактной задачи на основании выражений для трехосного случая глобальной системы координат:

$$\begin{bmatrix} K_n & & \\ & K_{\tau y} & \\ & & K_{\tau z} \end{bmatrix} = \max\left([K'_A],[K'_B]\right)\cdot 10^{3}; \tag{2.146}$$

$$\begin{bmatrix} K_0 & & \\ & K_0 & \\ & & K_0 \end{bmatrix} = \min\left([K'_A],[K'_B]\right)\cdot 10^{-3}, \tag{2.147}$$

где $[K'_A]$, $[K'_B]$ – диагональные блоки [3x3] в глобальной матрице жесткости, соответствующие узлам A и B контактного элемента в локальной системе координат.

Вопрос обоснования выбора порядков десятичных множителей в выражениях (2.146) и (2.147) подробно рассмотрен в работах [72, 74].

Начальный вектор величины невязки координат, используемый в выражениях для $\tilde{K}'$ и для вычисления величины $\tilde{F}'$, (выражения (2.144) и (2.145)), задается в исходной информации на каждом контактном конечном элементе.

Из выражений (2.144) и (2.145), а также рисунок 2.38, следует, что модифицирование глобального вектора-столбца сил осуществляется только в том случае, если величина невязки перемещений для контактного элемента имеет отрицательный знак. Дополнительно, величина контактных узловых сил зависит и от абсолютного значения величины отрицательной невязки поля координат (перемещений) на контактном элементе.

После формирования глобальной системы уравнений (2.142), с учетом модификаций на основе выражений (2.144) и (2.145), проводится ее решение с получением вектора деформационных перемещений. Полученный после решения системы уравнений глобальный вектор-столбец неизвестных перемещений используется для последующего вычисления деформаций и напряжений на основе выражений, представленных в предыдущим разделе.

2.5 Выводы по главе

1. Построение каркасных и геометрических моделей ДТТ на основе интерпретации результатов сканирования КТ, проводится, с использованием специальных математических методов и методик, в два этапа: предварительный и уточняющий; чем обеспечивается точность построения геометрии не только внешней, но и его внутренней структуры.

2. Интерполяция и определение значений индексов цвета в узлах конечных элементов, построенные с использованием специального комплекса математических методов и методик, позволяют определить и оценить реальное изменение механических характеристик материла в любой точке структуры ДТТ, то есть, реализуется возможность представлять эти неоднородности в КЭ модели.

3. Наиболее устойчивым решением задачи теории упругости деформируемых систем на основе МКЭ является её реализация на основе вариационно-энергетического принципа минимума функционала потенциальной энергии деформации, позволяющей получить численное решение, не прибегая к прямому построению системы дифференциальных уравнений.

4. Основными конечными элементами являются гексаэдр (HEX) и тетраэдр (TET), каждый из которых имеет свои преимущества: гексаэдр при построении КЭ модели ДТТ используется чаще, поскольку он более точен при одинаковой размерности; тетраэдр используется для построения КЭ модели ДТТ с высокой степенью нерегулярности геометрии.

5. Математическая модель контактного конечного элемента построена с использованием метода штрафных функций (решение Фредгольма второго рода), где, дополнительно учтена величина "невязки" (неравенства) перемещений контактирующих узлов КЭ сетки взаимодействующих деформируемых твердых тел.

ГЛАВА 3 АЛГОРИТМ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ СКАНИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

На основе представленных во второй главе математических зависимостей, в данной главе предлагается разработка алгоритмизации для эффективной интерпретации результатов сканирования ДТТ, имеющих высокую степень неоднородности по механическим характеристикам материала и индивидуальности (нерегулярности) геометрии. Исходными данными работы алгоритма являются растровые изображения сканирования компьютерным томографом (КТ), сформированные в виде пакета, для дальнейшего использования этих данных при построении КЭ моделей ДТТ и анализе напряжено-деформированного состояния (НДС).

Алгоритм состоит из отдельных блоков, представляющих собой систему, реализованную в виде программного комплекса, работающего в условиях интеграции со стандартным программным обеспечением компьютерных технологий инженерного анализа.

3.1 Общий алгоритм (комплекс модулей) программной реализации интерпретации растровых изображений сканирования

Общая структура математического моделирования и алгоритма предлагаемой к применению технологии сканирования представлена ниже, на рисунке 3.1. Она определяет полный комплекс этапов: от сканирования ДТТ, до получения его КЭ модели и проведения анализа НДС. Реализация структуры выполняется последовательно, в соответствии с представленными блоками:

Блок 1. Исходный процесс интерпретации ДТТ для предварительной оценки степени неоднородности его структуры и механических характеристик.

По количеству частей в структуре ДТТ существуют два типа: простая (однородная) структура и сложная, имеющая внутренние подструктуры. Простой структурой, чаще всего, является ДТТ с одним типом материала. Для него имеет-

ся некоторый диапазон характерного изменения механических характеристик. Сложная структура представляет собой ДТТ, которое состоит из нескольких характерных диапазонов (фаз) изменения механических характеристик, то есть, каждый из них имеет свою неоднородную структуру.



Рисунок 3.1 – Структура математического моделирования технологии сканирования ДТТ для построения и анализа его КЭ модели

По степени неоднородности отмечаются ДТТ с невысоким градиентом изменения неоднородности. У них распределение индексов цвета для каждого растрового изображения сканирования в пакете сечений мало отличается друг от друга. И наоборот, если отличие между сечениями имеет высокий градиент изменения механических характеристик, то эти ДТТ имеют высокую степень неоднородности.

Другими параметрами интерпретации изучаемого ДТТ являются:

- степень нерегулярности геометрии (сложность поверхностей);

- наличие контактирующих объектов;

- обзор (наличие) данных натурных испытаний о механических характеристиках материала объекта исследования;

- условия эксплуатации объекта исследования.

Блок 2. Формирование настроек КТ и проведение сканирования ДТТ в зависимости от результата предварительной оценки изучаемого ДТТ:

- тип КТ (медицинский, промышленный, специальный и др.);

- настройки КТ [54, 106], из которых только несколько являются необходимыми для построения КЭ модели: основное и дополнительные направления сканирования, шаг сканирования, размер изображений, тип формата полученных изображений (DICOM, JPEG, и др.);

- проведение КТ сканирования.

Блок 3. Формирование пакета растровых (цифровых) изображений, которое представляет собой документирование [54, 106] результатов КТ сканирования ДТТ в памяти ЭВМ с целью последующей их компьютерной визуализации. То есть, результат записывается в виде файла, в котором представлена последовательность растровых изображений сечений ДТТ, полученных на каждом шаге сканирования.

Блок 4. Построение матрицы индексов цвета. В данном блоке осуществляется представление растровых изображений сечений (набора пикселей) в виде двумерной матрицы в памяти ЭВМ. Таким образом, каждый элемент этой матрицы имеет свое значение индекса цвета, которое зависит от его топологического положения и относительной оптической плотности изображений сечений в этом месте.

В данном блоке выполняются следующие этапы:

1. Предварительная обработка растровых изображений;

2. Выделения области объекта исследования на растровом изображении; определение системы координат;

3. Обесцвечивание или определение растрового изображения в оттенках серого (раздел 2.1);

4. Представление области изучаемого объекта в растровом изображении в виде цифровой матрицы.

Предварительном этапом обработки растрового изображения является проведение его фильтрации с помощью Гауссового фильтра. Известно, что для любого устройства, при регистрации изображений, шум является неотъемлемой частью [12, 87, 136, 162]. Существуют несколько видов шума: шум устройств регистра-

ции захвата изображения; смазывание изображения; независимый случайный шум; вмешательство при наблюдении объектов и др. Причины возникновения шума: сами измерительные приборы; изменение масштаба и размера изображения; хранение и передача изображений с потерей данных.

Под обработкой растровых изображений здесь, включая фильтрацию, используется понятие их свертки с определенным ядром. То есть, для того чтобы выполнить преобразование изображения выполняется "свертка" входного изображения с соответствующим (заранее выбранным) ядром.

Со всеми пикселями в изображении проводятся свертка с ядром свертки определяемых выражением (3.1) изменения исходных значений пикселей.

$$I_{вы}(m,n) = I_{вх}(m,n) * H(k,l) = \sum_{k=-r}^{r} \sum_{l=-r}^{r} I_{вх}(m-k, n-l) H(k,l), \qquad (3.1)$$

где $I_{вы}$(m,n) – выходная матрица свертки между $I_{вх}$(m, n) и H(k, l); $I_{вх}$(m,n) – исходная матрица размера изображения (m, n); H(k, l) – матрица ядра свертки.

Фильтр Гаусса использован для удаления шума. Сущность этого преобразования состоит в реализации сверки изображения с ядром симметричной формы в виде 2D функции Гаусса. Эта непрерывная функция определяется следующим образом:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \mathrm{e}^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}. \qquad (3.2)$$

Теория линейной и нелинейной фильтрации изображений представлена в работах [12, 86, 87, 136, 162].

Для построения модели геометрии сечения, в растровом изображении необходимо выделить анализируемую область объекта исследования (рисунок 3.2), используемое для уменьшения объема обрабатываемой информаций.

Этапами алгоритма выделения области исследования являются:

1. Из заданного растрового изображения, выбираются координаты интервалов области исследования (x_1, y_1), (x_2, y_2).

2. Из списка способов обесцвечивания изображения выбирается способ для определения растрового изображения заданного в оттенках серого.

3. Производится извлечение значений индексов цвета пикселей, определение их в оттенках серого и заполнение в матрицу индексов цвета I(m, n), где m и n –

размеры растрового изображения и соответственно размеры полученной матрицы.

Процесс обесцвечивания и матричного представления пикселей изображения осуществляется в специальной программе [38], написанной на алгоритмическом языке Visual Basic, рассматривающей матрицу пикселей как массив цифровых данных.



Рисунок 3.2 – Заполнение матрицы индексов цвета анализируемой зоны

Блок 5. Построение геометрии сечения и каркасной модели, осуществляется специальной программой [38, 75] обработки растровых изображений сканирования КТ в сечениях ДТТ на основе математических зависимостей, описанных в разделе 2.1. Более подробное описание принципа работы этого блока представлено в разделе 3.2.1.

Блок 6. Построение сетки КЭ модели ДТТ.

В зависимости от степени регулярности геометрии ДТТ, используются два метода генерации сетки КЭ модели [36]:

- если геометрия регулярна, то переход от каркасной модели геометрии к генерации КЭ сетки осуществляется с использованием КЭ типа гексаэдр (HEX);

- в случае нерегулярной геометрии, переход от каркасной модели осуществляется с дополнительным построением объёмной модели твердотельной геометрии и, чаще всего, используется КЭ типа тетраэдр (TET).

Если геометрия позволяет, то предпочтение отдается КЭ типа HEX.

Генерация сетки КЭ модели проводится в программном комплексе MSC Patran (подробное описание в разделе 3.2.2).

Блок 7. Определение механических характеристик материала в узлах и конечных элементах в КЭ модели. При этом, используются основные подходы, предложенные в работах [37, 63], реализуемые с помощью специальной программы [38, 76]. Решается следующая последовательность задач (подробное описание в разделе 3.2.3):

- вычисление весового коэффициента для определения модуля упругости отдельных пикселей;

- совмещение (координация) узлов сетки КЭ модели с координатами пикселей растровых изображений;

- определение механических характеристик материала в узлах и конечных элементах;

- преобразование структуры данных в виде файла *.*pcl*, для возможности использования в КЭ модели.

Блок 8. Построение КЭ модели ДТТ в целом, с учетом сетки, граничных условий и действующей внешней нагрузки, а также, соответственно, с учетом неоднородности механических характеристик материала и геометрии в результате работы блоков 5, 6, и 7 (рисунок 3.1). Это означает, что КЭ модель ДТТ построена с индивидуальной (реальной) геометрией, где каждый её конечный элемент изотропен и имеет свое значение модуля упругости. Анизотропная структура кости представляется совокупностью этих конечных элементов.

Блок 9. Проведение анализа НДС КЭ модели ДТТ. В качестве внешнего нагружения может использоваться решение контактной задачи взаимодействия КЭ моделей ДТТ. Анализ проводится в программном комплексе MSC Nastran. Результатом анализа является полный комплекс упругих перемещений, деформаций и напряжений исследуемого ДТТ.

Все представленные блоки общего алгоритма выполняются последовательно. Цикличность выполнения операций, при необходимости, имеет место внутри каждого блока.

Анализ точности и сходимости представленного численного решения МКЭ, с учетом неоднородности механических характеристик материла и индивидуальной геометрии, приведен в главе 4.

Информация о КЭ модели ДТТ, полученной на основе сканирования, может иметь большой объем, что, в значительной степени, определяет время проведения анализа. Она включает в себя: координаты узлов, топологию конечных элементов в КЭ модели, количество степеней свободы граничных условий защемления,

условия размещения контактных конечных элементов, количество групп материалов и групп свойств элементов. При достаточной для точности вычислений сетки КЭ (специальное исследование, представленное ниже) возникает необходимость использовать компьютер повышенной мощности, например компьютер с конфигурацией ядра i7-4712HQ и 16 Гб оперативной памяти.

Из представленных факторов, влияющих на время проведения анализа КЭ моделей реальных ДТТ, возможно оптимизировать только количество групп материалов и групп свойств элементов. Так как, остальные факторы объективны и зависят от типа решения задачи и точности полученных результатов.

В таблице 3.1 представлен результат исследования влияния количества групп свойств конечных элементов на время проведения анализа КЭ моделей тестовых образцов. Результат показывает, что в одной модели, при увеличении количества групп свойств конечных элементов, время проведения анализа увеличивается во много раз.

Таблица 3.1

Время проведения анализа КЭ моделей тестовых образцов
в зависимости от количества групп свойств конечных элементов

Количество групп свойств элементов (HEX)	20	160	1280	10240	81920
Время анализа *(с)*	8,22	9,04	20,82	171,74	7112,24

Далее, в таблице 3.2, показывается результат исследования влияния типов конечных элементов на время проведения анализа КЭ моделей тестовых образцов. Анализ результата показывает, что, с использованием конечных элементов типа тетраэдр, увеличивается их количество, а также количество групп свойств конечных элементов, что неизбежно увеличивает время проведения анализа.

Таблица 3.2

Время проведения анализа КЭ моделей тестовых образцов
в зависимости от типов конечных элементов

Размер конечных элементов *(мм)*		4	3	2	1
Количество групп свойств элементов	HEX	324	471	883	7012
	TET	564	623	1789	16860
Время анализа *(с)*	HEX	8,87	11,21	44,23	382,92
	TET	10,45	16,66	57,94	537,83

Для решения этой проблемы или определенной её компенсации, в данной работе предлагается, перед проведением анализа, определенная упаковка конечных элементов с одинаковым модулем упругости для уменьшения количества групп свойств элементов.

3.2 Работа отдельных модулей общего алгоритма программной реализации интерпретации растровых изображений сканирования

3.2.1 Модуль построения геометрии внешних контуров и внутренней структуры деформируемых твердых тел

Предложенный модуль (рисунок 3.1, блок 5) служит для обработки пакета растровых изображений с целью построения геометрии сечений в системе проектирования (CAD). В качестве такой системы могут использоваться такие программные комплексы, как AutoCAD, Unigraphics NX и другие. Описание этапов алгоритма построения геометрии сечения представлено на рисунке 3.3.

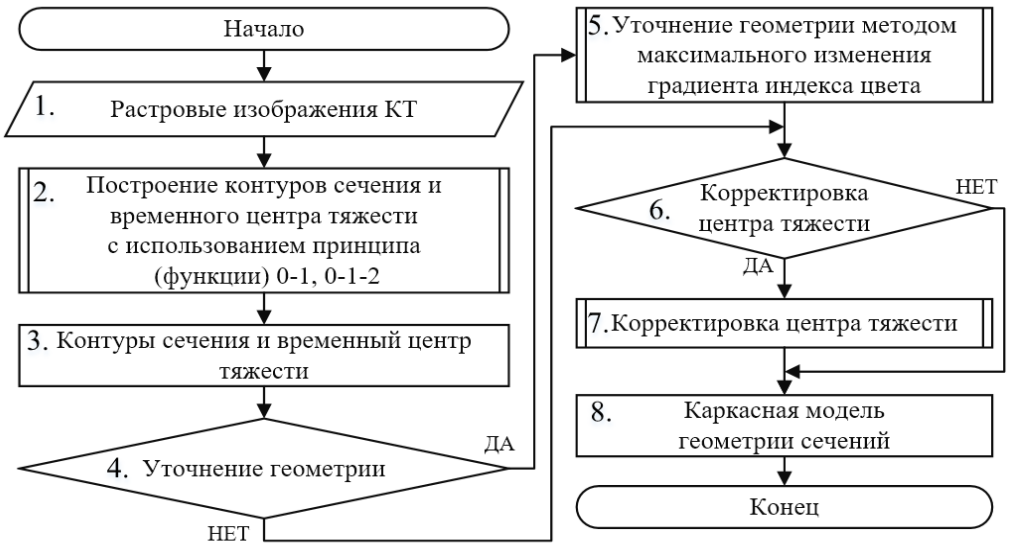


Рисунок 3.3 – Блок-схема алгоритма построения геометрии сечения ДТТ

1. Ввод данных алгоритма построения геометрии ДТТ (рисунок 3.1, блок 5). В качестве них используется пакет растровых (цифровых) изображений в сечениях ДТТ, полученных в виде двумерных матриц (рисунок 3.1, блок 4).

2. Построение предварительной геометрии и зон (областей) в сечении с помощью специальных функций «0-1» или «0-1-2».

3. Получение контура предварительной геометрии контура сечения в целом, с временным центром тяжести, а также зон в сечениях ДТТ с явно выраженными отличиями по величине механических характеристик. Например, для сечений зуба, это области эмали, дентина и пористых полостей.

4. Условный блок. Определяет вопрос «уточнение геометрии?», ответ «да» - перейти к этапу уточнения геометрии, ответ «нет» - этот этап пропускается.

5. Уточнение геометрии проводится по предварительному построенному контуру на основе исследования изменения градиента индекса цвета.

6. Вопрос «корректировка центра тяжести?», ответ «да» - перейти к этапу корректировки цента тяжести, ответ «нет» - этот этап пропускается.

7. Корректировка центра тяжести всех сечений относительно уточнённой геометрии сечения.

8. Результаты обработки всех сечений объединяются для создания каркасной модели. Расстояние между сечениями равно шагу сканирования КТ.

Далее дано подробное описание алгоритмов, используемых в этих блоках построения геометрии. В них включены следующие алгоритмы и подпрограммы:

1) Функция «0-1»

По принципу проведенному в разделе 2.1 алгоритм «0-1» включает в себя следующие этапы:

1. Используется матрица индексов цвета $I_{grey}(m, n)$, определяется максимальное и минимальное значения индексов цвета;

2. Ввод значения $n_{ВП}$ и $n_{НП}$ – верхнего и нижнего фиксированных пределов определения самой зоны объекта на растровом изображении, что означает $I_{\min} < n_{НП} < n_{ВП} \le I_{\max}$;

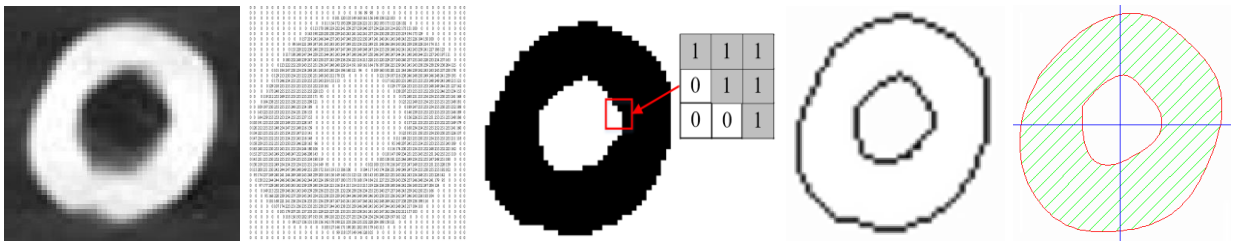
3. Пикселям матрицы индексов цвета присваиваются: для самого объекта значения равные 1, для остальных пикселей – значения 0. Результат сохраняется в новую матрицу $I_{resul}(m, n)$;

4. Построение предварительного контура сечения изучаемого объекта. Осуществляется путем удаления внутренних пикселей и сохранения пикселей на краях (рисунок 3.4);

5. Определение координаты временного центра тяжести сечения;

6. По окончании работы алгоритма, контуры сечений сохраняются в виде матрицы $I_{01}(m, n)$, координаты временного центра тяжести Ц($x_ц$, $y_ц$).

В результате работы алгоритма будут построены контуры сечения в виде пикселей с временным центром тяжести (рисунок 3.4).



а) б) в) г) д)

Рисунок 3.4 – Этапы построения контура сечения изучаемого объекта:
а) исходное растровое изображение; б) матрица индексов цвета;
в) черный - зона значений 1, белый – зона значений 0;
г) предварительный контур; д) полученная геометрия сечения ДТТ

Иногда, процесс определения временного центра тяжести не требуется, это может быть по следующим причинам: - значения $n_{ВП}$ и $n_{НП}$ указаны не точно, то есть, не соответствуют пикселям реальной границы сечения изучаемого ДТТ; - сам объект не замкнутый (при сканировании только части ДТТ), тогда в результате обработки контур объекта не замкнут.

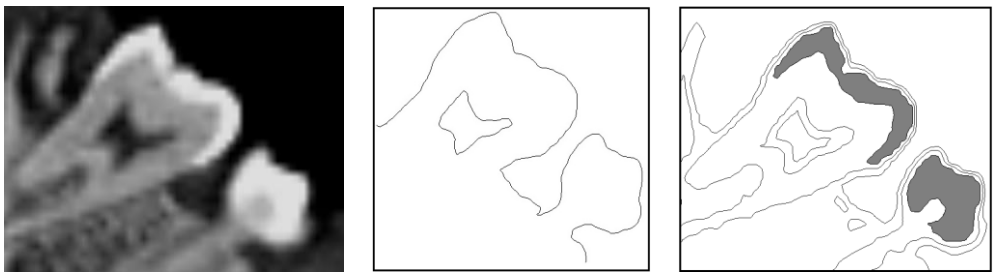
2) Функция «0-1-2»

Построение, наряду с внешним контуром, контуров внутренней структуры в сечении ДТТ, например контура силовой части кости, имеет больше преимущества, особенно в том, что можно оценить зону, которая воспринимает большие значения напряжений при воздействии внешней нагрузки. Для реализации представленного, предлагается еще одна дополнительная функция «0-1-2», которая имеет возможность выделения зон внутренней структуры ДТТ (рисунок 3.5).

Алгоритм функции «0-1-2» включает в себя следующие этапы:

1. Используется матрица индексов цвета $I_{grey}(m, n)$, определяется максимальное и минимальное значения индексов цвета;

2. Ввод $n_{ВП}$ и $n_{НП}$ – верхнего и нижнего фиксированных пределов определения самого изучаемого объекта, ввод n_C – предела определения силовой части объекта, $I_{min} \le n_{НП} < n_C < n_{ВП} \le I_{max}$;



а) б) в)

Рисунок 3.5 – Обработка растрового изображения сканирования ДТТ:
а) исходное растровое изображение; б) результат функции«0-1»;
в) результат функции «0-1-2» с представлением силовой части

3. Пикселям матрицы индексов цвета присваиваются: для внутренней структуры значения равные 2, самого объекта значения равные 1, для остальных пикселей - значения 0. Результат сохраняется в новую матрицу $I_{resul}(m, n)$;

4. Построение контуров сечений и контуров внутренней структуры изучаемого объекта также путем удаления внутренних пикселей, сохранения пикселей на краях;

5. Определение координаты временного центра тяжести сечения.

6. Окончание работы алгоритма, на котором сохраняются контуры в виде матрицы $I_{012}(m, n)$ и координаты временного центра тяжести $Ц(x_ц, y_ц)$.

3) Определение пикселей задающих контур геометрии сечения

1. Проведение проверки входного растрового изображения последовательно по строкам сверху-внизу, чтобы встретить ненулевую точку Р (пиксель с значением 1 или 2) в данном изображении;

2. Для движения (обозначения) по контуру сечения осуществляется проверка соседей пикселя Р, чтобы поиск следующие последовательные пикселя с ненулевым значением. Пикселю, который прошел, присваивается временное значение 0, его координаты записывается в матрицу результата;

- если все соседи пикселя Р имеются ненулевое значение, то повторяется этап 2 на временном растровом изображении, чтобы встретить новую ненулевую точку. И также далее, повторяется процесс проверки соседей этого пикселя;

- если имеется больше один, относительно пикселя Р, соседний пиксель с ненулевым значением, то выбирается любой из них;

- количество повторений процесса поиска ненулевой точки не должно превышать заданное число;

- начальная ненулевая точка может быть, при необходимости, задана заранее, чтобы уменьшить время работы алгоритма поиска пикселей, задающих контур геометрии сечения.

3. Результат работы алгоритма записывается в виде матрицы с координатами пикселей обозначающих контур сечения.

Каждый контур, из полученных контуров, сохраняется в отдельную матрицу.

4) Определение координат центра тяжести сечения

Алгоритм определения координат центра тяжести сечения включает в себя следующие этапы:

1. Используется матрица $I_{resul}(m, n)$ для определения набора пикселей внутри сечения объекта с координатами, которые в матрице имеются значения не 0;

2. Координаты набора пикселей внутри контура сечения используются для определения координат цента тяжести сечения, по формуле (2.19);

3. Задается вопрос «уточнение геометрии?», ответ «да» - перейти к задаче уточнения геометрии, ответ «нет» – перейти на следующий этап;

4. Задается вопрос о корректировке центра тяжести, если «да» - перейти к задаче корректировки центра тяжести, если «нет» – на конец.

5) Выбор опорных пикселей для векторизации геометрии

Для векторизации геометрии контура сечения (в виде линий или сплайнов) необходимо выбрать опорные точки (пиксели) с координатами – $P_i(x_i, y_i)$. В данной работе предлагается три метода: – по шагу пикселя; – по пределу изменения угла; и – по пределу минимального радиуса. Алгоритм, представленный ниже на рисунке 3.6, определяется следующими этапами:

1. Определение структурных пикселей контура сечения, их координаты записаны в матрице $I_{sec}(m, n)$;

2. Выбор метода определения опорных пикселей для интерполяции (векторизации) геометрии сечения:

2.1. Определение по шагу пикселей:

- ввод требуемого шага пикселя;

- от начала до последнего члена, выбор опорных пикселей через шаг эле-

мента матрицы, первый и последний члены матрицы $I_{sec}(m, n)$ всегда выбираются, результат записывается в новую матрицу.

2.2. Определение по пределу изменения угла:

- ввод верхнего ($\alpha_{ВП}$) и нижнего ($\alpha_{НП}$) предела изменения угла;

- цикл проводится с начальным членом P_i, вычисляются углы: α_i – между лучами $\overline{P_iP_{i+1}}$ и $\overline{P_iP_{i+2}}$; α_{i+1} – между лучами $\overline{P_iP_{i+1}}$ и $\overline{P_{i+1}P_{i+2}}$;

- определяется изменение угла $\Delta(\alpha_{i+1}, \alpha_i)$;

- сравнение $\Delta(\alpha_{i+1}, \alpha_i)$ с пределами $\alpha_{ВП}$ и $\alpha_{НП}$.

Если $\Delta(\alpha_{i+1}, \alpha_i) \geq \alpha_{ВП}$: выбираются члены $P_i\ P_{i+1}\ P_{i+2}$, повторяется цикл с новым начальным членом P_{i+2};

Если $\alpha_{НП} \leq \Delta(\alpha_{i+1}, \alpha_i) < \alpha_{ВП}$: выбираются члены $P_i\ P_{i+2}$, повторяется цикл с новым начальным членом P_{i+2};

Если $\Delta(\alpha_{i+1}, \alpha_i) < \alpha_{НП}$: пропускается член P_{i+1}, повторяется цикл с новыми членами $P_{i+2}\ P_{i+3}$, цикл останавливается только когда $\Delta(\alpha_{i+n}, \alpha_i) \geq \alpha_{НП}$ и каждый раз повторяется с новым начальным членом P_{i+n};

- первый и последний члены матрицы $I_{sec}(m, n)$ всегда выбираются;

- результат записывается в новую матрицу.

2.3. Определение по пределу минимального радиуса:

- ввод предела минимального радиуса ($R_П$);

- цикл проводится с начальным членом P_i, вычисляется радиус R_i окружности (дуги), проходящей через P_i, P_{i+1} и P_{i+2};

- сравнение радиуса R_i с пределом минимального радиуса $R_П$:

Если $R_i < R_П$, выбираются члены $P_i\ P_{i+1}\ P_{i+2}$, цикл повторяется с новым начальным членом P_{i+2};

Если $R_i \geq R_П$, пропускается член P_{i+1}, цикл повторяется с новым начальным членом P_{i+2};

- первый и последний члены матрицы $I_{sec}(m, n)$ всегда выбираются;

- результат записывается в новую матрицу.

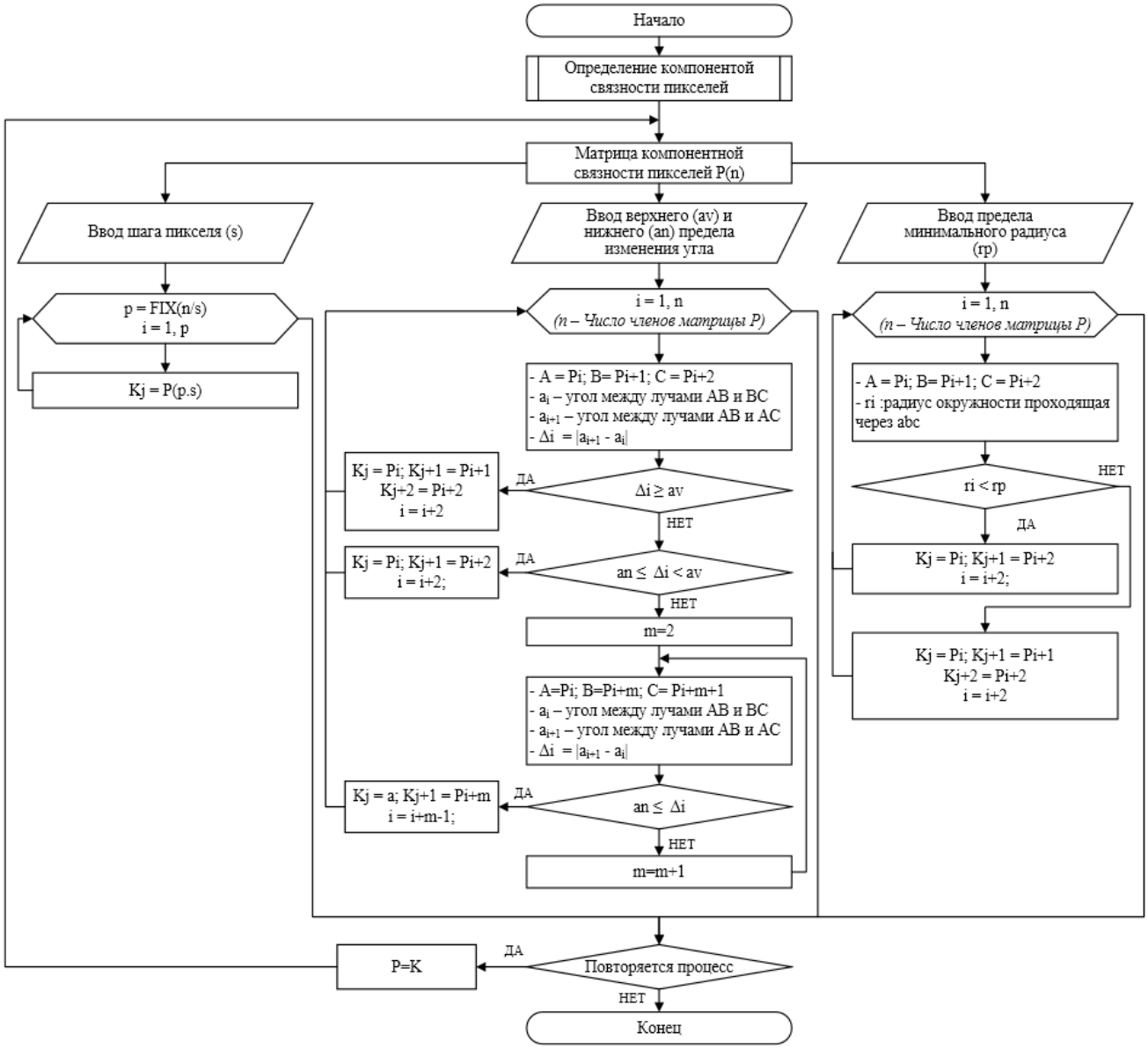


Рисунок 3.6 – Блок-схема выбор опорных пикселей для интерполяции геометрии

3. Задается вопрос для повторения процесса определения опорных пикселей для интерполяции геометрии, начинающегося с новой матрицы, ответ «да» - повторяется этап 2 с новой матрицей, ответ «нет» - окончание работы алгоритма.

6) Уточнение геометрии сечения методом максимального изменения градиента индексов цвета

Контур сечения симметричного или замкнутого вида

Процесс уточнения геометрии контура сечения симметричного или замкнутого вида проводится относительно временного центра тяжести с помощью анализа матрицы индексов цвета сечения. Во временном центре тяжести сечения назначается локальная система координат сечения XOY.

Алгоритм уточнения геометрии сечения представляется в виде следующих этапов:

1. Построение окружности с радиусом R. Радиус R назначается больше, чем максимальный радиус внешнего контура предварительной геометрии;

2. Назначается угол φ поворота радиуса. Угол φ – шаг поворота радиуса против хода стрелки часов;

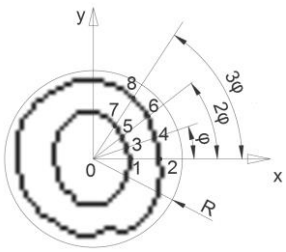
3. Определение геометрического места точек контура сечения уточненной геометрии проводится последовательным поворотом радиуса R на некоторый угол поворота φ, пока ∑φ не составит значение 2π (рисунок 3.7);

- если φ=0, то просмотр индексов цвета вдоль радиуса методом максимального градиента позволяет определить координаты точек 1 и 2;

- если угол равен φ, то определяются координаты точек 3 и 4;

- если угол равен 2φ, то определяются координаты точек 5 и 6, и так далее;

- после поворота радиуса на угол 2π, получается геометрическое место точек для построения контуров уточнённой геометрии сечения объекта исследования (рисунок 3.7, справа).



X1 =349,4300 Y1 =213,3100 X2 =356,9000 Y2 =213,3100
X3 =347,7104 Y3 =209,9900 X4 =354,8984 Y4 =205,8400
X5 =345,6950 Y5 =206,8408 X6 =350,2600 Y6 =198,9340
X7 =341,9600 Y7 =204,1800 X8 =341,9600 Y8 =196,7100
X9 =338,6400 Y9 =207,5596 X10=333,6600 Y10=198,9340
X11=335,4908 Y11=209,5750 X12=327,5840 Y12=205,0100
X13=335,3200 Y13=213,3100 X14=326,1900 Y14=213,3100
X15=336,2096 Y15=216,6300 X16=327,5840 Y16=221,6100
X17=338,2250 Y17=219,7792 X18=333,6600 Y18=227,6860
X19=341,9600 Y19=221,6100 X20=341,9600 Y20=230,7400
X21=346,1100 Y21=220,4980 X22=351,0900 Y22=229,1236
X23=348,4292 Y23=217,0450 X24=357,0548 Y24=222,0250

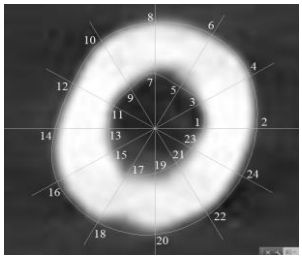


Рисунок 3.7 – Определение уточненной геометрии сечения деформируемого тела

4. Координаты уточненной геометрии записываются в новую матрицу, и используются для интерполяции (векторизации) геометрии в проектной системе, например, системе AutoCAD (рисунок 3.8);

5. Конец алгоритма.

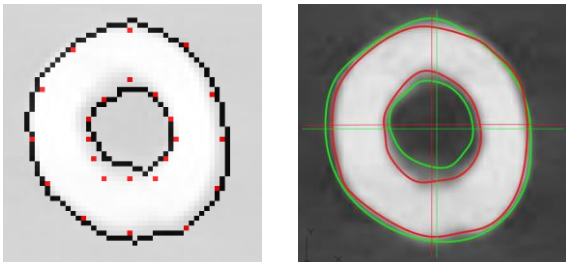


Рисунок 3.8 – Результат уточнения геометрии сечения:
зеленная – предварительная, красная – уточненная геометрия

Контур сечения несимметричного или незамкнутого вида

Известно, что большинство ДТТ из натуральных материалов имеет более сложную геометрию, чем в приведенном выше случае (рисунок 3.9).

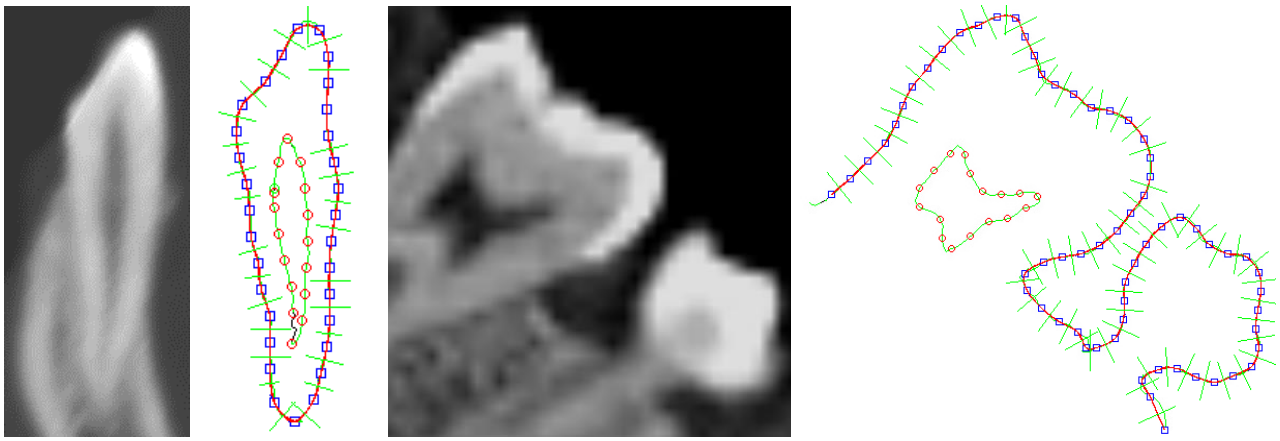


Рисунок 3.9 – Построение геометрии сечения любого вида методом максимального изменения градиента индексов цвета

Для уточнения контура сечения такого типа геометрии, используется алгоритм несимметричного или незамкнутого вида, которые проводится в виде следующих этапов:

1. Построение предварительного контура геометрии сечения ДТТ (используется функция 0-1);

2. Определение набора пикселей связности, их координаты сохраняются в матрицу $I_{resul}(m, n)$;

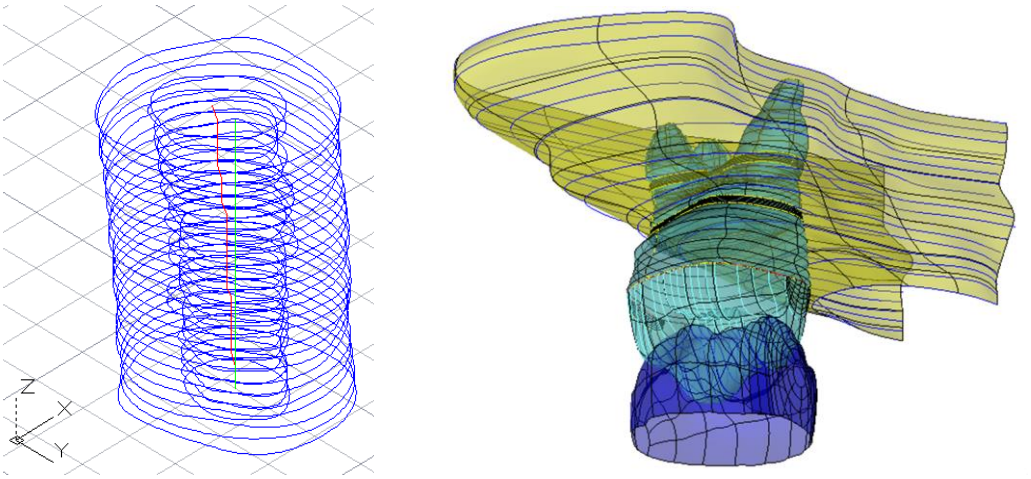
3. В зависимости от каждого конкретного случая, используется набор пикселей связности для определения опорных пикселей (точек);

4. Для каждой точки, строится прямая, перпендикулярная предварительному контуру в этой точке;

5. По длине каждой из этих прямых исследуется изменение градиента индексов цвета. Уточненная точка геометрии сечения определяется местом максимального изменения градиента индексов цвета;

6. Координаты уточнённых точек записываются в новую матрицу, и используются для интерполяции (векторизации) геометрии в системе проектирования (AutoCAD) (рисунок 3.10);

7. Конец алгоритма.



а) б)

Рисунок 3.10 – Каркасная модель геометрии сечений а) кости и б) зуба человека

После построения геометрии всех сечений, они формируются в виде пакета или каркасной модели уточнённой геометрии ДТТ, где расстояние между сечениями является шагом сканирования (рисунок 3.10).

7) Корректировка положения центра тяжести сечений

Алгоритм корректировки положения центра тяжести сечений содержит следующие этапы:

1. Выбор базового сечения, определение его центра тяжести;

2. Определение центра тяжести остальных сечений.

Вычисление перемещения центра тяжести сечения имеет, при построении модели, два основных назначения:

- перестраивание геометрии каркасной модели с перемещением центров тяжести всех сечений;

- вычисление смещения, необходимого для совмещения (координации) узлов сетки КЭ модели с растровыми (пиксельными) координатами.

8) Векторизация (интерполяция) геометрии сечения деформируемых тел в системе проектирования (AutoCAD)

Результаты уточнения геометрии и определения опорных пикселей используются, как основа для векторизации (интерполяции) геометрии сечения ДТТ в системе проектирования, например в AutoCAD, с использованием линии или сплайна.

Этот процесс выполняется следующими этапами:

1. Результат уточнения геометрии используется для определения пикселей,

задающих контур геометрии сечения. Их координаты записываются в матрицу $I_{resul}(m, n)$;

2. Матрица $I_{resul}(m, n)$ используется для определения координат опорных пикселей (точек), с дальнейшим использованием для интерполяции геометрии сечения, координат опорных пикселей записывается в матрицу $I_{opor}(k, l)$:

2.1. Для интерполяции геометрии ДТТ, имеющего простую геометрию, используется линейная-интерполяция, которая соединяет всех координат опорных пикселей контура сечения по очереди, в виде линий;

2.2. Для интерполяции геометрии ДТТ, имеющего индивидуальную геометрию, используется сплайн-интерполяция, которая соединяет все координаты опорных пикселей контура сечения по очереди, в виде сплайна. Основным методом формирования сплайна используются кривые Безье. Однако, при использовании системы AutoCAD, по умолчанию, предпочтение отдается методу B-сплайна;

3. Результаты интерполяции отправляются в AutoCAD и сохраняются в формате **.dfx* или в формате **.iges* для использования в различных препроцессорах и программных комплексах инженерного анализа (MSC Patran, MSC Apex, NX Unigraphic, Femap, ANSYS и др.).

На рисунке 3.11 представлены примеры окон интерфейсной программы построения и редактирования геометрии ДТТ на основе обработки их растровых изображений сканирования КТ. На рисунке 3.12 представлено окно интерфейса подпрограммы исследования изменения градиента индексов цвета по построенному предварительному контуру для уточнения геометрии сечения.

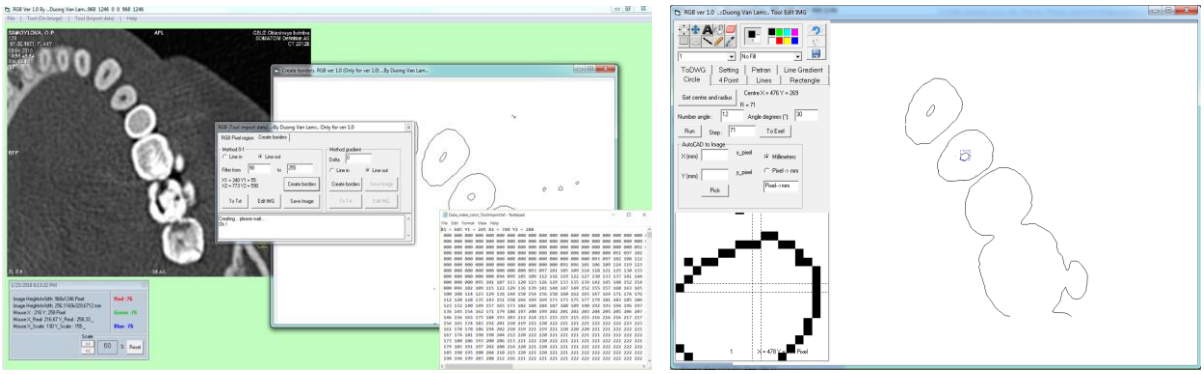


Рисунок 3.11 – Главный интерфейс программы обработки растрового изображения сканирования КТ для построения геометрии сечения

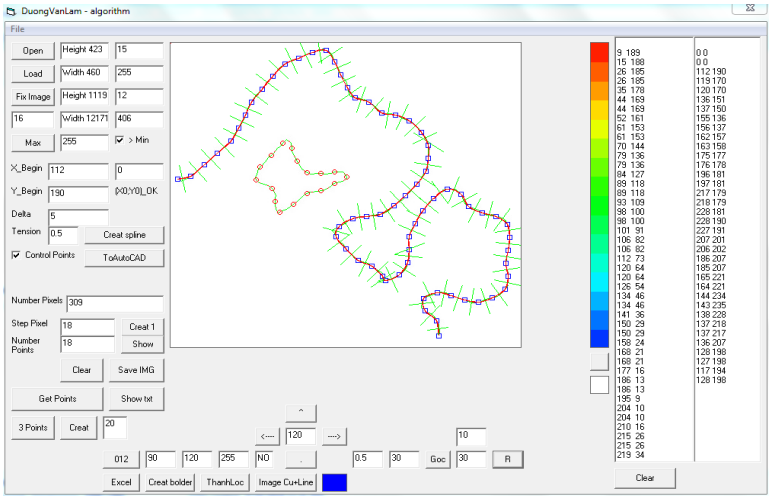
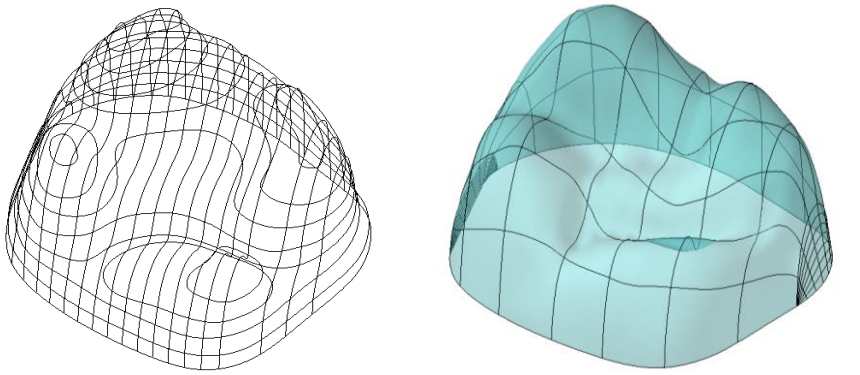


Рисунок 3.12 – Интерфейс подпрограммы исследования изменения градиента индексов цвета для уточнения и интерполяции геометрии сечения

На рисунке 3.13 представлен результат интерполяции геометрии сечений ДТТ в системе проектирования AutoCAD. Слева на рисунке показана каркасная модель верхней части зуба. На рисунке справа представлена ее поверхность и твердотельная модель геометрии, построенная на основе каркасной модели.



а) б)

Рисунок 3.13 – Интерполяция геометрии сечений верхней части зуба:
а) каркасная модель и б) поверхность

3.2.2 Модуль генерации сетки конечно-элементных моделей деформируемых твердых тел

Генерация (построение) сетки КЭ модели ДТТ является важным этапом при моделировании ДТТ. Обычно в инженерных программных комплексах, реализуется несколько вариантов построения КЭ сетки, поскольку увеличение методов ее построения дает пользователям более гибкий инструмент для решения проблемы получения наиболее приемлемой сетки КЭ модели.

В этой области математического моделирования, чаще всего используются два направления – явное и неявное [26, 81, 82]. При осуществлении процесса явного моделирования, требуется полностью определить параметры КЭ сетки и ее локальные особенности. Соответственно, инженерная программа должна быть оснащена значительными средствами, позволяющими редактировать отдельные фрагменты и всю сетку КЭ модели в целом. С использованием неявного моделирования, процесс построения КЭ сетки ограничивается заданием величины ребра конечных элементов (некоторого среднего значения) и/или пометкой их количества. Обычно, инженерные программы сочетают оба направления представленного моделирования, тем самым позволяя пользователю быстро создать КЭ сетку и, при необходимости, ее отредактировать.

Также, при построении КЭ модели, важное значение для сетки имеет размерность задачи, тип конечных элементов, их количество и размер, которые зависят друг от друга. В зависимости от размерности исследуемой задачи, в данной работе, используются два типа конечных элементов: двухмерные конечные элементы, используемые при дискретизации плоских тел (построении КЭ сетки сечений) и трехмерные конечные элементы, используемые при дискретизации объемных тел.

Полученная на основе сканирования индивидуальная геометрия ДТТ используется для генерации КЭ сетки, которая должна отвечать следующим рекомендациям [41, 81, 82, 151]: - линейные элементы требуют более густой сетки, чем квадратичные или кубические элементы; - упорядоченная (параметрическая, структурированная) сетка является более предпочтительной, чем произвольная; - прямоугольная сетка для объемного НДС с 8 узлами (HEX) является более предпочтительной, чем сетка треугольных элементов (TET) и др.

Поскольку точность расчета напрямую зависит от того, какие размеры имеют конечные элементы, то необходимо придерживаться рекомендаций, представленных ниже, в главе 4 для каждой КЭ модели.

При построении КЭ модели ДТТ, с использованием технологии сканирования, генерация сетки КЭ осуществляется по определенной системе, которая учитывает необходимость расположения определенной части узлов в плоскостях сечений

растровых изображений. Это достигается путем временного разбиения полученных контуров сечений ДТТ на плоские конечные элементы. С дальнейшим осуществлением генерации сетки объемных КЭ и удаления плоских КЭ, без удаления их узлов.

При этом, интерполяция значений индексов цвета в каждом из узлов КЭ сетки проводится только относительно пикселей, находящихся на наиболее близких к нему растровых сечений (контуров) ДТТ.

Для оценки точности получаемых в дальнейшем результатов анализа НДС ДТТ плотность сетки КЭ удобно сравнивать с плотностью сетки пикселей растрового изображения. Однако, существует некоторый оптимальный (минимальный) размер пикселя для которого дальнейшее уменьшение размера пикселя не приводит к изменению результатов НДС ДТТ. Таким образом, все зависит от градиента изменения сканируемых величин и количества пикселей на единице размера ДТТ. Например, результаты анализа, представленные ниже, в разделе 4.3 (анализ НДС фрагмента кости), показывают, что если размер конечного элемента больше в 2-а раза размера пикселя, то ошибка в решении находится в пределах до 3%. Если есть необходимость решения задачи на микро уровне (меньше 0.1 мм), то требуется дальнейшее развитие представленного алгоритма в сторону решения глобально-локальной задачи.

Также, результат анализа НДС ДТТ зависит от качества записи результатов сканирования, применяемых типов конечных элементов (TET, HEX и др.) и, главное, он зависит от степени неравномерности распределения значений индексов пикселей растрового изображения, то есть степени неоднородности механических характеристик материала ДТТ в сечении.

Модуль генерации КЭ сетки на основе использования результатов сканирования состоит из трех этапов:

1. Генерация сетки плоских КЭ в сечении растрового изображения. В этом случае, все узлы КЭ сетки принадлежат области сечения ДТТ с растровым изображением.

2. Генерация сетки объемных КЭ на основе сетки плоских КЭ. При этом, сетка объемных КЭ построена с учетом того, что все узлы плоских конечных элементов в ней сохранены.

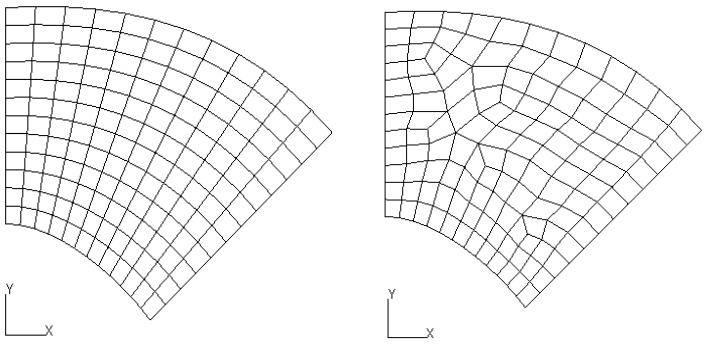
3. Удаление плоских КЭ, без удаления их узлов.

В результате работы модуля генерации КЭ сетки, с учетом использования технологии сканирования, получена объемная КЭ сетка, где имеются узлы имеющие координаты сечений сканирования.

Построение (генерация) сетки плоских КЭ

При построении сетки плоских КЭ [49, 81, 82] применяются два основные типа конечных элементов, которые подходят для нашего алгоритма и могут использоваться одновременно: четырех-узловой элемент (CQUAD4 – Quadrilateral plate element) и трёх-узловой элемент (CTRIA3 – Triangular plate element), где CQUAD4 является основным, а CTRIA3 чаще используется для согласования сеток элементов и заполнения нерегулярных границ.

Также, существует два основных метода генерации КЭ сетки сечения: IsoMesh (рисунок 3.14а) и Paver Mesh (рисунок 3.14б), каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки [49, 81, 150, 151]. Первый из них позволяет получать более точный результат при одинаковом количестве конечных элементов на данном размере области определения, второй является более универсальным с точки зрения геометрии области определения. Их предпочтение в использовании определяется, в каждом конкретном случае, для разной степени регулярности геометрии сечения.



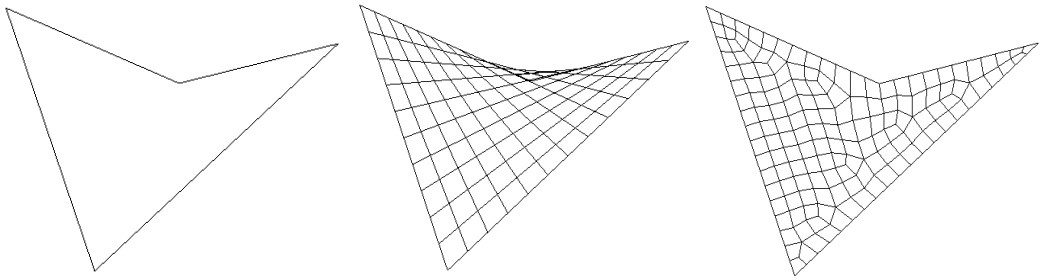
а) б)

Рисунок 3.14 – Методы создания сетки сечения методом IsoMesh и Paver Mesh

С использованием метода IsoMesh создается сетка одинаково разнесенными узлами вдоль каждого края в реальном пространстве (рисунок 3.14а), даже для неравномерно параметризованных геометрий сечения. Он вычисляет количество элементов и расстояние между узлами, для каждого выбранного геометрического

края, до того, как какая-либо отдельная область будет фактически зацеплена. Это делается для того, чтобы новая сетка была согласована с существующими сетками соседних регионов. Таким образом, метод IsoMesh требует, чтобы геометрии сечения были параметризованы и имели, как правило, четыре стороны. Т.е., более сложные геометрии сечения, имеющие более четырех сторон, сначала должны быть разложены на более мелкие подобласти с четырьмя сторонами.

На рисунке 3.15а представлен один из вариантов сложной n-сторонней геометрии сечения, для которых нет возможности построения КЭ сетки методом IsoMesh, то есть, заранее понятно, что сетка будет построена с плохим результатом (рисунок 3.15б). В этих случаях, рекомендуется использовать метод Paver Mesh (рисунок 3.15в).



а) б) в)

Рисунок 3.15 – Генерация сетки поверхности сложной геометрии сечения (а) методом IsoMesh (б) и Paver Mesh (в)

Метод Paver Mesh подходит для любого типа геометрий сечения, но лучше всего он подходит для сложных геометрий сечения с более чем четырьмя сторонами, например, геометрии сечения с отверстиями или вырезами и другие. Он также рекомендуется для геометрий сечения, требующих ячеистых переходов, например, от 4 до 20 элементов по геометрии сечения. Подобно методу IsoMesh, укладчик метода Paver Mesh вычисляет местоположения узлов в реальном пространстве, но в отличии от IsoMesh не требует, чтобы геометрии сечения были параметризованы.

Построение (генерация) сетки объемных КЭ

При построении сетки модели объемных КЭ [36, 49, 82], рекомендуется использовать два основных типа конечных элементов: шестисторонний конечный элемент (CHEXA – Six-sided solid element connection) и четырехсторонний конечный элемент (CTETRA – Four-sided solid element connection).

При реализации этого этапа, для реальных ДТТ, на основе данных их сканирования, используется, в зависимости от степени регулярности геометрии ДТТ, два случая построения КЭ модели.

Первый случай (рисунок 3.16) используется если геометрия реального ДТТ носит некоторый регулярный характер. Тогда переход от каркасной модели геометрии ДТТ непосредственно к генерации сетки КЭ модели является наиболее оптимальным. При этом, наиболее предпочтительным, по точности и вычислительным затратам, является использование КЭ типа гексаэдр, с размерами равными или (при необходимости) кратными шагу КТ сканирования. Трансформирование плоской 2D сетки сечения в 3D сетке выполняется с помощью операции «движение по направлению» (Sweep) [49, 151].

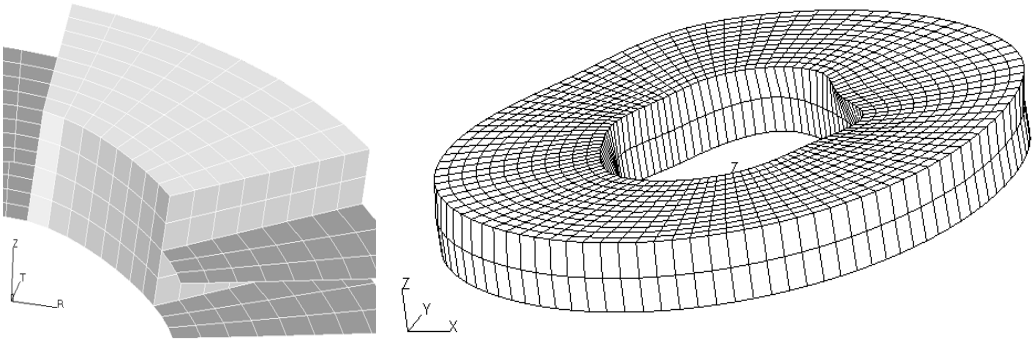


Рисунок 3.16 – Генерация сетки объемных КЭ моделей между сечениями

Когда результат сканирования КТ производится с шагом больше рекомендуемого размера конечных элементов, генерация сетки осуществляется интерполяцией сетки КЭ между сечениями (рисунок 3.17).

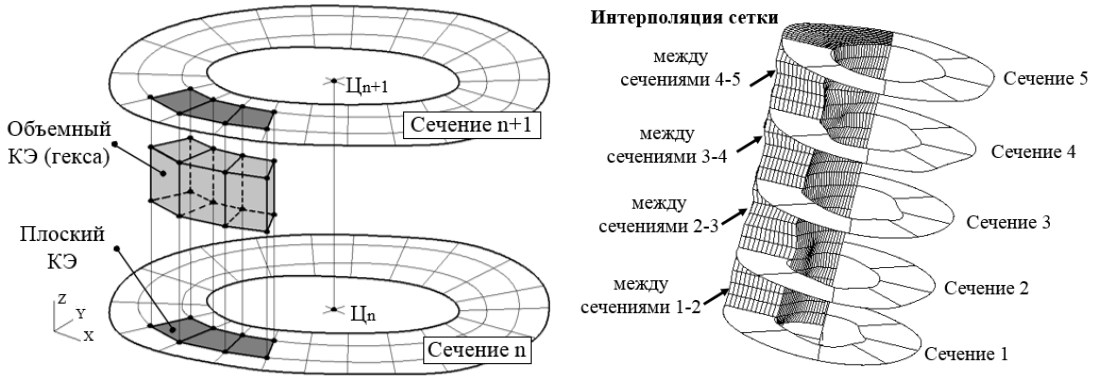


Рисунок 3.17 – Интерполяция сетки КЭ между сечениями

Второй случай используется если геометрия реального ДТТ носит нерегулярный (произвольный) характер, например, верхняя часть зуба человека (рису-

нок 3.18), объем горной породы и другие. Тогда, после формирования каркасной модели ДТТ, на её основе, осуществляется дополнительное построение объёмной твердотельной геометрической модели, с дальнейшим её использованием для генерации сетки КЭ модели ДТТ.

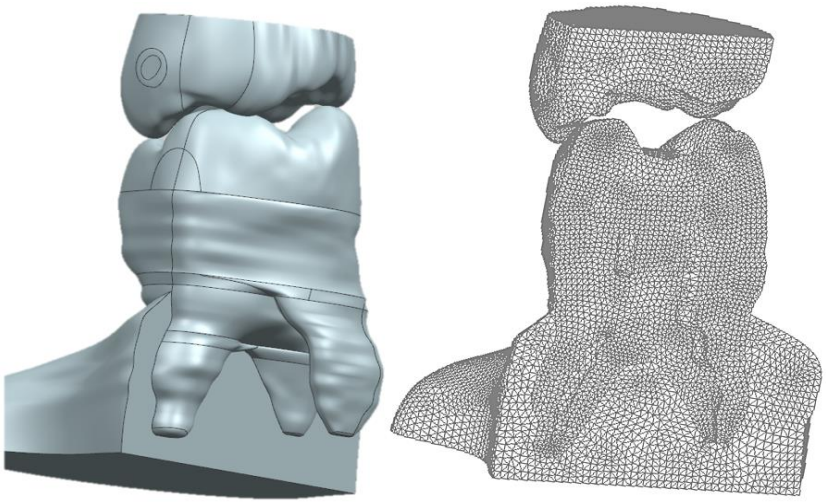


Рисунок 3.18 – Твердая модель зуба с произвольным характером геометрии и трёхмерная сетка КЭ модели методом Auto TetMesh

Таким образом, для каждой подобласти исследуемого ДТТ выбирается тип КЭ. Если сложность геометрии невысока, то предпочтение отдается КЭ типа гексаэдр. Если геометрия имеет повышенный уровень сложности, то используется КЭ типа тетраэдр. В последнем случае технология генерации КЭ сетки реализуется с использованием метода Auto TetMesh [36, 49, 81, 151], представленного в программных комплексах MSC Patran и MSC Apex.

Метод Auto TetMesh (Автоматическое нанесение сетки на 3D область модели) представляет собой автоматический способ нанесения сетки на произвольную, по форме, геометрическую область. С использованием этого метода создаётся трёхмерная сетка из элементов треугольной пирамиды на замкнутой твердотельной геометрической области (рисунок 3.18), включая регулярные твердотельные области. Некоторые преимущества этого метода представлены в работе [81]:

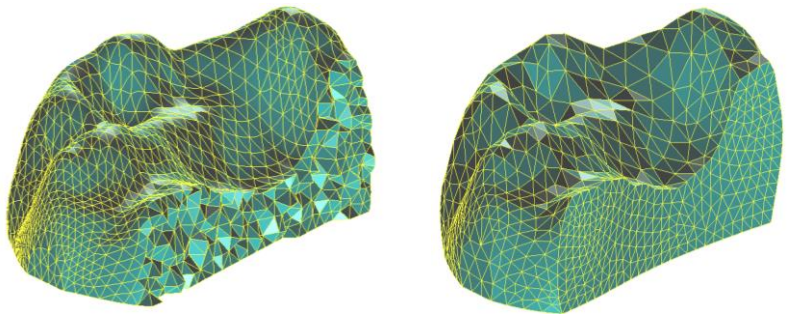
- метод подходит для сложной твердотельной области с минимальными, вводимыми пользователем, исходными данными;

- нанесение сетки, базирующейся на учёте кривизны ребра области, что позволяет получать высококачественную сетку в областях со сложной кривизной.

Также, есть функция, позволяющая задавать плотность сетки в областях с высокой кривизной по отношению к глобальному размеру элемента;

- нанесение сетки обеспечивает высококачественную сетку на тонкостенной области модели и другие.

Отдельно следует отметить, что при построении сетки объемной КЭ модели, с использованием данных сканирования, возникает необходимость строить поперечное сечение по требуемым позициям, например, вдоль оси пористого канала зуба. Без этого нет возможности увидеть картинки напряжений в этих необходимых областях (рисунок 3.19а).



а) б)

Рисунок 3.19 – Поперечное сечение верхней части зуба
без использования позиции (а) и с использованием позиции (б)

Решение этой проблемы при построении модели ДТТ осуществляется путем создания трёхмерной сетки по заданным сечениям, построенным, в свою очередь, относительно сечений сканирования (рисунок 3.19б). Построение сетки, в этом случае, проводится по следующим этапам:

- построение линий, проходящих через необходимые места, где требуется обозначение зон напряжений в сечении; на этой основе, осуществляется построение плоского сечения для ДТТ в целом;

- выделение подобластей твердого тела по этому построенному сечению;

- создание трёхмерных сеток каждой части твердого тела осуществляется с помощью инструмента «Assembly Meshing» – который позволяет создавать конформную сетку между телами и частями независимо от элементов управления;

- соединяются элементы одной области с элементами другой области.

При выделении твердого тела на множество подобластей с общими граница-

ми, создание КЭ сетки на одной области всегда производится единовременно, даже если указываются сразу несколько геометрических областей. Это означает, что по умолчанию элементы одной области не связаны с элементами другой, не имея общих узлов, и не будут деформироваться совместно. Чтобы устранить эту проблему, используется средство «Equivalencing», соединяющее совпадающие узлы [49].

3.2.3 Модуль определения неоднородности механических характеристик материала в узлах и конечных элементах

Результат построения сетки КЭ модели ДТТ дает возможность определения неоднородных механических характеристик материала ДТТ в узлах и конечных элементах его КЭ модели.

На основе математических зависимостей, приведенных в разделе 2.2, решение задачи определения значения индексов цвета каждого узла осуществляется совмещением координат узлов сетки КЭ модели с координатами пикселей растрового изображения. Эти значения, в последующем, умножаются на специальный весовой коэффициент, определяемый отношением опытного значения механических характеристик материала к среднему (среднестатистическому) значению индексов цвета сечений. В результате, в узлах КЭ сетки, относительно значений индексов цвета в них, назначаются механические характеристики материала. В конечных элементах, эти характеристики вычисляются как среднее арифметическое значение механических характеристик материала в узлах конечных элементов.

Этапами определения неоднородности механических характеристик материала в узлах и конечных элементах, на основе данных сканирования, является решение последовательности следующих задач:

- определение значений индексов цвета в узлах конечных элементов на основе интерполяции;

- определение зависимости модуля упругости от индексов цвета;

- определение неоднородности механических характеристик материала в узлах и конечных элементах в КЭ модели ДТТ.

- Определение значений индексов цвета в узлах конечных элементов на основе интерполяции

Принципом представленного модуля является преобразование миллиметровых координат узлов в пиксельную систему координат (рисунок 3.20), чтобы совместить координат узлов сетки КЭ модели с координатами пикселей в пакете растровых изображений. На данной основе, определяется относительное расположение узлов конечных элементов в сечении и между сечениями для интерполяции в них значений индексов цвета.

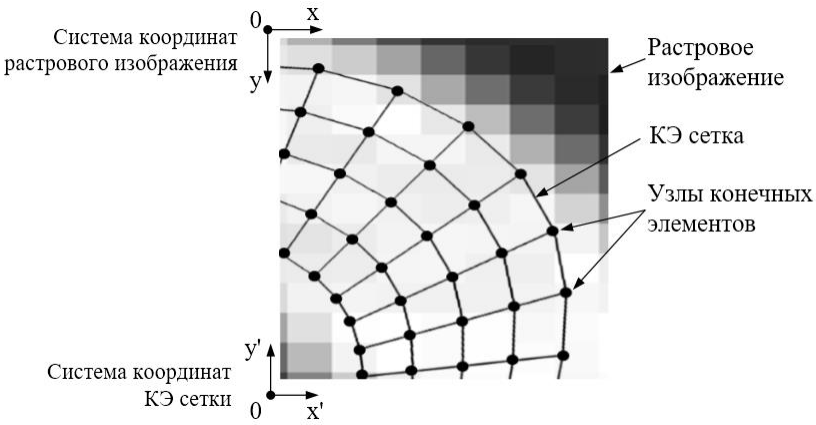


Рисунок 3.20 – Совмещение координат узлов КЭ сетки сечения с координатами пикселей растрового изображения

В зависимости от расположения узлов, разделяется два случая: узел находится в растровом изображении сечения и узел находится в пространстве между сечениями.

Данные о конечных элементах и топологии их узлов с соответствующими координатами, заполняются в матрицах: *Nodes(n,5)* – для узлов КЭ (таблица 3.3); *Elem(m,6)* –для КЭ типа тетраэдра (таблица 3.4); *Elem(m,10)* –для КЭ типа гексаэдра (таблица 3.5).

Последний столбец матриц используется для хранения значений индексов цвета узлов и КЭ, заполняется в процессе работы алгоритма.

Таблица 3.3

Матрица *Nodes(n,5)*- координаты узлов и их значения индексов цвета

	Nodes(i,1)	Nodes(i,2)	Nodes(i,3)	Nodes(i,4)	Nodes(i,5)
i	№ узлы	x	y	z	Индекс цвета
1	1	74,826843	222,999512	0	-

2	2	75,050919	223,979401	0	-
3	3	75,285431	224,956833	0	-
4	4	75,531929	225,931335	0	-
5	5	75,791809	226,902176	0	-
...	...	...	...	...	...
n	n	75,811702	225,812078	16	-

Таблица 3.4

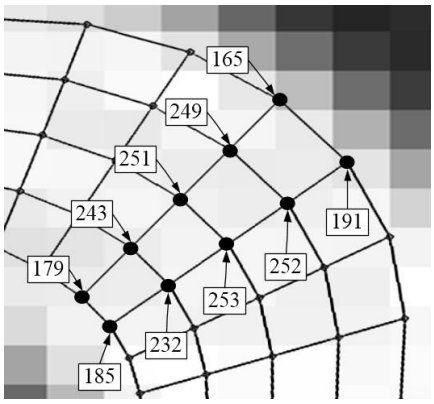
Матрица *Elem(m,10)* - топология и значения индексов цвета КЭ типа гексаэдра

	Elem (i,1)	Elem (i,2)	Elem (i,3)	Elem (i,4)	Elem (i,5)	Elem (i,6)	Elem (i,7)	Elem (i,8)	Elem (i,9)	Elem (i,10)
i	№ элемента	Узел 1	Узел 2	Узел 3	Узел 4	Узел 5	Узел 6	Узел 7	Узел 8	Индекс цвета
1	1	340	339	326	327	1588	1587	1574	1575	-
2	2	339	962	950	326	1587	2210	2198	1574	-
3	3	341	340	327	328	1589	1588	1575	1576	-
4	4	353	352	339	340	1601	1600	1587	1588	-
5	5	962	963	951	950	2210	2211	2199	2198	-
.	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	m	2465	2464	2546	2545	2612	2611	2789	2788	-

Таблица 3.5

Матрица *Elem(m,6)* - топология и значения индексов цвета КЭ типа тетраэдра

	Elem (i,1)	Elem (i,2)	Elem (i,3)	Elem (i,4)	Elem (i,5)	Elem (i,6)
i	№ элемента	Узел 1	Узел 2	Узел 3	Узел 4	Индекс цвета
1	1	132	141	157	162	-
2	2	157	189	226	271	-
3	3	289	265	265	102	-
4	4	326	312	145	158	-
5	5	119	211	366	271	-
.	...	...	...	...	...	...
m	m	1156	1245	1424	1782	-



$n_{P1} = 165 \quad x_1 = 77,15 \quad y_1 = 226,17$

$n_{P2} = 191 \quad x_2 = 78,25 \quad y_2 = 224,81$

...

$n_{P8} = 232 \quad x_8 = 75,19 \quad y_8 = 222,35$

$n_{P9} = 185 \quad x_9 = 74,11 \quad y_9 = 220,45$

$n_{P10} = 179 \quad x_{10} = 73,47 \quad y_{10} = 221,19$

Рисунок 3.21 – Определение индексов цвета в узлах КЭ в сечении

В первом случае, когда узел принадлежит области растрового изображения сечения, присвоение узлам КЭ сетки значений индексов цвета от пикселей осуществляется прямым совпадением узла КЭ сетки с пикселем, по совпадающим координатам (рисунок 3.21).

Во втором случае, когда узел находится в пространстве между сечениями, для определения в нем значения индекса цвета используется интерполяция. Она может осуществляться по прямой параллельной оси Z. Однако, этот вариант на практике используется крайне редко. Чаще применяется случай, когда геометрия деформируемого тела носит нерегулярный характер, интерполяция осуществляется по наклонной к оси Z прямой. Все математические зависимости интерполяции представлены в разделе 2.2.

Кроме того, для определения значения индексов цвета в узле (проекциях узла) КЭ модели в сечении используется несколько, окружающих его пикселей (рисунки 2.31 и 2.32). То есть, вычисление значения индекса цвета в узле осуществляется с использованием среднего значения по формуле (2.75) или зависимости математического ожидания по формуле (2.76).

На рисунке 3.22 представлен общий алгоритм преобразовании индексов цвета растровых изображений в каркасной модели, полученной сканированием, в значения моделей упругости в узлах и конечных элементах КЭ модели ДТТ [38, 76].

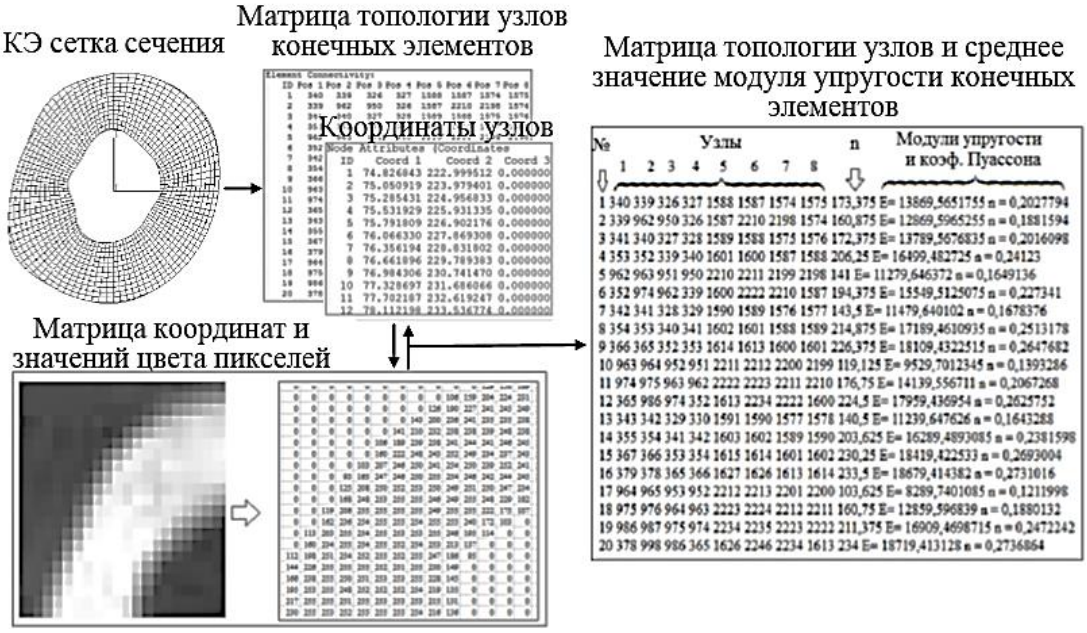


Рисунок 3.22 – Принцип обработки данных узлов и конечных элементов

- Определение зависимости модуля упругости от индексов цвета

Основным принципом, используемым в работе, при аппроксимации неравномерности механических характеристик ДТТ, является определение зависимости модуля упругости от значения индексов цвета пикселей растрового изображения, которое осуществляется с использованием вычисления специального весового коэффициента (раздел 2.2).

Этот коэффициент определяется формулой (2.58). Однако, для повышения точности его вычисления, алгоритм его определения разделяется два случая.

Первый используется когда растровые изображения имеют "гладкую" степень неравномерности (функции) изменения индексов цвета в сечении или между ними. Например, такую степень неравномерности имеют сечения бедренной кости. При этом, предлагается использовать усреднённое значение индексов цвета, как среднее арифметическое значение всех пикселей, находящихся в области объекта для каждого сечения.

На рисунке 3.23 представлен интерфейс оператора определения среднего значения индексов цвета растрового изображения сечения. Вводимые необходимые данные: матрица индексов цвета сечения, координаты диапазона объекта исследования, диапазон индексов определения объекта, и метод обесцвечивания изображения (не обязательно).

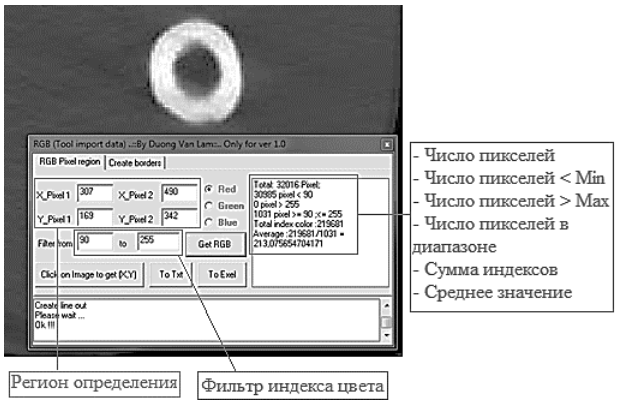


Рисунок 3.23 – Окно определения среднего значения индексов цвета в сечении

Во втором случае весового коэффициента, когда растровые изображения имеют "явную" степень неравномерности (функции) изменения индексов цвета в сечении и между ними. Например, при моделировании сечений зуба. Здесь степень не-

равномерности (изменения) механических характеристик в сечениях и между ними имеет три уровня неравномерности: область эмали, дентина и пористой структуры каналов. В этом случае, для определения среднего значения индексов цвета для пакета сечений, предлагается использовать зависимость математического ожидания.

При этом, алгоритм состоит из следующих этапов (рисунок 3.24):



Рисунок 3.24 – Алгоритм обработки данных пакета растровых изображений

1. Ввод данных, в виде матриц изменения индексов цвета, всех растровых изображений сечений;

2. Проведение обработки введенных данных:

2.1. Классификация индексов цвета по показателям:

- имеют одинаковое значения индекса цвета;

- имеют значения индексов цвета в одном определенном диапазоне.

2.2. Определение среднего значения индексов цвета:

- в сечении;

- в пакете сечений;

- определение математического ожидания в пакете сечений.

3. Обработка полученных результатов:

- построение таблицы классификации значений индексов цвета;

- построение диаграммы распределения индексов цвета каждого сечения; на данной основе, проведение сравнения степени неравномерности между сечениями, чтобы дать рекомендации использования среднего значения или математического ожидания индексов цвета;

- построение диаграммы распределения индексов цвета в пакете сечений.

4. Конец алгоритма.

Окно подпрограммы представлено на рисунке 3.25.

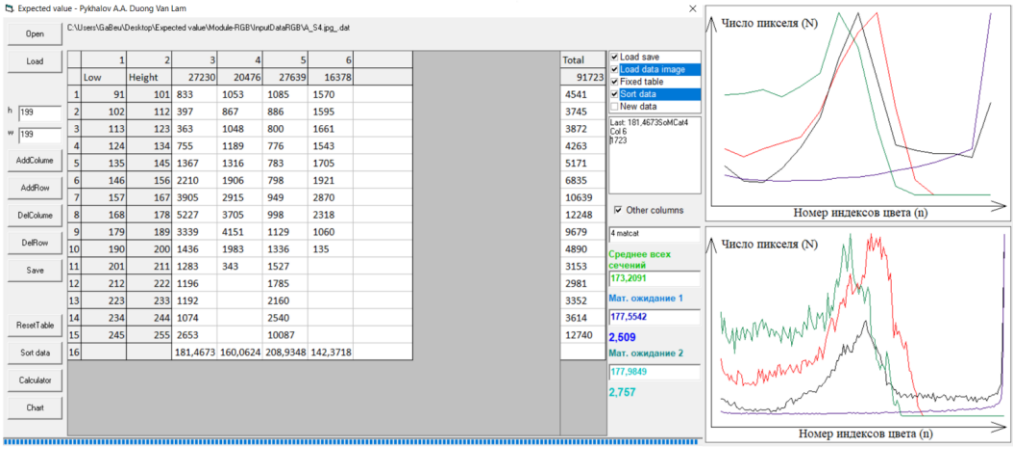


Рисунок 3.25 – Интерфейс подпрограммы обработки данных пакета растровых изображений

Результат определения весового коэффициента модуля упругости для ДТТ в целом, а также для каждой части ДТТ используется при определении зависимости модуля упругости от индексов цвета. Отличие при определении нелинейной зависимости от линейной зависимости заключается в том, что нелинейная зависимость строится как непрерывная функция на основе сплайн-интерполяции (раздел 2.2).

- Определение неоднородности механических характеристик материала в узлах и конечных элементах в конечно-элементных моделях деформируемых твердых тел

Блок-схема алгоритма модуля определения механических характеристик материала в узлах и конечных элементах КЭ модели ДТТ представлена на рисунке 3.26. Основными этапами представленного алгоритма являются:

1. Определение координат узлов конечных элементов, которые записываются в матрице *Nodes(n,5)*. Топология номеров узлов в конечных элементах записывается в матрице *Elems(m,10)* – для элементов типа HEX или *Elems(m,6)* – для элементов типа TET.

2. Проверка координат узлов на предмет нахождения в сечениях пакета растровых изображений или в пространстве между сечениями. Ответ «нет» - перейти к этапу 3 и 4, ответ «да» - перейти к этапу 5.

3, 4. Сортировка узлов по увеличению координаты z с помощью алгоритма QuickSort и решение задачи об упаковке (отсортировке) узлов, находящихся в одном пространством между сечениями. То есть, для эффективности работы алгоритма, необходимо чтобы извлечение координат узлов из КЭ модели проводилось не по порядковому номеру (по умолчанию), а по увеличению координаты z (оси или направления сканирования). Представленная процедура значительно сокращает время обработки и объем данных.

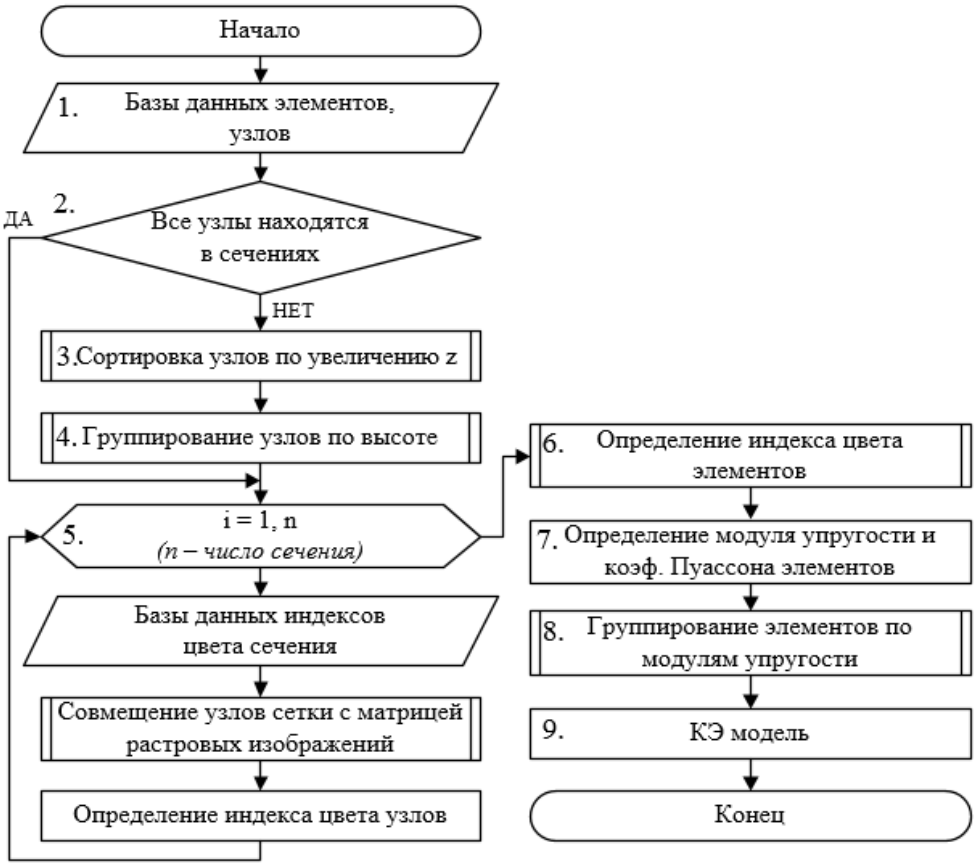


Рисунок 3.26 – Блок-схема обработки данных узлов и конечных элементов

5. Присвоение номера индекса цвета пикселя каждому узлу КЭ сетки сечения. Осуществляется с использованием модуля определения и интерполяции значения индексов цвета в узлах конечных элементов. Цикл ввода данных индексов цвета осуществляется последовательными переходами от первого сечения до последнего. Результат определения индексов цвета узлов заполняется в матрицу *Nodes(n,5)*.

6. Определение индексов цвета каждого конечного элемента - как среднее арифметическое значение индексов цвета его узлов. Результат заполняется в матрицу *Elems(m,10)* или *Elems(m,6)*.

7. Определение реального изменения механических характеристик материала, в виде модуля упругости, конечных элементов:

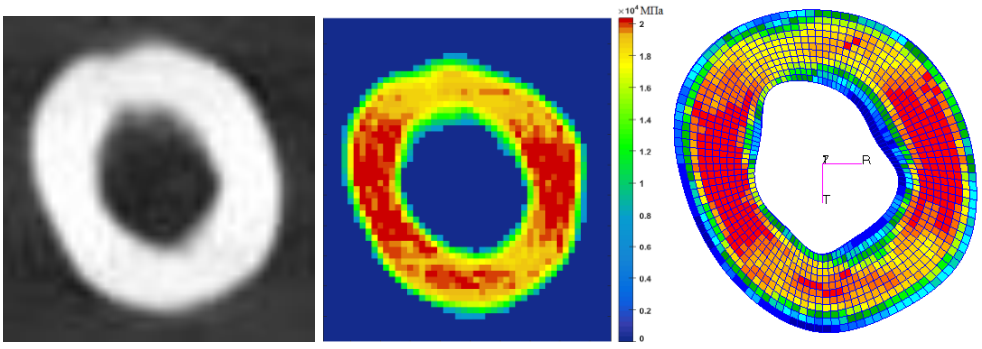
- для линейной зависимости модуля упругости от индексов цвета: значения индекса цвета конечных элементов умножаются на весовой коэффициент, то есть, преобразуются в значения их модулей упругости.

- для нелинейной зависимости модуля упругости от индексов цвета: значения индекса цвета конечных элементов преобразуются в значения их модулей упругости через использования непрерывной функции зависимости модуля упругости от индекса цвета.

8. Упаковка конечных элементов в группы с одинаковыми значениями модуля упругости или отсортировка конечных элементов, находящихся в одном диапазоне изменения модуля упругости;

9. Результат записывается в виде файла структуры **.pcl*.

Ниже, на рисунке 3.27 представлен результат работы алгоритма определения неоднородности механических характеристик материала в узлах и конечных элементах в КЭ модели ДТТ. То есть, в сечении с растровым изображением сканирования (рисунок 3.27а) представлено: изменение значений (неравномерность) индексов цвета (рисунок 3.27б); изменение модуля упругости в сечении КЭ модели (рисунок 3.27в). Анализируя результаты, представленные на рисунке 3.27, необходимо отметить, что область сечения имеет, условно, две зоны: силовую, где *E* изменяется от 1,7E4 МПа до 2,1E4 МПа; и не силовую, где *E* изменяется от 0,8E4 МПа до 1,7E4 МПа.



а) б) в)

Рисунок 3.27 – Распределение неоднородности модуля упругости:
а) растровое изображение сканирования; б) изменение индексов цвета в сечении; в) изменение модуля упругости в сечении в КЭ модели

При выполнении данного модуля, необходимо отметить подключение дополнительных (отдельных) блоков алгоритма:

1) Сортировка и упаковка конечных элементов по увеличению их значения индексов цвета

Необходимость данной сортировки и упаковки заключается в том, что имеется огромное количество конечных элементов имеющих одинаковый индексом цвета. То есть, использование этих данных в КЭ модели без сортировки приводит к проблеме нехватки памяти компьютера или к значительному увеличению времени обработки данных. Решением представленной проблемы является сортировка и упаковка конечных элементов в группы по значению индексов цвета (т.е., модуля упругости). Каждая из этих групп конечных элементов может иметь значения индексов цвета в определенном диапазоне. Для реализации представленной процедуры выполняются следующие этапы:

1. Проведение сортировки элементов по увеличению индекса цвета;

Для сортировки конечных элементов по увеличению индекса цвета, используется алгоритм QUICKSORT. *(Быстрая сортировка, сортировка Хоара)* [53]. В результате все элементы расположены по очереди увеличения значения индексов цвета пикселей (модулей упругости).

2. Сортировка конечных элементов проводится по этапам:

2.1. Проведение поиска элементов, имеющих одинаковые значения индекса цвета.

2.2. По требованию пользователя, проведение поиска элементов, имеющих значения индекса цвета в определенном заданном диапазоне;

2.3. Группирование их в отдельную группу материала.

3. Результат записывается в файле, в котором хранятся матрица топологии и значения индексов цвета конечных элементов.

2) Patran Command Language

Для возможности использования результатов определения неоднородности механических характеристик материала в КЭ модели, необходимо преобразование результатов в виде файла **.pcl*, с помощью языка Patran Command Language [151-

154]. Для этого используются функции этого языка: «material.create» и «elementprops_create».

Функция «material.create»

Функция «material.create» [152-154] заключается в том, чтобы представить полученное изменение механических характеристик (модуля упругости, коэффициента Пуассона и др.) в базе данных КЭ модели. Структура функции «material.create» проведена в таблице 3.6. Главные семантические правила из требуемых членов функции «material.create» представлены в таблице 3.7.

Таблица 3.6

Структура функции «material.create» - Patran Command Language

Называние функции	Структура функции
material.create	(analysis_code, analysis_code_id, analysis_type, analysis_type_id, material_name, material_id, material_descrip, material_cat, material_cat_id, directionality, directionality_id, linearity, linearity_id, mat_type_name, mat_type_id, const_model_name, const_model_id, options, option_names, option_ids, active, active_status, action, material_exists, external, external_status, prop_ids_label, prop_names, prop_ids, prop_values_label, prop_values)

Таблица 3.7

Главные семантические правила функции «material.create»

Типа данных	Код	Значение
STRING	material_name[]	Называние создаваемого материала.
INTEGER	material_cat_id	Категория материала: 1 - изотропный; 2 - ортотропный; 3 - анизотропный; 4 - 2D ортотропный; и 5 - 2D анизотропный и др.
INTEGER	directionality_id	Направленность материала: 0 - нет; 1 - изотропный; 2 - ортотропный; 3 - анизотропный; 4 - 2D ортотропный; и 5 - 2D анизотропный и др.
INTEGER	linearity_id	Линейность материала: 0 - нет; 1 - линейная эластичная; 2 - нелинейная эластичная; 3 - упругопластический; 4 - сверхупругий и др.
INTEGER	mat_type_id	Тип материала: 0-однородный; 1-слоистый; 2-правило смесей и др.
INTEGER	const_model_id	Конструктивность модели: 1 - линейная эластичная; 2 - нелинейная эластичная; 3 - упругопластический; 4 - срыв; 5 - ползучесть и др.
STRING	prop_values_label[]	Метка значений свойств и должна быть установлено в «Значения свойств» - например: модуль упругости, коэффициент Пуассона и др.
STRING	prop_values[]()	Значения свойств (модуль упругости, коэффициент Пуассона и др.).

Например, для создания в КЭ модели материала, имеющего свойства: называние «Steel», изотропный, свойство линейности, однородный, линейный упругий, модуль упругости E=210000 МПа, коэффициент Пуассона μ=0,30.

Образец кода: *material.create("Analysis code ID", 1, "Analysis type ID", 1, "Steel", 0, "Date: 20-Apr-17 Time: 0:11:34", "Isotropic", 1, "Directionality", 1, "Linearity", 1, "Homogeneous", 0, "Linear Elastic", 1, "Model Options & IDs", ["", "", "", "", ""], [0, 0, 0, 0, 0], "Active Flag", 1, "Create", 10, "External Flag", FALSE, "Property IDs", ["Elastic Modulus", "Poisson Ratio"], [2, 5, 0], "Property Values", ["210000", "0.30", ""])*

Функция «elementprops_create»

Функция «elementprops_create» [152-154] присваивает каждому конечному элементу свои механические характеристики материала в КЭ модели. Её структура представлена в таблице 3.8. Главные семантические правила функции «elementprops_create» из требуемых членов функции представлены в таблице 3.9.

Таблица 3.8

Структура функции «elementprops_create» - Patran Command Language

Называние функции	Структура функции
elementprops_create	(prop_name, elem_type_id, geo_opt_id, con_opt_id, for_opt_id, lam_opt_id, dof_opt_id, property_ids, property_types, property_data, app_region)

Таблица 3.9

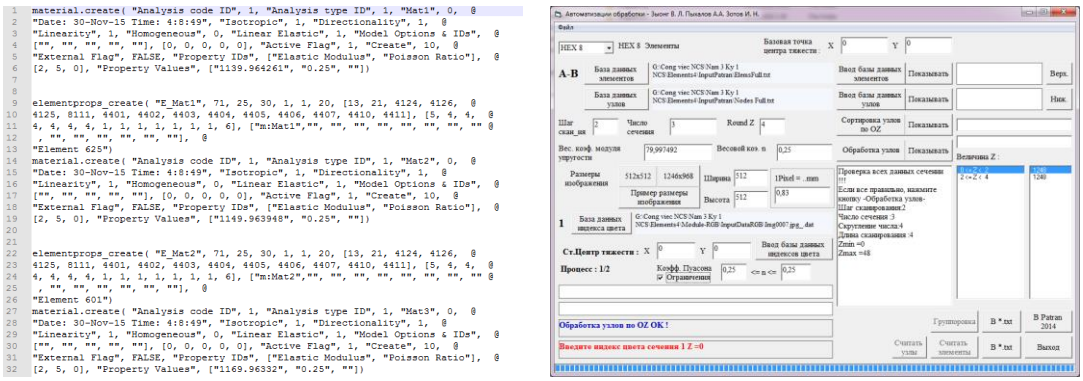
Главные семантические правила функции «elementprops_create»

Типа данных	Код	Значение
STRING	prop_name[]	Называние создаваемого набора свойств.
STRING	property_data[]()	Данные свойства (называние материала).
STRING	app_region[]	Область приложения (узлы и конечные элементы).

Например, для присвоения конечному элементу номера 235 свойства материала “Steel”, полученного, вверх, функцией «material.create».

Образец кода: *elementprops_create("Telo_Steel", 71, 25, 30, 1, 1, 20, [13, 21, 4124, 4126, 4125, 8111, 4401, 4402, 4403, 4404, 4405, 4406, 4407, 4410, 4411], [5, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6], ["m:Steel","", "", "", "", "", "", "", "" , "", "", "", "", "", ""], "Element 235")*

На рисунке 3.28 представлена структура файла **.pcl* (рисунок 3.28а), записывается с помощью специальной программы (рисунок 3.28б).



```
material.create( "Analysis code ID", 1, "Analysis type ID", 1, "Mat1", 0,  @
"Date: 30-Nov-15 Time: 4:8:49", "Isotropic", 1, "Directionality", 1,  @
"Linearity", 1, "Homogeneous", 0, "Linear Elastic", 1, "Model Options & IDs",  @
["", "", "", "", ""], [0, 0, 0, 0, 0], "Active Flag", 1, "Create", 10,  @
"External Flag", FALSE, "Property IDs", ["Elastic Modulus", "Poisson Ratio"],  @
[2, 5, 0], "Property Values", ["1139.964261", "0.25", ""])


elementprops_create( "E_Mat1", 71, 25, 30, 1, 1, 20, [13, 21, 4124, 4126,  @
4125, 8111, 4401, 4402, 4403, 4404, 4405, 4406, 4407, 4410, 4411], [5, 4, 4,  @
4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6], ["m:Mat1","", "", "", "", "", "", "", "" @
 , "", "", "", "", "", ""],  @
"Element 625"}
material.create( "Analysis code ID", 1, "Analysis type ID", 1, "Mat2", 0,  @
"Date: 30-Nov-15 Time: 4:8:49", "Isotropic", 1, "Directionality", 1,  @
"Linearity", 1, "Homogeneous", 0, "Linear Elastic", 1, "Model Options & IDs",  @
["", "", "", "", ""], [0, 0, 0, 0, 0], "Active Flag", 1, "Create", 10,  @
"External Flag", FALSE, "Property IDs", ["Elastic Modulus", "Poisson Ratio"],  @
[2, 5, 0], "Property Values", ["1149.963948", "0.25", ""])


elementprops_create( "E_Mat2", 71, 25, 30, 1, 1, 20, [13, 21, 4124, 4126,  @
4125, 8111, 4401, 4402, 4403, 4404, 4405, 4406, 4407, 4410, 4411], [5, 4, 4,  @
4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6], ["m:Mat2","", "", "", "", "", "", "", "" @
 , "", "", "", "", "", ""],  @
"Element 601"}
material.create( "Analysis code ID", 1, "Analysis type ID", 1, "Mat3", 0,  @
"Date: 30-Nov-15 Time: 4:8:49", "Isotropic", 1, "Directionality", 1,  @
"Linearity", 1, "Homogeneous", 0, "Linear Elastic", 1, "Model Options & IDs",  @
["", "", "", "", ""], [0, 0, 0, 0, 0], "Active Flag", 1, "Create", 10,  @
"External Flag", FALSE, "Property IDs", ["Elastic Modulus", "Poisson Ratio"],  @
[2, 5, 0], "Property Values", ["1169.963327", "0.25", ""])
```

а) б)

Рисунок 3.28 – Структура файла **.pcl* – Patran Command Language (а) и интерфейс программы определения неоднородности механических характеристик материала в узлах и в конечных элементах (б)

3.2.4 Генерация внешних нагрузок, граничных условий и условий контактного взаимодействия в конечно-элементных моделях деформируемых твердых тел

При решении задач по анализу НДС деформируемых твердых тел, их поведение моделируется при действии на них внешней нагрузки. В качестве этой нагрузки могут использовать: сосредоточенные силы (Force), моменты сил (Force-moment), давление (Pressure) и др.

Граничные условия в модели МКЭ задаются в виде защемления определенных степеней свободы в узлах. Тем самым, для ДТТ ограничиваются кинематические перемещения.

В системе MSC Patran, нагрузки и граничные условия сокращённо обозначаются называнием LBCs и трактуются как единый тип данных, которые отнесены к части геометрической или КЭ модели, и сильно зависят от типа анализа и решаемой задачи [151].

В данной работе проводится исследования двух типов задач: чистого сжатия (модель бедренной кости) и контактно-взаимодействия реальных деформируемых твердых тел природного происхождения (модель зуб-зуб человека в системе с челюстью). Нагрузка задается в виде давления на поверхности ДТТ. Кроме требуемых граничных условий, необходимо отдельно отметить граничные условий для группы узлов (MPC) в КЭ моделях, что задает соотношения между перемещения-

ми по степеням свободы. Они используются в нескольких случаях [81, 82, 151]:

- определения относительного смещения двух и более узловых точек по заданным степеням свободы;

- соединения конечных элементов различных типов; например, соединения элементов, которые имеют дополнительно вращательные степени свободы с элементами, которые имеют только поступательные степени свободы (оболочки с объемными элементами);

- распределения сосредоточенной нагрузки в нескольких точках конструкции;

- моделирования жестких связей между узлами, находящимися друг от друга на некотором расстоянии и др.

Граничные условий для группы узлов в КЭ моделях осуществляются с использованием элемента жесткой связи Rigid RBE2 (жесткое тело связанное с произвольным числом узлов) и RBE3 (определяет граничное уравнение, в котором движение "ссылочного" узла является средневзвешенным значением движения других узлов). Он создает жесткую связь между ведущим узлом и одним или несколькими другими узлами.

Для решения задачи контактно-взаимодействия ДТТ, рассматриваемой в настоящей работе, используются два типа контактных конечных элементов: клей (Glue contact) контакт; и контакт с касанием и с кулоновым трением (Touch contact).

Контакт с клеем (Glue contact) используется для моделирования взаимодействия между зубом и челюстью. То есть, эти ДТТ имеют примерно на порядок отличающиеся между собой механические характеристики (модуль упругости). На контактирующие поверхности накладывается условие отсутствия относительного движения, как в нормальном, так и в тангенциальном направлениях. Кроме этой главный цели, необходимо отметить отдельно возможность применения контакта с клеем для соединения двух разнородных сеток.

Контакт с касанием и с кулоновым трением (Touch contact) используется для моделирования контакта между зубами, а также между зубами и продуктом.

В настройках MSC Patran, для управления решателем контактной задачи используются методы: «Node to Segment» и «Segment to Segment». Метод «Node to

Segment» используется когда одно деформируемое тело определяется как ведущее, а другое как подчиненное (Master-slave body). Правило использования этого метода заключается в том, что узлы деформируемого тела подчиненного не могут проникать сквозь грани элемента ведущего деформируемого тела. Метод «Segment to Segment» добавляет дополнительные точки к грани элемента и проверяет контакт между этими точками и, следовательно, позволяет увеличить разницу в размере элемента на поверхности контакта. То есть, не требуется определение ведущего и подчиненного деформируемого тела, оба они проверяются на контакт. Каждый из методов имеет свои преимущества. Метод «Segment to Segment» чаще рекомендуется использовать при решении контактной задачи ДТТ.

3.2.5 Анализ напряженно-деформированного состояния конечно-элементных моделей деформируемых твердых тел

Проведение анализа НДС КЭ модели ДТТ с учетом неоднородности механических характеристик материала и индивидуальной геометрии, полученных на основе сканирования, осуществляется в программном комплексе MSC Nastran, с передачей данных о КЭ модели из пре-процессора, в качестве которого используется программный комплекс MSC Patran.

Особенность использования MSC Patran, в данной работе, заключается в том, что этот комплекс является открытой программой, то есть, имеется возможность программировать любые дополнительные данные в КЭ модели. В рассматриваемом случае это неоднородность структуры ДТТ, моделирование корой достигается тем, что осуществляется присвоение каждому конечному элементу своего значения механических характеристик. Для реализации представленной возможности используется язык программирования Patran Command Language.

MSC Nastran обеспечивает полный набор расчетов НДС. В его составе имеются специальные решатели SOL 600 и SOL 400 [145-147, 151], используемые в данной работе и ориентированные на решение задач анализа нелинейного поведения, включающего в себя: большие деформации, физический нелинейный материал, контакт, и другие.

3.3 Выводы по главе

1. Разработанный алгоритм компьютерной реализации интерпретации результатов сканирования позволяет проводить исследование любых сложных структур ДТТ, результаты которого используются при построении КЭ моделей реальных ДТТ с учетом неоднородности в них механических характеристик материала и индивидуальности геометрии.

2. Разработанный модуль построения геометрии сечения ДТТ на основе обработки результатов сканирования, дает возможность построить не только внешние контуры, а также контуры внутренней структуры ДТТ. Полученный результат построения геометрии отвечает индивидуальным особенностям геометрических параметров изучаемого объекта.

3. Разработанный модуль определения и интерполяции механических характеристик материала для каждого узла и конечного элемента. В результате при построении КЭ модели ДТТ, используется полная картина реального (неоднородного) изменения механических характеристик материала в сечении и в объемной модели ДТТ в целом.

4. Используя разработанное алгоритмическое обеспечение, создан комплекс проблемно ориентированных программ интерпретации растровых изображений сканирования КТ деформируемых твердых тел, с дополнительным использованием данных, полученных в натурных испытаний, для определения в них неоднородности механических характеристик материала и построения индивидуальной геометрии.

5. Результат работы комплекса программ построения геометрии и определения механических характеристик материала может быть использован для любых программных комплексов инженерного анализа с помощью уникальных стандартных файлов *(*.dfx, *.iges, *.pcl* и др.). В настоящей работе геометрия и КЭ модель ДТТ построены в комплексных программах AutoCAD и NX Unigraphic. Анализ КЭ моделей проведен в MSC Patran, Nastran и Marc.

ГЛАВА 4 АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ-СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) объектов и изделий, на современном уровне развития расчетно-инженерной базы, проводится с применением высокоэффективного математического метода конечных элементов (МКЭ). Он позволяет, с высокой степенью точности, оценивать прочность, надёжность и долговечность деформируемых твердых тел (ДТТ). Однако уровень достоверности конечно-элементных (КЭ) моделей, относительно реального ДТТ, может быть существенно повышен за счет точности определения в них реального распределения механических характеристик материала и индивидуальных параметров геометрии.

В развитие представленного обстоятельства, в данной главе представлено исследование точности и сходимости численного решения МКЭ при анализе НДС реальных ДТТ, в виде тестовых образцов, для которых, с использованием специального комплекса методик, получена реальная (не осредненная) структура изменения механических характеристик материала и геометрии.

4.1 Построение и анализ конечно-элементных моделей стандартных образцов прямоугольной формы (без контакта)

Исследование точности и сходимости проводится на КЭ моделях образцов, имеющих реальные прототипы, которые выполнены из костной ткани стенки бедренной кости человека. Каждый из образцов имеет форму параллелепипеда, наибольшая высота которого во фрагменте кости направлена по одной из трех взаимно перпендикулярных осей цилиндрической системы координат.

На рисунке 4.1 представлен принцип ориентации образцов в трубчатой кости человека, где используется система координат 0, x_1, x_2, x_3 [47]. Эта система координат была принята также в работах [98, 101] при изготовлении образцов для

их натурного испытания. В настоящей работе принята, соответствующая ей, цилиндрическая система координат: 0, z, θ, r, используемая при построении КЭ моделей фрагмента кости и образцов, соответствующие их натурным прототипам.

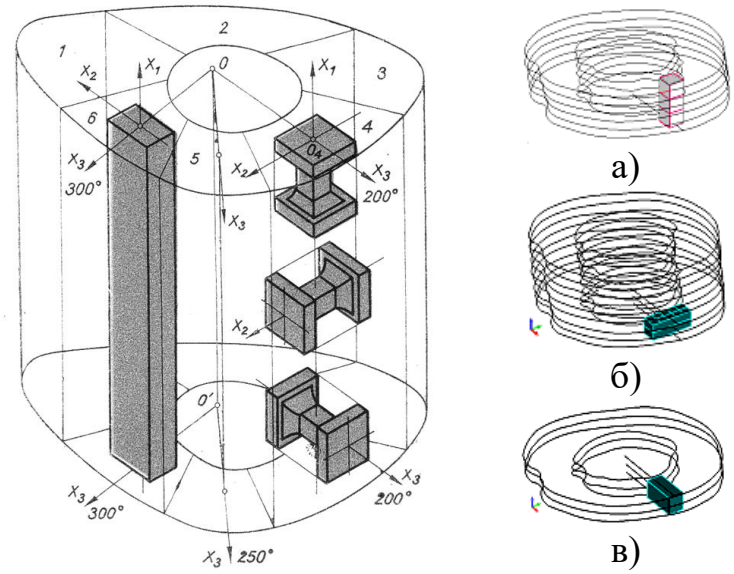


Рисунок 4.1 – Ориентация образцов для испытаний в направлениях:
а) продольном (X_1); б) окружном (X_2); в) радиальном (X_3)

В таблице 4.1 представлены осредненные значения механических характеристик костной ткани образцов, полученные в работе [101] на основе натурного эксперимента сжатия образцов в соответствующих координатных направлениях. Анализ этих результатов показывает явно выраженную неоднородность (ортотропность) механических характеристик кости. Например, соотношение средних значений модулей упругости в представленных координатных направлениях следующее: E_1: E_2: E_3 = 17100: 8500: 8700= 1:0,4971: 0,5088, где E_1, E_2 и E_3 – средние значения модулей упругости, соответственно, в продольном, окружном и радиальном направлениях.

Таблица 4.1

Механические характеристики костной ткани в направлении осей координат

Направление действия нагрузки	Показатели механических					
	Предел прочности, *МПа*	Модуль упругости, *МПа*	Предел пропорциональности, *МПа*	Относительная упругая деформация, %	Относительная деформация разрушения, %	Коэфф. Пуассона
Продольное	291±7,4	E_1=17100±430	135±4,2	0,8±0,035	2,8±0,09	0,5±0,02
Окружное	157±7,9	E_2=8500±320	72±5,5	0,84±0,044	4,3±0,43	0,25±0,01
Радиальное	167±3,1	E_3=8700±380	68±2,4	0,82±0,036	5,0±0,61	0,05

В эксперименте, представленном в работе [84, 98], при аналогичных испытаниях образцов неоднородность определена в виде средних значений пределов пропорциональности: σ_z: σ_θ: σ_r = 1: 0,73: 0,66; где величины (σ_z), (σ_θ) и (σ_r) – соответственно, опытные (средние) пределы пропорциональности, МПа, в продольном, окружном и радиальном направлениях. Представленные величины моделей упругости и пределов пропорциональности показывают качественно одинаковые соотношения в соответствующих координатных направлениях.

Для исследования точности и сходимости численного решения МКЭ относительно результатов натурных испытаний образцов из костной ткани, их геометрия и сетка КЭ моделей построены в форме параллелепипедов (рисунок 4.1), в полном соответствии с размерами 3.5×3.5×10 *мм* и ориентацией в системе координат, представленными в работе Утенькина А. А. [98, 101].

Количество конечных элементов в КЭ моделях образцов, при разбиении, в соответствии с принципом вложенности, увеличивается в основании и по высоте (рисунок 4.2) образцов:

- в продольном направлении: 2×2×5, 4×4×10, 8×8×20, 16×16×40, 32×32×80;
- в окружном направлении: 2×2×5, 4×4×10, 8×8×20, 16×16×40, 32×32×80;
- в радиальном направлении: 2×2×4, 4×4×8, 8×8×16, 16×16×32, 32×32×64.

Граничные условия и нагрузка в КЭ моделях образцов представлены на рисунке 4.3.

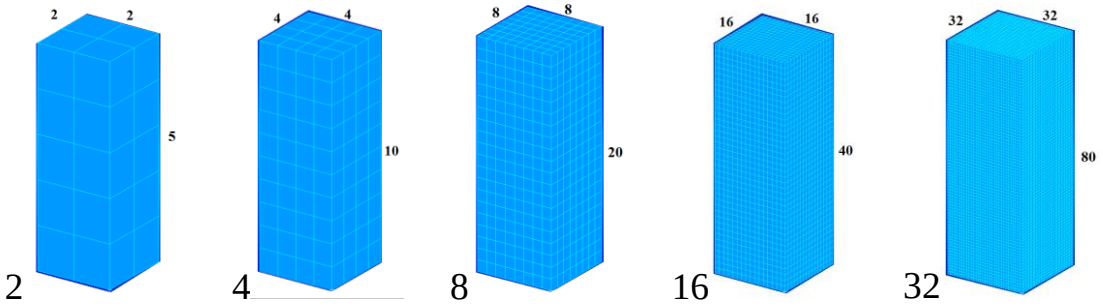


Рисунок 4.2 – Модели образцов с различной степенью дискретизации

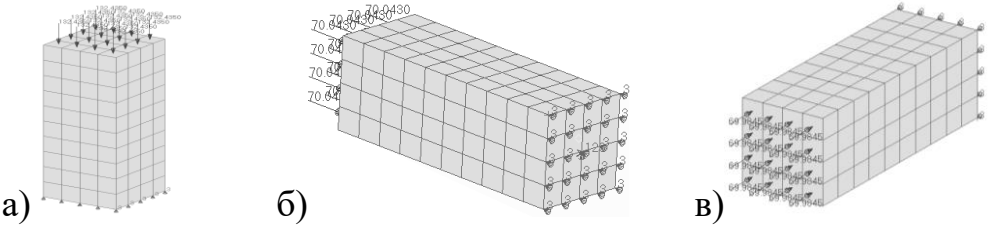


Рисунок 4.3 – Граничные условия и нагрузка на образцы, соответственно, направлениях: а) продольном; б) радиальном; в) окружном

Механические характеристики материала конечных элементов определяются методом интерполяции по прямой параллельной оси z (раздел 2.2), на основе: растровых изображения сканирования бедренной кости и экспериментального результата определения модуля упругости бедренной кости. Их основные средние характеристики представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Основные средние характеристики каждого тестового образца

Вариант	$n_{сред}$	$E_{оп}$	k_E	Нагрузка на поверхности *(давление, МПа)*
Продольный	254	17100	67,323	132,435
Окружный	252	8500	33,730	70,043
Радиальный	239	8700	36,402	69,984

Результаты анализа НДС образцов представлены в таблице 4.3, где показаны значения нормальных напряжений в центре образца. Также, эти результаты представлены в виде графиков 1; 2; и 3 где показана зависимость величины нормальных напряжений в центре образцов от количества конечных элементов (рисунок 4.4).

Таблица 4.3

Результаты анализа НДС КЭ моделей образцов

Параметры	Варианты образцов	Число КЭ на стороне образца				
		2	4	8	16	32
Давление, МПа [101]	Продольный	132,435				
	Окружной	69,98454				
	Радиальный	70,043				
Нормальное напряжение в центре КЭ моделей образцов, МПа	Продольный	130,24	132,54	133,22	134,83	133,63
	Окружной	68,662	67,367	69,903	69,891	70,297
	Радиальный	66,645	68,616	70,147	70,421	70,528
Нормальное напряжение в эксперименте, МПа [101]	Продольный	135±4,2				
	Окружной	72±5,5				
	Радиальный	68±2,4				
Деформация в центре верхнего сечения КЭ модели образцов, мм	Продольный	0,0773	0,0789	0,0790	0,0810	0,0791
	Ошибка, %	(3,375%)	(1,375%)	(1,25%)	(1,25%)	(1,125%)
	Окружной	0,0621	0,0610	0,0636	0,0632	0,0644
	Ошибка, %	(1,74%)	(3,48%)	(0,63%)	(0%)	(1,9%)
	Радиальный	0,0823	0,0820	0,0835	0,0838	0,0840
	Ошибка, %	(2,02%)	(2,43%)	(0,6%)	(0,24%)	(0%)
Деформация в эксперименте, мм [101]	Продольный	0,080±0,0035				
	Окружной	0,0632±0,0028				
	Радиальный	0,084±0,0044				

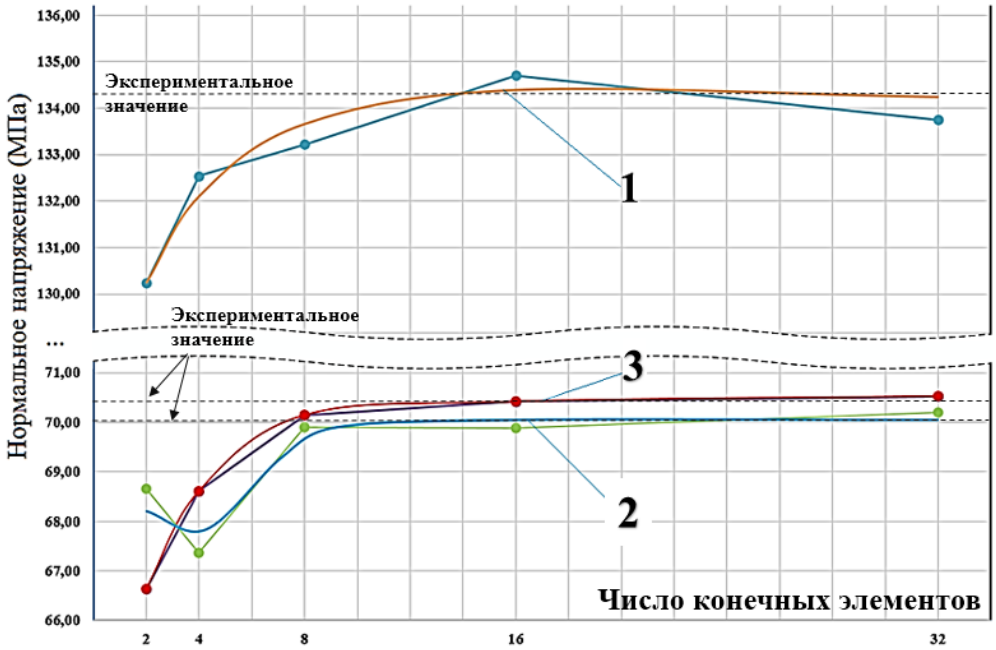


Рисунок 4.4 – График сходимости численного решения МКЭ для значения нормального напряжения в центре образца в направлениях: 1 – продольном; 2 – окружном; 3 –радиальном.

Анализ результатов показывает, что с уменьшением размеров конечных элементов КЭ моделей образцов наблюдается устойчивая сходимость результатов (рисунок 4.4) к значениям полученным экспериментальным путем [98, 101].

Также, представленные результаты анализа точности и сходимости численного решения МКЭ, показывают необходимый и достаточный уровень дискретизации в КЭ модели образцов для определения оптимальной плотности сетки конечных элементов. Она достигается уже для значений количества конечных элементов для образцов 8×8×20, 16×16×40, 32×32×80 к пределам пропорциональности, полученным в эксперименте А. А. Утенькиным [101]. То есть, исследование показало достижение достаточной точности численного решения МКЭ при плотности сетки равной 3 и более конечных элемента на 1 мм.

4.2 Построение и анализ конечно-элементных моделей стандартных образцов прямоугольной формы с решением контактной задачи

В настоящем разделе на основе результатов анализа КЭ модели образцов прямоугольной формы при воздействии сжимающей нагрузки (раздел 4.1), дополнительно, проведено решение контактной задачи.

В этом случае образцы подвергаются сжимающему воздействию со стороны пуансонов пресса (рисунок 4.5), для близких к условиям натурного эксперимента значений внешних сил [98, 101].

Решение контактной задачи обусловлено проблемой появления концентрации напряжений по контуру торцевых поверхностей образца при воздействии пуансонов с плоской рабочей поверхностью. Для преодоления этой, не характерной для работы кости, концентрации напряжений в работах [98, 101] предложена определенная форма рабочих поверхностей пуансонов "с фаской". Расчетная схема решения контактной задачи представлена на рисунке 4.5.

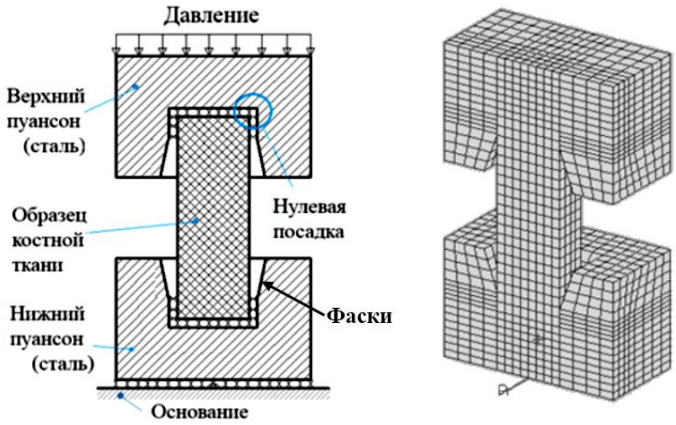


Рисунок 4.5 – Расчетная схема контактной задачи анализа НДС образцов из костной ткани

Построение КЭ модели с контактом образцов прямоугольной формы проведено с использованием размеров конечных элементов 8×8×20, с аналогичной по плотности сеткой для пуансонов пресса с фаской.

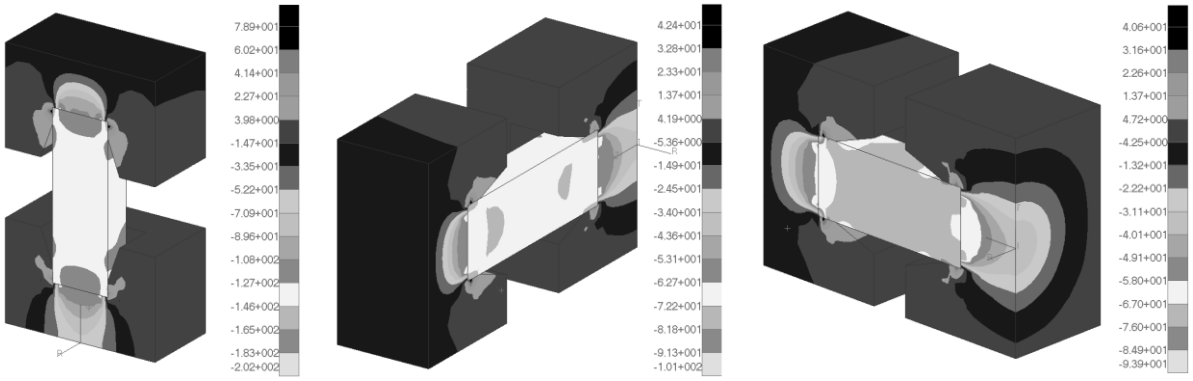
Данные характеристики тестового образца использованы в разделе 4.1 (таблица 4.3), материал пуансона выполнен из стали. Для моделирования условий контактного сопряжения образца и пуансона используется специальный контактный конечный элемент, на котором, в данном случае задана нулевая посадка. Результаты анализа представлены в таблице 4.4 и на рисунке 4.6.

Таблица 4.4

Результаты анализа контактной задачи

Параметры	Варианты образцов	Без контакта	С контактом
Давление, МПа [101]	Вертикальный	132,435	
	Окружной	69,98454	
	Радиальный	70,043	

Нормальное напряжение в центре КЭ моделей образцов, МПа	Вертикальный	133,220	132,970
	Окружной	69,903	71,200
	Радиальный	70,147	70,007
Нормальное напряжение в эксперименте, МПа [101],	Вертикальный	135±4,2	
	Окружной	72±5,5	
	Радиальный	68±2,4	
Деформация в центре верхнего сечения КЭ модели образцов, мм	Вертикальный	0,0790	0,0766
	Окружной	0,0636	0,0613
	Радиальный	0,0835	0,0810
Деформация в эксперименте, мм [101]	Вертикальный	0,080±0,0035	
	Окружной	0,0632±0,0028	
	Радиальный	0,084±0,0044	



а) б) в)

Рисунок 4.6 – Нормальные напряжения контактной задачи в направлениях: а) осевом; б) радиальном; в) окружном

Сравнение результатов анализа КЭ моделей тестовых образцов без решения контактной задачи и с контактом показывает, что:

- использование контактных конечных элементов, при построении КЭ модели образца прямоугольной формы и пуансонов, не оказывает заметного влияния на сходимость численного решения МКЭ, определяемая значением напряжения в центре КЭ модели образца (см. выше);

- однако, использование контактных конечных элементов, в виде воздействия пуансонов с фаской, обеспечивается физичность решения, то есть, способствует выравниванию поля напряжений и деформаций и приближает к их естественному виду при работе кости;

- результаты анализа КЭ моделей без решения контактной задачи и с контактом показывают хорошую сходимость, в пределах диапазона ошибок напряжений 1.86% и деформаций 3.61%.

В целом, результаты анализа КЭ моделей тестовых образцов, для всех вариантов исследования, подтверждают точность и сходимость используемого численного метода моделирования неоднородности механических характеристик материала построенного на основе МКЭ [70], в результате их сравнения со средними значениями, полученными в натурном эксперимента [101].

4.3 Построение и анализ конечно-элементных моделей реальных образцов в виде фрагмента бедренной кости человека

В задаче исследования точности и сходимости численного решения МКЭ, предлагается еще один вариант исследования, построенный с использованием КЭ модели фрагмента бедренной кости, выбранный по минимальной высоте её средней части. С использованием этой модели проведено исследование дополнительных параметров объекта:

- моделируются реальные изменения механических свойств и индивидуальная геометрия, построенные на основе обработки растровых изображений их сканирования КТ и осредненных экспериментальных данных;

- моделирование проводится с использованием двух типов конечных элементов (тетраэдр и гексаэдр) для исследования специфики их влияния на результаты анализа.

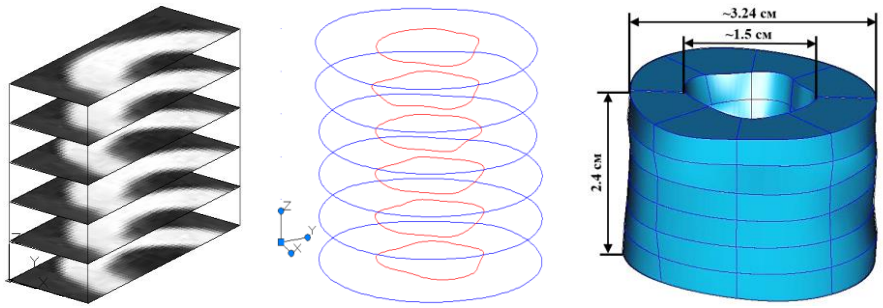
Индивидуальная геометрия образцов из бедренной кости построена на основе обработки пакета растровых изображений их сканирования (рисунок 4.7а). В результате соединения всех геометрией сечений получена каркасная 3D модель (рисунок 4.7б), которая используется для интерполяции геометрии модели в целом (рисунок 4.7в – твердотельной геометрической модели).

Генерация КЭ сетки, с учетом сечений сканирования, осуществляется в три этапа (раздел 3.2.2):

1. Генерация сетки плоских КЭ в сечении растрового изображения.

2. Генерация сетки объемных КЭ на основе сетки плоских КЭ.

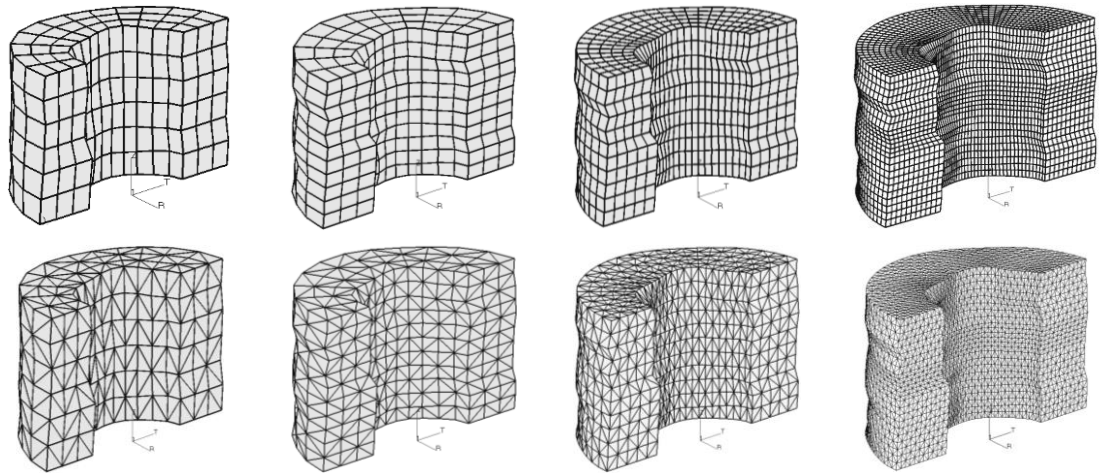
3. Удаление плоских КЭ, без удаления их узлов, которые, одновременно уже являются узлами объемных конечных элементов.



а) б) в)

Рисунок 4.7 – Плоскости с растровым изображением сканирования (а); полученная каркасная модель (б) и твердотельная геометрическая модель (в)

Варьируя размеры конечных элементов (рисунок 4.8) от 4.0 *мм* до 1.0 *мм*, проводится исследование необходимого уровня точности вычисления результатов анализа НДС рассматриваемого объекта. Представленные размеры КЭ также обозначают увеличение плотности КЭ сетки относительно растрового изображения: от 1 до 32 узлов на 10 пикселей.



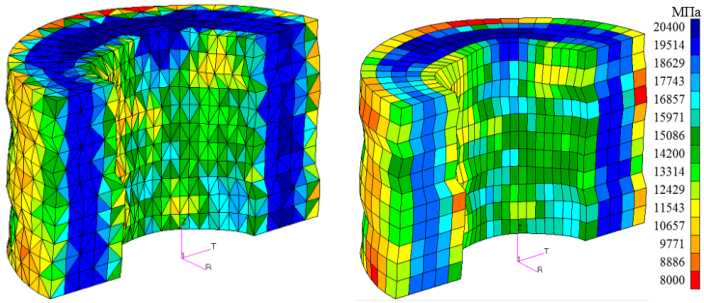
а) 4 *мм* б) 3 *мм* в) 2 *мм* г) 1 *мм*

Рисунок 4.8 – КЭ сетки с размерами 4 мм (а), 3 мм (б), 2 мм (в) и 1 мм (г) на конечных элементов типа гексаэдр (вверху) и тетраэдр (внизу)

Для интерполяции реального изменения механических свойств материала в узлах конечных элементов также используется пакет растровых сечений. Каждому узлу КЭ сетки, в зависимости от расположения между сечениями, присваивается свой номер индекса цвета, по которому (раздел 3.2.3), в каждом узле вычисляется свой модуль упругости E_i материала. Эта характеристика материала для каждого конечного элемента вычисляется как среднее значение от её значений в узлах [37, 63, 64, 73]; также, в области каждого конечного элемента модели мате-

риал имеет изотропную структуру.

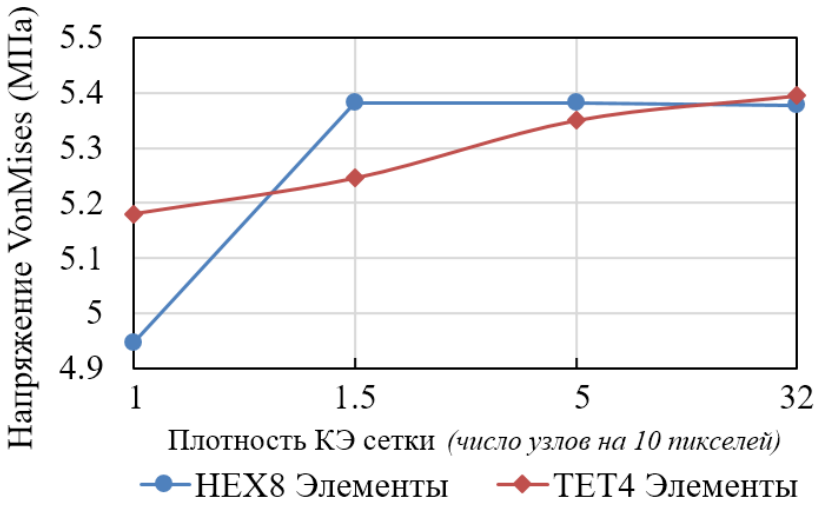
На рисунке 4.9, представлена картина неоднородности материала в виде распределение модулей упругости в конечных элементах КЭ моделей, где можно условно выделить две области: силовую, расположенную ближе к серединной поверхности фрагмента кости, со значениями *E* от 17,0E3 до 20,4E3 МПа; и несиловую, со значениями *E* от 8,0E3 до 17,0E3 МПа.



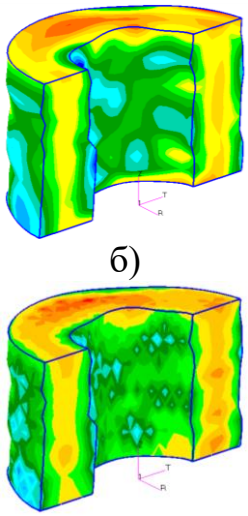
а) размер КЭ - 3 *мм* б) размер КЭ - 3 *мм*

Рисунок 4.9 – Распределение величины модуля упругости в объемных КЭ моделях с использованием КЭ типа тетраэдр (а) и гексаэдр (б)

Графики анализа точности и сходимости (рисунок 4.10а) результатов численного решения МКЭ показывают, что сходимость результатов устойчива, а точность, определяемая, в данном случае, отношением последующего и предыдущего значений, достигается уже при размере конечных элементов 3 мм или плотности КЭ сетки на растровом изображении соответствующем: 1,5 узел на 10 пикселей (3 узла на 20 пикселей).



а)



б) в)

Рисунок 4.10 – Анализ точности и сходимости численного решения МКЭ (а) с применением КЭ типа гексаэдр (б) и КЭ типа тетраэдр (в)

На рисунках 4.10б и 4.10в, представлены результаты в виде поля эквивалентных напряжений во фрагменте кости на предельной по плотности КЭ сетке, с применением конечных элементов типа гексаэдр (рисунок 4.10б) и тетраэдр (рисунок 4.10в).

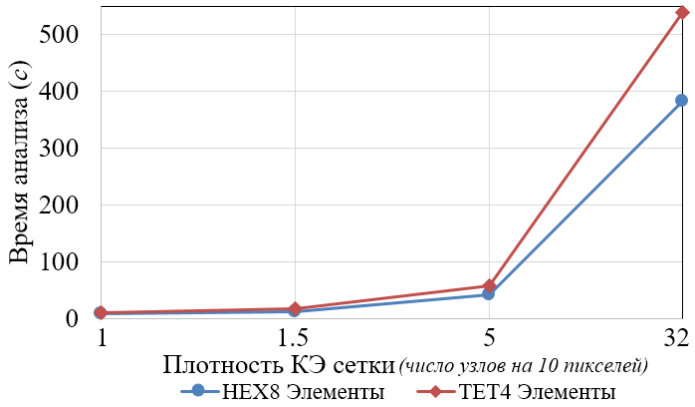


Рисунок 4.11 – Время проведения анализа КЭ моделей тестовых образцов с применением КЭ типа гексаэдр и КЭ типа тетраэдр

Относительно исследования применимости типов объемных конечных элементов необходимо отметить, что конечные элементы типа гексаэдр (HEX8) имеет лучшие показатели по точности и сходимости результатов, а также по затратам на вычисления (рисунок 4.11), однако их применение, в отличие от конечных элементов типа тетраэдр, в некоторых случаях, затруднено [34]. В этой ситуации, необходимо отметить, что решение с применением конечных элементов типа тетраэдр (TET4) также сходится, то есть, его применимость для представленного класса задач остается.

4.4 Выводы по главе

1. Результат анализа точности и сходимости решения МКЭ показывает, что представленный, в настоящей работе, на основе интерпретации растровых изображений сканирования, комплекс методик и математических методов построения геометрии сечения ДТТ, а также интерполяции свойств материала, позволяет строить КЭ модели для анализа объемного НДС ДТТ с достаточной точностью.

2. Показано, что свойство неоднородности механических характеристик материала ДТТ может быть представлено набором конечных элементов, в каждом из которых используется изотропная структура материала со своим модулем упругости; анизотропный характер материала ДТТ в целом определяется набором этих конечных элементов в его КЭ модели.

3. Рекомендуется проводить КТ сканирование ДТТ с шагом, примерно, равным размеру конечных элементов КЭ модели. Чем меньше шаг сканирования, тем точнее результат интерполяции геометрии сечений и механических характеристик материала. Однако, в каждом конкретном случае, шаг выбирается из условий целесообразности моделирования тех или иных структур материала и геометрии.

4. Доказано, что КЭ типа гексаэдр, использующий при алгебраической аппроксимации несовместные функции формы, имеет лучшие показатели по точности и сходимости результатов, а также по вычислительным затратам, в отличие от КЭ типа тетраэдр. Однако, численное решение с применением КЭ типа тетраэдр также сходится, то есть, его применимость при построении КЭ модели ДТТ с нерегулярным (произвольным) характером геометрии вполне допустима.

5. Для наиболее полноценного использования данных сканирования, в виде растровых изображений в сечениях, генерацию КЭ сетки необходимо проводить в три этапа: - генерация сетки в сечении растрового изображения с использованием плоских КЭ; - генерация сетки объемных КЭ на основе сетки плоских КЭ; - удаление плоских КЭ, без удаления их узлов, которые, одновременно являются уже узлами объемных конечных элементов.

ГЛАВА 5 ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ РЕАЛЬНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С НЕОДНОРОДНОСТЬЮ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА И ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

В данной главе проводятся построение и анализ конечно-элементных (КЭ) моделей реальных деформируемых твердых тел (ДТТ) с неоднородностью механических характеристик материала и произвольной (индивидуальной) геометрической формой. Построение реализуется на основе комплекса методик и математических методов компьютерной обработки результатов сканирования КТ, представленных в главах 2 и 3. Полученные результаты отличаются: индивидуальностью и достоверностью геометрии КЭ модели относительно объекта, картиной распределения в ней механических характеристик (модуля упругости), полями распределения напряжений, деформаций и характерным их изменением в процессе действующей внешней нагрузки.

В качестве примера исследования реальных ДТТ используются объекты из костной ткани человека, в виде фрагмента бедренной кости и зуба. Представленный выбор объекта исследования не принципиален и может быть использован для других типов ДТТ. Он обусловлен обстоятельствами высокой степени неоднородности механических характеристик материала кости, индивидуальностью её геометрии, а также высоким уровнем развития технологии и качества сканирования КТ в медицине и технике.

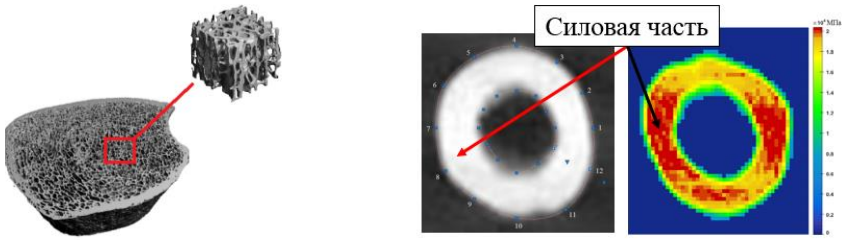
Кроме того, в практике исследования механических характеристик костной ткани существует достаточно большое количество результатов натурных испытаний [98-101] (экспериментальных опытов), которые необходимы для использования представленной [63] технологии получения картины распределения механических характеристик кости с применением КТ, а также оценки точности и сходимости результатов настоящего математического моделирования с применением численного решения МКЭ (глава 4) [36, 70].

Также, в данной главе представлено решение контактной задачи теории

упругости, в виде взаимодействующих зубов человека. В качестве вариантов исследования для них используется: взаимодействие без продукта; с продуктом между зубами; содержание в конструкции зуба дефект в виде впадины; и его заполнение из композитного материала. На основании результатов исследования проведен анализ реалистичности (точности) КЭ модели относительно объекта исследования.

5.1 Построение и анализ напряженно-деформированного состояния конечно-элементной модели фрагмента средней части бедренной кости человека

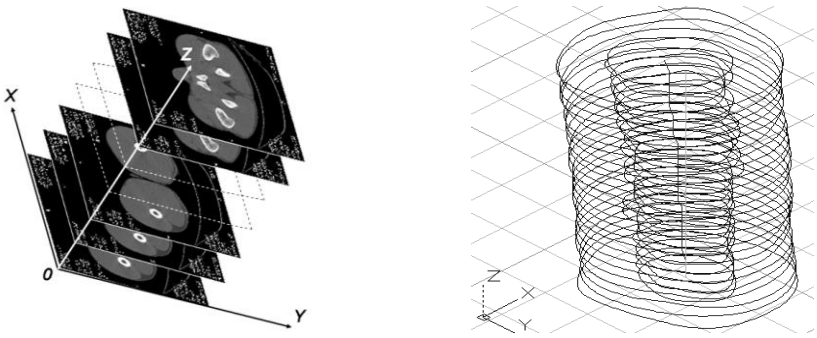
Бедренная кость имеет неоднородную (анизотропную) структуру механических характеристик материала [143] (рисунок 5.1а). Эта неоднородность показана на растровом изображении сканирования (рисунок 5.1б), где цветом представлено изменение модуля упругости по его пикселям [37].



а) б)

Рисунок 5.1 – Неоднородность структуры бедренной кости

Процесс КТ сканирования средней части бедренной кости проведен с шагом 2 *мм* [64]. Полученный результат представлен в виде пакета растровых изображений (рисунок 5.2а), состоящего из 25 сечений, с размером 512x512 пикселей.



а) б)

Рисунок 5.2 – Построение геометрии КЭ модели фрагмента средней части бедренной кости: а) пакет растровых изображений; б) каркасная модель сечений

По результатам этапа предварительной обработки растровых изображений сканирования получено, что изучаемый объект имеет невысокую степень неоднородности структуры механических характеристик. Кроме того, он имеет достаточно регулярную геометрию, близкую по своим параметрам к телу цилиндрической формы. Таким образом, при построении геометрии и моделировании неоднородности фрагмента средней части бедренной кости в КЭ модели используются следующие параметры:

- среднее значение индексов цвета растрового изображения сечений;

- линейная зависимость модуля упругости от индексов цвета;

- интерполяция механических характеристик материала в узлах по прямой между сечениями.

Выполняются следующие этапы последовательности построения геометрии бедренной кости:

- выделение анализируемой области, с дальнейшим её преобразованием в виде матрицы индексов цвета;

- построение предварительной геометрии сечения и определение её центра тяжести;

- уточнение геометрии сечения и ее центра тяжести.

Эти этапы проводятся на основе математического аппарата, разработанного в разделе 2.2, и алгоритма компьютерной реализации, представленного в разделе 3.2 с помощью специальной программы [38, 75, 76]. Результат построения каркасной модели представлен на рисунке 5.2б.

Результат определения среднего значения индекса цвета, временного и уточненного центра тяжести, для каждого сечения фрагмента средней части бедренной кости человека, представлен в таблице 5.1.

Таблица 5.1

Среднее значение индексов цвета, временные
и уточненные центры тяжести сечений

Сечение	Средние значения индексов цвета	Центр тяжести *(временный)*		Центр тяжести *(уточненный)*		z (*mm*)
		x	y	x	y	
0001	215,4138	90,1520	223,8904	90,2379	223,3803	0

0002	215,7022	90,0993	223,5146	90,3007	223,2062	2
0003	215,2874	90,1887	223,4217	90,3722	223,1607	4
0004	214,8833	90,1071	223,3128	90,2752	222,8888	6
0005	214,9904	90,1058	223,1058	90,1851	222,7529	8
0006	214,4560	90,0196	222,7867	90,2229	222,6916	10
0007	214,4502	89,8545	222,7054	90,1716	222,5026	12
0008	214,8343	89,8737	222,7556	90,1393	222,1902	14
0009	214,6206	90,0735	222,4899	90,1646	222,3267	16
0010	216,7874	89,9499	222,4315	89,8876	222,3083	18
0011	214,4265	90,0955	222,2872	90,1400	221,8645	20
0012	214,2466	90,1353	222,1391	90,2869	221,7380	22
0013	213,8668	90,2254	221,7077	90,4696	221,5603	24
0014	213,2212	90,2693	221,4966	90,4369	221,6266	26
0015	213,1581	90,3684	221,4150	90,4815	221,3364	28
0016	213,6634	90,5768	221,2076	90,5592	221,0769	30
0017	213,1329	90,5862	220,7132	90,7366	220,5251	32
0018	213,6336	90,3876	220,4289	90,6318	220,2481	34
0019	212,2567	90,5868	219,9687	90,6420	220,0671	36
0020	212,2424	90,6411	219,9878	90,5412	219,5907	38
0021	212,4899	90,4130	219,6201	90,4360	219,5911	40
0022	211,7835	90,6066	219,6493	90,3905	219,2801	42
0023	212,0781	90,5915	219,2816	90,5571	219,1935	44
0024	211,4803	90,4685	219,1034	90,6261	219,0401	46
0025	210,8121	90,5263	218,6899	90,6644	218,9133	48

В данном разделе, рассматривается задача чистого сжатия. В результате сканирования, ось, проходящая через центры тяжести пакета сечения, не совпадает с осью системы координат. То есть, при осевой нагрузке будут возникать напряжения изгиба. Для исключения этого воздействия изгиба, центры тяжести каждого сечения скорректированы по координатам осей Ох и Оу (таблица 5.2).

Таблица 5.2

Результат корректировки центра тяжести сечений

№ Сечение	Центр тяжести *(уточненный)*		$\Delta_{цх}$	$\Delta_{цу}$	$\Delta_{ц}$
	x	y	*мм*	*мм*	*мм*
0001	90,2379	223,3803	0,0000	0,0000	0,0000
0002	90,3007	223,2062	0,0627	-0,1741	0,1851
0003	90,3722	223,1607	0,1343	-0,2196	0,2574
0004	90,2752	222,8888	0,0373	-0,4915	0,4929
0005	90,1851	222,7529	-0,0528	-0,6274	0,6296
0006	90,2229	222,6916	-0,0150	-0,6887	0,6888
0007	90,1716	222,5026	-0,0663	-0,8777	0,8802
0008	90,1393	222,1902	-0,0986	-1,1901	1,1942
0009	90,1646	222,3267	-0,0733	-1,0536	1,0561
0010	89,8876	222,3083	-0,3503	-1,0720	1,1278
0011	90,1400	221,8645	-0,0979	-1,5158	1,5189

0012	90,2869	221,7380	0,0490	-1,6423	1,6430
0013	90,4696	221,5603	0,2317	-1,8200	1,8347
0014	90,4369	221,6266	0,1990	-1,7537	1,7649
0015	90,4815	221,3364	0,2436	-2,0439	2,0583
0016	90,5592	221,0769	0,3213	-2,3034	2,3257
0017	90,7366	220,5251	0,4987	-2,8552	2,8984
0018	90,6318	220,2481	0,3939	-3,1322	3,1569
0019	90,6420	220,0671	0,4041	-3,3132	3,3377
0020	90,5412	219,5907	0,3033	-3,7896	3,8017
0021	90,4360	219,5911	0,1981	-3,7892	3,7944
0022	90,3905	219,2801	0,1526	-4,1002	4,1030
0023	90,5571	219,1935	0,3192	-4,1868	4,1989
0024	90,6261	219,0401	0,3882	-4,3402	4,3575
0025	90,6644	218,9133	0,4265	-4,4670	4,4873

Используя определенную регулярность геометрии бедренной кости, наиболее оптимальным, при переходе от каркасной модели геометрии к генерации сетки КЭ модели, является использование КЭ типа гексаэдр, который имеет рекомендуемые размеры, равные шагу КТ сканирования (рисунок 5.3а).

Определение изменения механических характеристик материала во фрагменте средней части бедренной кости осуществляется с использованием прямолинейной интерполяции, относительно расположения узлов КЭ сетки между сечениями (раздел 2.2). Среднее значение индексов пакета сечений определяется как среднеарифметическое значений во всех сечениях:

$$n_{сред} = \frac{\sum_{i=1}^{25} n_i}{25} = 213,7567 .$$

Вычисление весового коэффициента перехода от индексов цвета к значениям модуля упругости осуществляется с использованием линейной зависимости вида:

$$k_E = \frac{E_{ОП}}{n_{сред}} = \frac{17100}{213,7567} = 79,9975 ,$$

где $E_{оп}$ – модуль упругости бедренной кости, полученный из эксперимента [98, 101].

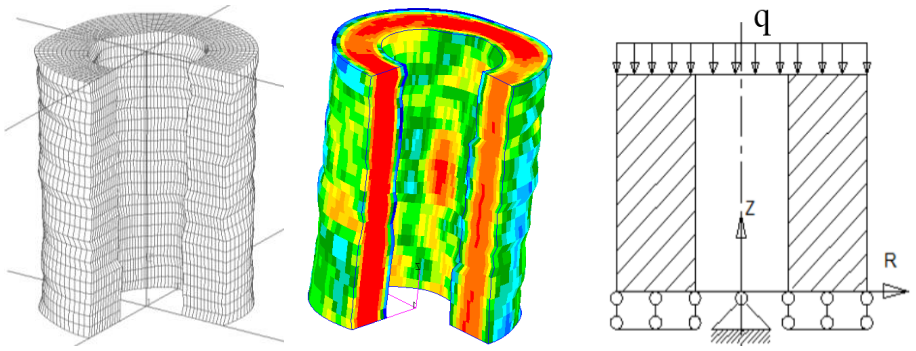
Вычисление модуля упругости для каждого узла (E_i), относительно его значение индекса цвета, проводится по формуле (5.1):

$$E_i = n_i \, k_E . \qquad (5.1)$$

Значения модуля упругости для каждого конечного элемента определяется средними значениями его узлов. Полученный результат записывается в виде фай-

ла **.pcl* для дальнейшего использования в КЭ модели.

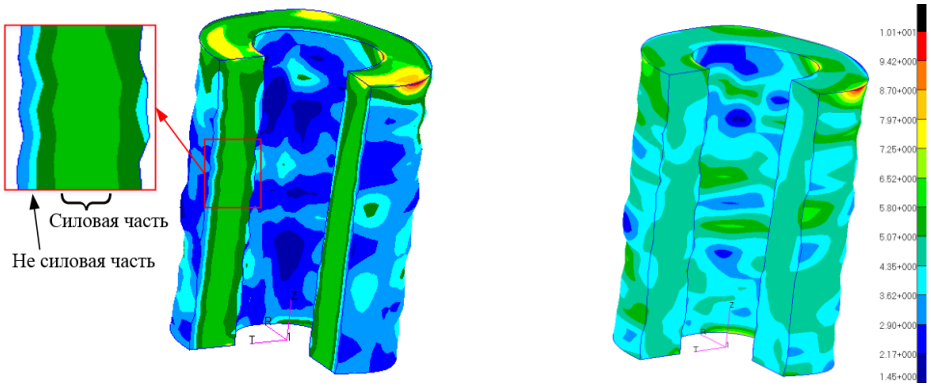
На рисунке 5.3б представлено реальное изменение модуля упругости в объемной КЭ модели бедренной кости. Картина этого изменения показывает реалистичность распределения неоднородности механических характеристик по отношению к реальной кости. Граничные условия и действующая на ДТТ внешняя нагрузка представлены на рисунке 5.3в.



а) б) в)

Рисунок 5.3 – Трехмерная КЭ модель бедренной кости (а)
с реальным изменением модуля упругости (б) и её расчетная схема (в)

Построение КЭ модели и проведение анализа ее НДС выполнены с использованием комплекса программ MSC Patran и MSC Nastran. Результат анализа представлен в виде поля эквивалентных напряжений (рисунок 5.4).



а) б)

Рисунок 5.4 – Результат анализа НДС КЭ моделей бедренной кости: с учетом неоднородности механических характеристик материала (а) и без её учета, с использованием среднего значения механических характеристик (б)

Слева на рисунке 5.4а представлено поле напряжений при учете неоднородности распределения механических характеристик материала. При анализе НДС в этом случае, видно, что по толщине стенки кости отчетливо определяются обла-

сти с напряжениями силовой и не силовой её части.

Справа на рисунке 5.4б представлено НДС КЭ модели без её учета неоднородности механических характеристик, со средним (табличным) значением модуля упругости. Результат показывает, что в КЭ модели фактическое (реальное) изменение напряжений, в процессе действующей внешней нагрузки, не представлено.

5.2 Построение и анализ напряженно-деформированного состояния конечно-элементных моделей зубов человека при их работе

В качестве более сложного примера исследования по степени неоднородности механических характеристик материала ДТТ и нерегулярности геометрии, выбраны реальные зубы человека, расположенные в челюсти.

По результатам этапа предварительной обработки растровых изображений сканирования зубов, получено, что параметры неоднородности можно детализировать по следующим пунктам:

- зуб состоит из следующих областей (структур): эмали, дентина и многих других частей [92]. Каждая из этих областей зуба имеет свой порядок по величине изменения модуля упругости. Классическая структура зуба и её вид в сечении сканирования КТ представлены на рисунке 5.5.

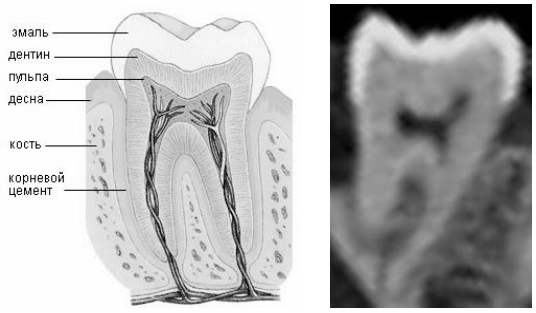


Рисунок 5.5 – Структура (схема) зуба и её вид в сечении сканирования

- зуб находится в деформируемом теле в виде челюсти и с другими зубами, то есть, при использовании результатов его сканирования, необходимо дополнительно решать задачи определения и выделения границ геометрии между зубами, а также между зубами и челюстью (рисунок 5.6);

- геометрия зуба характеризуется высокой степенью индивидуальности, в которой его верхняя часть представляет собой поверхность повышенной сложно-

сти (рисунок 5.6). То есть, при построении геометрии этой части зуба требуется дополнительное использование вертикальных поперечных сечений сканирования.

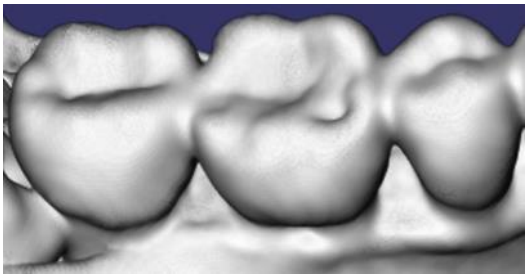


Рисунок 5.6 – Пред-визуальный трехмерный вид зубов с челюстью

Для предварительного просмотра результатов сканирования в виде 3D модели и определения системы координат при построении геометрии, с использованием файлов формата DICOM, используются комплексы программ: «3DimViewer 3.1.1» и «SIEMENS syngo (R) fastView».

Предварительная геометрия сечения зуба построена на основе функцией «0-1» и «0-1-2» с использованием комплекса программ [38, 75, 76]. Некоторые предварительные результаты построения геометрии сечений представлены на рисунке 5.7, где самый качественный из них используется, в дальнейшем, для построения уточненной геометрии сечения. Необходимо также отметить, что перед проведением процесса уточнения геометрии сечения, дополнительно выполняется процесс удаления шума (маленькие лишние зоны и линии) для отделения зоны сечения зуба от других ненужных вещей.



Рисунок 5.7 – Предварительная геометрия сечения зуба

Исследование изменения градиента индексов цвета, для уточнения геометрии сечения ДТТ, проводится для всех случаев построения его геометрии. Однако, когда в результате сканирования не достигается качества, необходимого для интерпретации внешней геометрии и внутренней структуры изучаемого объекта (рисунок 5.8а), тогда процесс построения и уточнения геометрии сечения выполняются с некачественными результатами.

Для решения этой проблемы предлагается:

- повторить процесс сканирования с изменением настроек КТ, например: шага сканирования, разрешения полученных растровых изображений и др.;

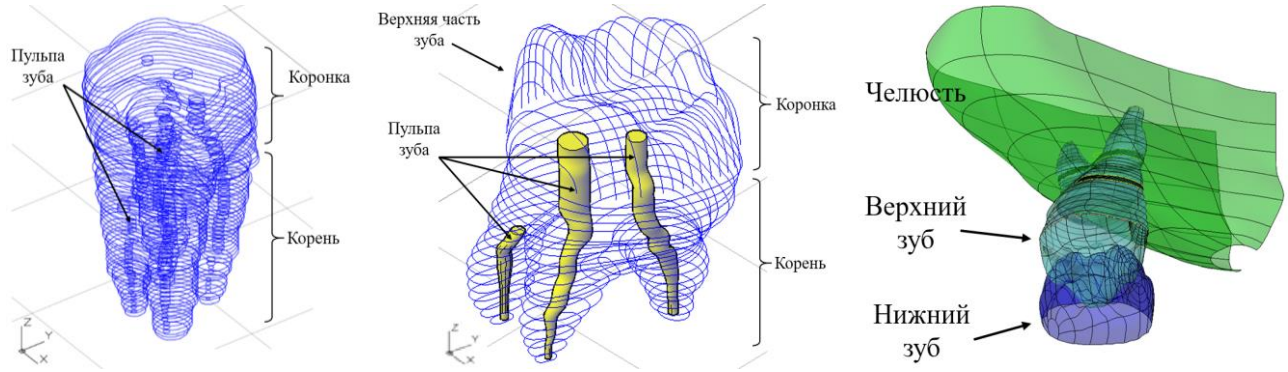
- использовать дополнительные направления сканирования (кроме главного). Например, на рисунке 5.8б представлен вариант дополнительного построения геометрии верхней части зуба на основе результатов вертикального сканирования.



а) б)

Рисунок 5.8 – Сканирование ДТТ с высокой неоднородностью (а) и дополнительное построение геометрии вертикального сечения (б)

Каркасная модель зуба, как результат построения геометрии, представлена на рисунках 5.9а и 5.9б. Она состоит из 60 горизонтальных сечений (образец 1) и 31 вертикальных сечений (образец 2).



а) образец 1 б) образец 2 в)

Рисунок 5.9 – Каркасная модель зубов человека, построены на основе обработки растровых изображений их сканирования КТ

Системы «зуб-челюсть» и «зуб-зуб» имеют высокий уровень нерегулярности геометрических параметров, поэтому процесс генерации сетки КЭ модели, необходимо проводить с использованием подхода, когда на основе каркасной модели дополнительно строится трехмерная твердотельная геометрическая модель, с дальнейшим процессом генерации КЭ сетки с использованием конечных элементов типа тетраэдр. Результат построения твердотельной геометрической модели

верхнего зуба в системе контактного взаимодействия с другом зубом и челюстью представлен на рисунке 5.9в.

Решение контактной задачи теории упругости, в данном разделе, осуществляется в виде взаимодействующих зубов человека, с вариантами расчетов: «зуб – зуб» (без продукта) и «зуб – продукт – зуб» (с продуктом между зубами). Их трехмерные геометрические модели (в разрезе) представлены на рисунке 5.10.

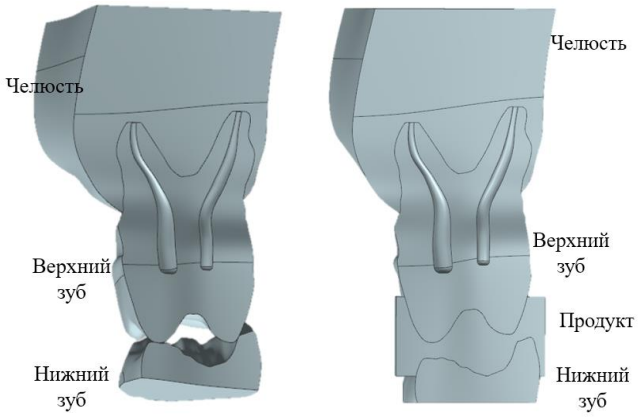


Рисунок 5.10 – Трехмерная геометрическая модель зуба «без продукта» (а) и «с продуктом» (б)

Следующим этапом построения КЭ моделей ДТТ является определение в них реального изменения механических характеристик.

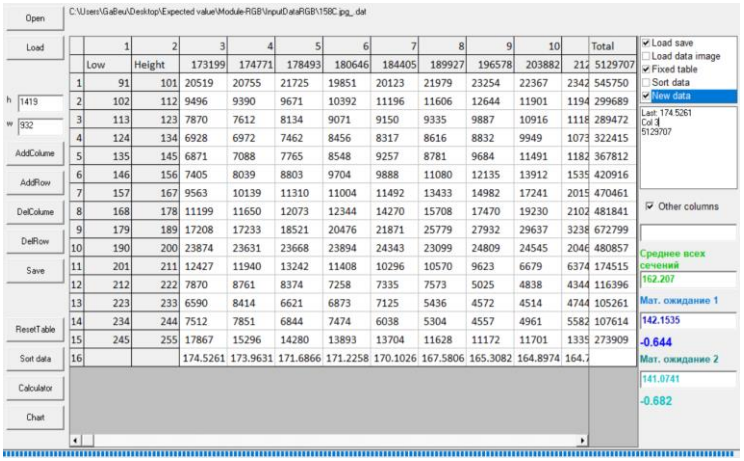
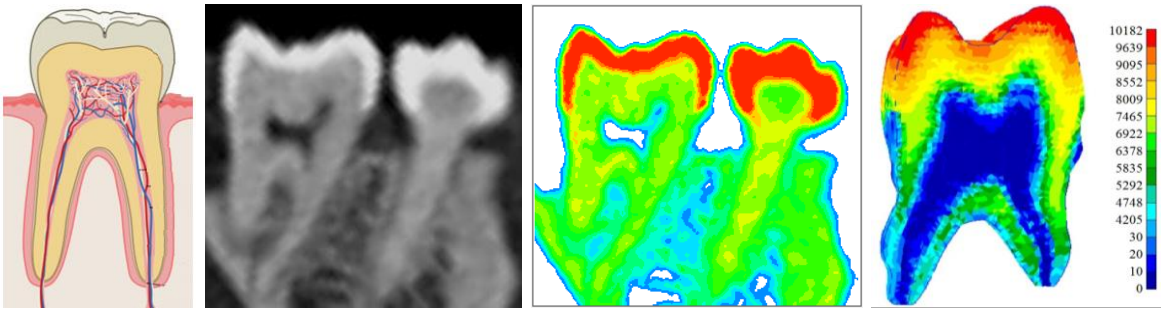


Рисунок 5.11 – Интерфейс программы обработки пакета растровых изображений для определения математического ожидания индексов цвета

Растровые изображения сканирования зуба имеют значительно больший градиент изменения значений индексов цвета в сечениях и между ними. То есть, для определения среднего значения индексов цвета используется зависимость вы-

числения математического ожидания. Этот процесс выполнятся с помощью специальной программы [76], её интерфейс представлен на рисунке 5.11.

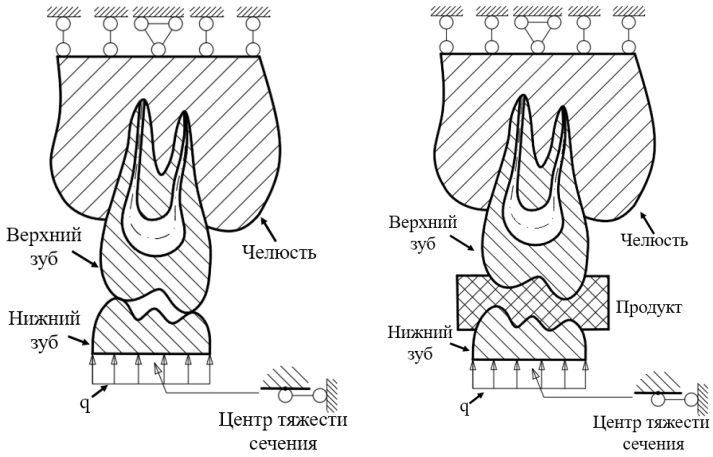
Результат определения реального изменения механических характеристик материала зуба и челюсти представлен на рисунке 5.12. Где, слева на право, представлены: структура зуба (рисунок 5.12а); его растровое изображение сканирования (рисунок 5.12б); изменение модуля упругости в сечении (рисунок 5.12в) и по элементам трехмерной КЭ модели (рисунок 5.12г). Это распределение полностью соответствует известным представлениям о структуре свойств материала зуба и его индивидуальных особенностях.



а) б) в) г)

Рисунок 5.12 – Реальное изменение механических характеристик материала зуба

На рисунке 5.13 представлена расчетная схема КЭ модели зуба человека с граничными условиями и внешней нагрузкой, где, кроме них, дополнительно, представлены условия для решения контактной задачи взаимодействий зубов «без продукта» (рисунок 5.13а) и «с продуктом» (рисунок 5.13б).



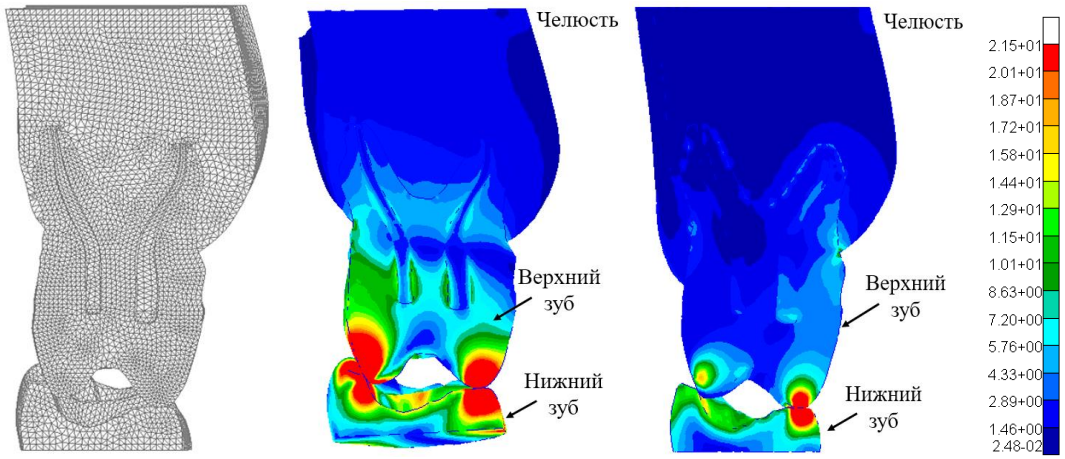
а) б)

Рисунок 5.13 – Схема контактного взаимодействия КЭ модели зуба:

а) без продукта; б) с продуктом

Для оценки точности применения представленной технологий сканирования при моделировании неоднородности механических характеристик и индивидуальности геометрии в КЭ модели, проводится сравнение результатов анализа НДС КЭ моделей (в разрезе): - с учетом реального изменения механических характеристик (рисунки 5.14б и 5.15б) и - без учета этого изменения, с использованием усредненного значения механических характеристик (рисунки 5.14в и 5.15в).

КЭ модель зуба «без продукта» и результат её анализа НДС в виде распределения эквивалентных напряжений в разрезе представлены на рисунке 5.14.



а) б) в)

Рисунок 5.14 – КЭ модель зуба (а) и результаты анализа НДС:
с учетом реального изменения механических характеристик материала (б)
и без учета этого изменения (б) (усредненное значение)

Анализ результата (рисунок 5.14б) показывает, что максимумы напряжений наблюдаются в точках контакта на вершинах зубных бугров. Более высокая нагрузка воспринимается областью эмали и дентина зуба. А внутренняя часть зуба менее нагружена.

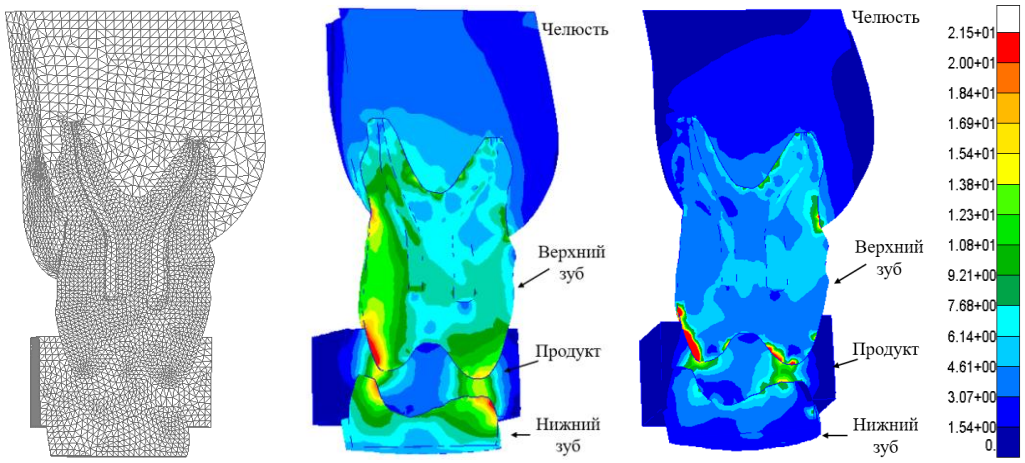
На рисунке 5.14в представлен аналогичный расчет, но без учета неоднородности структуры материала зуба, с использованием усреднённого значения его механических характеристик (эмали и дентина).

Сравнение этих результатов (рисунки 5.14б и 5.14в) показывает более равномерное распределение напряжений в теле зуба при моделировании неоднородности распределения его механических характеристик.

КЭ модель зуба «с продуктом» и результат её анализа НДС в виде распре-

деления эквивалентных напряжений в разрезе представлены на рисунке 5.15.

С использованием реального изменения механических характеристик, результат анализа (рисунок 5.15б) показывает, что, при сжатии «продукта», максимумы также расположены в области контакта между зубами. Однако максимумы напряжений уменьшаются по величине и смещаются в сторону впадин верхней части зуба.



а) б) в)

Рисунок 5.15 – КЭ модель зуба с продуктом (а) и результаты анализа НДС: с учетом реального изменения механических характеристик материала (б) и без учета этого изменения (б) (усредненное значение)

Сравнение результатов, представленных на рисунках 5.15б и 5.15в, также показывает более равномерное распределение напряжений в теле зуба при моделировании неоднородности распределения его механических характеристик.

5.3 Построение и анализ напряженно-деформированного состояния конечно-элементных моделей зубов с дефектом и установкой пломбы из композитного материала

В данном разделе, представлено КЭ решение контактной задачи теории упругости, в виде взаимодействующих зубов человека, с вариантом расчета "без продукта". Один из КЭ моделей зубов содержит в своей конструкции дефект в виде кариесной области (впадины) в верхней части эмали. Второй вариант КЭ модели содержит заполнение этой области пломбой из композитного материала.

Пломбой в стоматологии является материал, который, в размягченном состоянии заполняется во впадину дефекта и там затвердевает. Этот процесс осуществляется в зубе после лечения кариеса. Пломба способствует восстановлению нормальной функции зубов при их повреждении кариесом. С другой стороны, в техническом смысле, пломба является одним из составляющих в сборной конструкции зуба. В качестве материалов для пломбы могут использоваться амальгама, пластмасса, керамика, металл, композитный материал и др. Из этих материалов, наибольший интерес представляет пломба из композитного материала, который обладает механическими характеристиками сопоставимыми с характеристиками эмали зуба, по прочности, износостойкости и долговечности.

В таблице 5.3 представлены некоторые известные стоматологические композитные материалы и их средние значения механических характеристик [115, 137, 149, 155, 165].

Таблица 5.3

Средние значения модуля упругости стоматологических композитных материалов

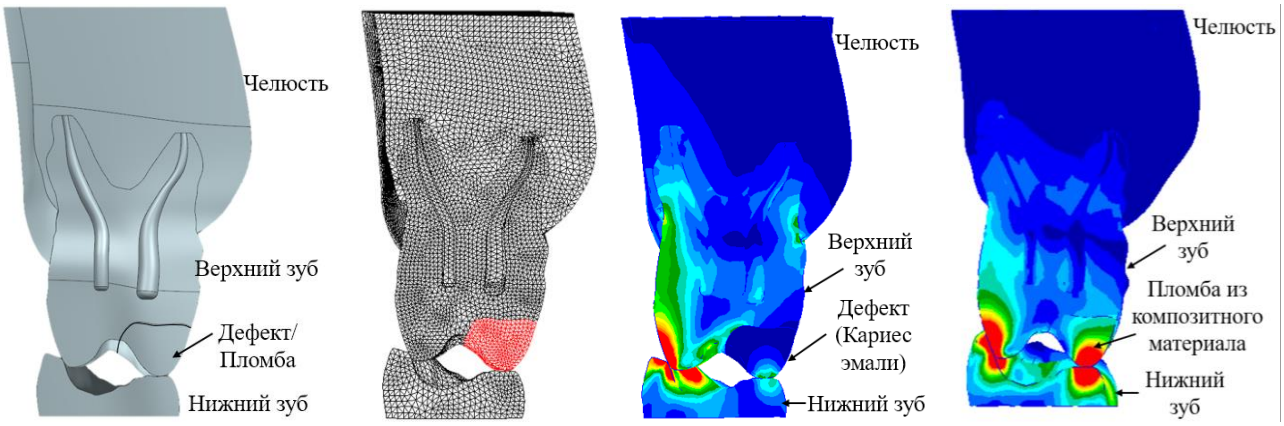
Материал	Модуль упругости E, (МПа)
Grandio	13910
Esthet-X	7410
Filtex Z250/3M ESPE	11700
Filtek Supreme	10500
Admira	10700
Dyract AP	9100 ± 1000
PermaFlo	6000 ± 700
Filtek Flow	5100 ± 1500
Dyract Flow	5100 ± 800
Compoglass Flow	4400 ± 600
Heliomolar Flow	3900 ± 400

Две КЭ модели используются для сравнения результатов, отличающихся только моделированием некоторой области одного из зубов, находящейся в верхней части эмали. В первой модели эта область содержит дефект в виде кариеса. Вторая модель содержит заполнение этой области дефекта в виде пломбы из композитного материала. Геометрия КЭ модели этих областей не меняется. Меняются только механические характеристики в них. В первой модели (с дефектом) значение модуля упругости берется минимальным и одинаковым для всей области де-

фекта. Во второй модели, область дефекта имеет характеристики пломбы из композитного материала. Механические характеристики этого материала также берутся усредненными для области дефекта.

Трехмерная геометрическая модель, с моделированием области дефекта или пломбы, представлена на рисунке 5.16а. Результат генерации сетки КЭ модели с использованием конечных элементов типа тетраэдр представлен на рисунке 5.17б.

Моделирование контакта осуществляется двумя типами КЭ: контакт между пломбой и зубом моделируется типом КЭ «Glue – Glue»; а между зубами моделируется типом «Touch – Touch». Их использование осуществляется в программном комплексе MSC Patran и MSC Marc.



а) б) в) г)

Рисунок 5.16 – Построение КЭ модели зуба, включая область пломбы из композитного материала

Результат анализа КЭ модели с дефектом (рисунок 5.16в) показывает, что кариесная часть зуба не воспринимает нагрузку. То есть, остальная (здоровая) часть зуба (слева на рисунке 5.16в) воспринимает дополнительную (всю) нагрузку и вероятность её разрушения увеличивается.

Результат анализа второй КЭ модели, после заполнения области кариеса зуба пломбой из композитного материала (рисунок 5.16г), показывает, что зуб практически полностью восстанавливает свою способность работать, так как картина напряжений идентична картине, полученной для здорового зуба (рисунок 5.14б).

5.4 Выводы по главе

1. Интерпретация растровых изображений реальных ДТТ, в виде фрагмента средней части бедренной кости и зубов человека, полученных сканированием компьютерным томографом, позволяет реализовать возможность определения индивидуальной геометрии и изменения механических характеристик неоднородных материалов в любой точке их объёма, необходимых для построения КЭ модели.

2. Результаты решения контактной задачи взаимодействий ДТТ, в данной главе, подтверждают точность и надежность применения представленной технологии сканирования при моделировании реальных ДТТ с учетом неоднородности механических характеристик материала и индивидуальности геометрии. На этой основе, доказывается повышение реалистичности (точности) КЭ модели относительно реального объекта.

3. Для построения геометрии ДТТ, имеющей повышенный уровень сложности, включая индивидуальность геометрии и неоднородность структуры материала, используется подход дополнительного сканирования с изменением его направления, что повышает эффективность разработанной технологии обработки результатов сканирования. Этот подход применим для любых сложных структур материала и геометрии.

4. Реализация технологии интерпретации результатов сканирования, при построении КЭ моделей ДТТ, для достижения необходимого уровня точности и эффективности, осуществляется с использованием специального комплекса программ, построенного на основе математических методов и алгоритмов, представленных в главах 2 и 3, включая процессы сортировки и упаковки данных, что в значительной степени умещает время обработки данных и анализа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенного диссертационного исследования получены следующие основные результаты:

1. Разработан комплекс математических методов моделирования интерпретации растровых изображений сканирования КТ, позволяющий проводить исследование любых сложных структур реальных ДТТ, результаты которого используются при построении их КЭ моделей с учетом неоднородности в них механических характеристик материала и индивидуальности геометрии.

2. Разработана технология математического моделирования и вычислительного эксперимента: от обработки растровых изображений сечений сканирования ДТТ, до построения и анализа их КЭ моделей. Включая: - построение индивидуальной геометрии сечений ДТТ и его внутренних структур; - определение изменения механических характеристик материала для каждого узла и конечного элемента объемной модели ДТТ в целом.

3. Проведен анализ НДС КЭ моделей тестовых образцов, с доказательством точности и сходимости численного решения МКЭ при моделировании свойства неоднородности механических характеристик материала и геометрии ДТТ. Установлено, что эта неоднородность может быть представлена набором конечных элементов, в каждом из которых используется изотропная структура материала со своим модулем упругости.

4. Построен и проведен анализ НДС КЭ моделей реальных ДТТ, в виде фрагмента бедренной кости и зуба человека, с учетом неоднородности механических характеристик материала и геометрии. Доказаны эффективность и точность использования представленной технологии в реальных условиях работы (проектирования и изготовления) конструкций.

5. Используя разработанное математическое и алгоритмическое обеспечение, создан комплекс программ интерпретации растровых изображений сканирования КТ деформируемых твердых тел, с дополнительным использованием данных натурных испытаний, для определения в них неоднородности механических характеристик материала и построения индивидуальной геометрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аврунин, А. С. Перспективы и возможности цифровой обработки изображений в медицине / А. С. Аврунин, О. В. Демеш, М. К. Касумова, В. А. Павлова // Травматология и ортопедия России. – 1996. – №3. – С. 83–87.

2. Алберг, Дж. Теория сплайнов и её приложения. Перевод с английского Ю. Н. Субботина под редакцией С. Б. Стечкина / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. Издательство «Мир». Москва, 1972. – 319 с.

3. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. –512 с.

4. Артамонов, Е. И. Построение объемных геометрических моделей объектов по их растровым изображениям / Е. И. Артамонов, А. В. Болонкин // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2008. – С. 61–68.

5. Артамонов, Е. И. Синтез структур систем векторизации изображений / Е. И. Артамонов, А. В. Болонкин // Информационные технологии в проектировании и производстве. Москва. – 2008. – №2. – С. 55–61.

6. Аун, М. Двумерная конечно-элементная модель для представления движения открытия челюстей. Параметрическое изучение моделирования пружинной жесткости задней дисковой связки и крыловидной мышцы. Сравнение с магнитно-резонансным описанием / М. Аун, М. Менар, Ю.И. Няшин и др. // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16. – №2. – С. 30–37.

7. Аун, М. Разработка и проверка двумерной конечно-элементной модели височно-нижнечелюстного сустава при помощи магнитно-резонансного исследования: моделирование движения открытия и закрытия челюстей / М. Аун, М. Менар, Ж. Морлье и др. // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т.15. – №1. – С. 23–32.

8. Барыш, А. Е. Математическое моделирование переднего межтелового моносегментарного цервикоспондилодеза методом конечных элементов // Травматология, ортопедия и протезирование ГУ «Институт патологии позвоночника и суставов им. проф. М. И. Ситенко АМН Украины», Харьков. – 2006. – №1, – С. 36–47.

9. Барыш, А. Е. Напряженно-деформированное состояние шейных позвоночных сегментов при моделировании их мягкотканных повреждений / А. Е. Барыш, Я. А. Долуда // Травматология, ортопедия и протезирование ГУ «Институт патологии позвоночника и суставов им. проф. М. И. Ситенко АМН Украины», Харьков, 2007. – №2. – С. 23–30.

10. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вильсон – М.: Стройиздат. – 1982. – 448 с.

11. Белим, С. В. Выделение контуров на изображениях с помощью алгоритма кластеризации / С. В. Белим, П. Е. Кутлунин // Компьютерная оптика. – 2015. – Т.39. – №1. – С. 119–124.

12. Белявцев, В. Г. Алгоритмы фильтрации изображений с адаптацией размеров апертуры / В. Г. Белявцев, Ю. Е. Воскобойников // Автометрия. – 1998. – Т.3. – С. 18–25.

13. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов, 1976. – 608 с.

14. Бессуднова, Н. О. Биомеханическое моделирование напряженно-деформированного состояния реставрированного зуба под окклюзионной нагрузкой при различных способах фиксации штифта в корневом канале / Н. О. Бессуднова, Е. Е. Ципоруха, С. Б. Вениг // Российский журнал биомеханики. – 2015. – Т19. – №1. – С. 90–105.

15. Блох, М. В. О модификации метода конечных элементов для решения двумерных упругих и пластических контактных задач. / М. В. Блох, А. В. Оробинсткий // Проблемы прочности. – 1983. – №5. – С. 21–27.

16. Босяков, С. М. Области сопротивления для модели однокоренного зуба: различные случаи симметрии / Босяков С. М., Мселати А. Ф. // Российский журнал биомеханики. – 2015. – Т.19. – №3. – С. 258–272.

17. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев – М.: Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 720 с.

18. Бушманов, А. В. Исследование жёсткости аппарата Илизарова / А. В. Бушманов, Л. А. Соловцова // Российский журнал биомеханики. – 2008. – Т.12. – №3(41). – С.97–102.

19. Вершинин, В. А. Биомеханические аспекты вторичной деформации зубов / В. А. Вершинин, В. Ю. Кирюхин, Г. И. Рогожников // Российский журнал биомеханики. – 2004. – Т.8. – №2. – С. 19–28.

20. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: Физматгиз, 1963. – 872 с.

21. Герман, Дж. Механика разрушения кости / Дж. Герман, Г. Либовиц // В книге Дж. Берри, А. Джент, Ф. Эйрих, Дж. Герман Разрушение. Том 7. Разрушение неметаллов и композитных материалов. Часть 2. Органические материалы ред. Либовиц Г. - М.: «Мир». – 1976. – С.392–463.

22. Гилева, О. С. Вычислительное моделирование начальной стадии кариеса зубов: геометрическое моделирование зуба / О. С. Гилева, М. А. Муравьева, Н. И. Симакина и др. // Вестник Пермского Университета. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Вып. 2(10). – С. 20–25.

23. Голованов, Н. Н. Геометрическое моделирование. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 472 с.

24. Голядкина, А. А. Конечно-элементное моделирование ишемической болезни сердца исходя из картины морфофункциональных изменений венечных артерий и сердечной мышцы человека / А. А. Голядкина, И. В. Кириллова, О. А. Щучкина и др. // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т15. – №.4 (54). – С. 33 – 46.

25. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений. Перевод с английского под редакцией Рубанова Л. И., Чопиа П. А. / Р. Гонсалес, Р. Вудс. Москва: Техносфера, 2012. – 1104 с.

26. Гречников, Ф. В. Моделирование объектов в металлургии и обработке металлов давлением: учеб. пособие / Ф. В. Гречников, И. П. Попов, А. Г. Шляпугин. Самара: Изд-во Самар, гос. аэрокосм, ун-та, 2007. – 96 с.

27. Демидова, И. И. Применение задач сопротивления материалов к решению проблем биомеханики // Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т.13. – №3(45). – С.44–55.

28. Джанг, Д. Й. Численное прогнозирование перемещения вертлужной чаши под действием высоких сжимающих напряжений на основе моделирования

резорбции костной ткани / Д. Й. Джанг, С. Цуцуми, Й. Б. Канг, Р. Секель // Российский журнал биомеханики. – 2005. – Т.9. – №3. – С.32–45.

29. Дороничева, А. В. Метод сегментации медицинских изображений / А. В. Дороничева, С. З. Савин // Fundamental research. – 2015. – № 5. – С. 294–298.

30. Дубинин, А. Л. Анализ развития понятия «центр сопротивления зуба» / А. Л. Дубинин, Ю. И. Няшин, М. А. Осипенко // Российский журнал биомеханики. – 2014. – Т.18. – №4. – С. 452–470.

31. Дубинин, А. Л. Область сопротивления зуба: экспериментальное определение // Российский журнал биомеханики. – 2015. –Т.19. – №.1. – С. 78–89.

32. Дубинин, А. Л. Оптимизация ортодонтического перемещения зубов / А. Л. Дубинин, Ю. И. Няшин, М. А. Осипенко и др. //Российский журнал биомеханики. – 2016. – Т.20. – №1. – С. 37–47.

33. Зайцев, Д. В. Прочностные свойства дентина и эмали / Д. В. Зайцев, Е. В. Бузова, П. Е. Панфилов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2010. – Т.15. – №.3-2. – С. 1198–1202.

34. Зенкевич, О. С. Метод конечных элементов в технике. –М.: Мир, 1975. – 542 с.

35. Златин, А. Н. Осесимметричная контактная задача о вдавливании упругого цилиндра в упругий слой / А. Н. Златин, Я. С. Уфлянд // ПММ. – 1976. – Т.40. – Вып.1. – С. 81–93.

36. Зыонг, В. Л. Интерполяция геометрии и неоднородности материала деформируемых тел при построении их объемных моделей методом конечных элементов на основе сканирования компьютерным томографом / В. Л. Зыонг, А. А. Пыхалов, С. Р. Татарникова // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. - Иркутск: ИрГУПС. – 2017. – №3 (55). – С. 10–18.

37. Зыонг, В. Л. Математическое моделирование и автоматизация обработки изображений сканирования твердых деформируемых тел с неоднородными свойствами материала и геометрии для построения их конечно-элементных моделей / В. Л. Зыонг, А. А. Пыхалов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: ИрГУПС. – 2017. – №2 (54). – С. 30–39.

38. Зыонг, В. Л. Автоматизации обработки изображений сканирования твердых деформируемых тел для определения изменения модуля упругости и использования при построении их конечно-элементной модели / В. Л Зыонг, А. А. Пыхалов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016615938. 2016..

39. Измайлова, З. Т. Предоперационная диагностика модульной трансформации при чрескостном остеосинтезе бедренной кости // Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т.13. – №2. – С. 93–98.

40. Календер, В. Компьютерная томография основы, техника, качество изображений и области клинического использования: пер. с англ. – М.: Техносфера, 2006. – 344 с.

41. Каплун, А. Б. Ansys в руках инженера: Практическое руководство / А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А Олферьева. - М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.

42. Караваева, Е. М. Биомеханическое моделирование применения шинирующего волокна на основе базальта при лечении пациентов с заболеваниями пародонта / Е. М. Караваева, Г. И. Рогожников, Ю. И. Няшин, В. Н. Никитин // Российский журнал биомеханики. – 2015. – Т19. – №1. – С. 106–115.

43. Кирюхин, В. Ю. Конечно-элементный анализ механических причин возникновения вторичных деформаций / В. Ю. Кирюхин, Г. И. Рогожников, В. А. Вершинин // Российский журнал биомеханики. – 2005. – Т.9. – №3. – С. 16–31.

44. Кирюхин, В. Ю. Конечно-элементный анализ способов пломбирования при реставрации дефекта первого моляра / В. Ю. Кирюхин, И. В. Ерёмин, А. А. Киченко и др. // Российский журнал биомеханики. – 2007. – Т.11. – №3. – С. 84–103.

45. Кирюхин, В. Ю. Конечно-элементный анализ эффективности установки вкладки для замещения дефекта премоляра / В. Ю. Кирюхин, Г. И. Рогожников, О. В. Шулятникова //Российский журнал биомеханики. – 2007. – Т.11. – №1. – С. 55–69.

46. Кнетс, И. В. Деформативность и прочность компактной костной ткани при растяжении / И. В. Кнетс, Ю. Ж. Саулгозис, Х. А. Янсон // Механика полимеров. – 1974. – №3. – С. 501–506.

47. Кнетс, И. В. Деформирование и разрушение твёрдых биологических

тканей / И. В. Кнетс, Г. О. Пфафрод, Ю. Ж. Саулгозис. - Рига: Зинатне, 1980. – 319с.

48. Кнетс, И. В. Некоторые современные проблем биореологии / И. В., Кнетс, С. А. Регирер // В кн.: Реология. (Труды Всесоюз. школы по реологии, 1977). Новосибирск. – 1977, – С. 194–205.

49. Колотников, А. М. MSC Patran - Руководство пользователя / А. М. Колотников, Д. В. Слезкин. – 160 с.

50. Кольцов, П. П. Эмпирический подход к оценке алгоритмов выделения границ // Информационные технологии и вычислительные системы. – URSS. – 2011. – С. 50–57.

51. Компьютерные голографические системы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://optic.cs.nstu.ru (дата доступа: 2016).

52. Конюхова, С. Г. Напряженное состояние пародонта в области пластинчатого имплантата при окклюзионной нагрузке / С. Г. Конюхова, Г. И. Рогожников, Ю. И. Няшин и др. // Российский журнал биомеханики. – 2003. – Т.7. – №2, – С. 35–44.

53. Левитин, А. В. Алгоритмы: введение в разработку и анализ. (Introduction to The Design & Analysis of Algorithms). Пер. с англ. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2006. – 576 с.

54. Марусина, М. Я. Современные виды томографии. Учебное пособие / М. Я. Марусина, А. О. Казначеева – СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. – 132 с.

55. Мателенок, Е. М. Напряженно-деформированное состояние дистального отдела плечевой кости в условиях нагружения /Е. М. Мателенок, А. В. Яресько // Травматология, ортопедия и протезирование ГУ «Институт патологии позвоночника и суставов им. проф. М. И. Ситенко АМН Украины», Харьков. – 2007. – №2. – С. 7–12.

56. Морозов, Е. М. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е. М. Морозов, Г. П. Никишков – М.: Наука, 1980. – 254 с.

57. Науменко, Л. Ю. Напряженно-деформированное состояние костной ткани после реконструктивно-восстановительных операций на суставах пальцев кисти /

Л. Ю. Науменко, А. А. Маметьев, Ю. В. Куликов, И. Д. Павленко // Травматология, ортопедия и протезирование ГУ «Институт патологии позвоночника и суставов им. проф. М. И. Ситенко АМН Украины», Харьков. – 2007. – №3. – С. 117–120.

58. Науменко, Л. Ю. Сравнительный анализ напряжений при различных вариантах системы «кость – шарнирный одноплоскостной аппарат внешней фиксации» в области локтевого сустава / Л. Ю. Науменко, И. В. Бойко, Д. С. Носивец, О. С. Раджабов // Травматология, ортопедия и протезирование ГУ «Институт патологии позвоночника и суставов им. проф. М. И. Ситенко АМН Украины», Харьков. – 2007. – №1. – С. 39–43.

59. Няшин, Ю. И. Биомеханический анализ зубных имплантатов из сплава титана и диоксида циркония / Ю. И. Няшин, Г. И. Рогожников, А. Г. Рогожников, В. Н. Никитин, Н. Б. Асташина //Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т.16. – №1(55). – С. 102–109.

60. Олесова, В. Н. Изучение биомеханики литой штифтовой вкладки в условиях трёхмерного математического моделирования / В. Н. Олесова, О. С. Балгурина, И. У. Мушеев и др. // Российский стоматологический журнал. – 2002. – №2. – С. 4–5.

61. Осипенко, М. А. О соотношении понятий «центр сопротивления зуба» и «центр жёсткости сечения балки» / М. А. Осипенко, Ю. И. Няшин, М. Ю. Няшин // Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т.13, №3. – С. 89–93.

62. Панченко, С. П. Обоснование способа фиксации фрагментов большеберцовой кости при открывающейся корригирующей остеотомии / С. П. Панченко, М. Л. Головаха, М. Штоффель // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво). – ПолтНТУ. – 2009. – Вип.3(25). – Т.1. – С. 159–164.

63. Пат. № 2542918, Российская Федерация, МПК G06T 1/00 A61B 6/00. Способ определения значений модуля упругости и его распределения в конструктивных элементах, обладающих неопределёнными свойствами прочности/ А. А. Пыхалов, В. П. Пашков, И. Н. Зотов, М. С. Кувин; заявитель и патентообладатель ФГБОУ ВПО «ИрГТУ»; заявл. 30.10.2013; опубл. 27.02.2015. Бюл. № 6.

64. Пашков, В. П. Моделирование механических систем с неопределёнными свойствами материала с применением метода конечных элементов и компьютер-

ной томографии / В. П. Пашков, И. Н. Зотов, А. А. Пыхалов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. Иркутск: ИрГУПС. – 2014. – №2 (42). – С. 44–50.

65. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. Отв. ред. Писаренко Г. С. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с. – ISBN 5-12-000299-4.

66. Пичхадзе, И. М. Биомеханика тазового кольца и его структурных элементов / И. М. Пичхадзе, А. Г. Холодкова // Вестник РАМН. – 2008. – №8. – С. 44–47.

67. Попсуйшапка, А. К. Внутренние напряжения при нагрузках биомеханических конструкций «отломки бедренной кости — аппарат внешней фиксации», «отломки бедренной кости — накостный фиксатор» и клинические аспекты их проявления / А. К. Попсуйшапка, И. Н. Боровик, А. И. Белостоцкий, О. В. Мананков // Травматология, ортопедия и протезирование ГУ «Институт патологии позвоночника и суставов им. проф. М. И. Ситенко АМН Украины», Харьков. – 2008. – №2. – С. 56–62.

68. Порев, В. Н. Компьютерная графика. – СПБ.: БХВ-Петербург, 2002. – 432 с.

69. Потапов, С. Д. Применение контактных конечных элементов для моделирования напряженности деталей турбокомпрессоров // Компрессорная техника и пневматика. – 2000. – №1. – С. 27–30.

70. Пыхалов, А. А. Исследование точности численного решения методом конечных элементов анализа напряженно-деформированного состояния образцов из костной ткани на основе данных компьютерного томографа и натурного эксперимента / А. А. Пыхалов, В. П. Пашков, В. Л. Зыонг // ВЕСТНИК ИрГТУ. – 2017. – Т.21. – №4. – С. 47–56.

71. Пыхалов, А. А. Контактная задача расчета сборных роторов турбомашин с применением метода конечных элементов / А. А. Пыхалов, А. В. Высотский // ВЕСТНИК ИрГТУ. – 2003. – №3–4 (15–16). – С 56–70.

72. Пыхалов, А. А. Контактная задача статического и динамического анализа сборных роторов турбомашин / А. А. Пыхалов, А. Е. Милов. - Иркутск: ИрГТУ, 2007. – 192 с.

73. Пыхалов, А. А. Построение и анализ конечно-элементных моделей неоднородных деформируемых твердых тел на основе сканирования / А. А. Пыхалов, В. Л. Зыонг, В. Г. Толстиков // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2018. – № 4. – С. 106–118. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.4.10.

74. Пыхалов, А. А. Расчет сборных роторов турбомашин с применением неголономных контактных связей и метода конечных элементов / А. А. Пыхалов, А. В. Высотский // Компрессорная техника и пневматика. – 2003. – №8. – С. 25–33.

75. Пыхалов, А. А. Математическое моделирование обработки результатов сканирования деформируемых твердых тел для построения геометрии их конечно-элементных моделей / А. А. Пыхалов, В. Л. Зыонг // Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. № 2018615239. 2018.

76. Пыхалов, А. А. Математическое моделирование для автоматизации обработки результатов сканирования деформируемых твердых тел сложной геометрической формы с неоднородными механическими характеристиками для построения их конечно-элементных моделей / А. А. Пыхалов, В. Л. Зыонг // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017661241. 2017.

77. Пыхалов, А. А. Контактная задача статического и динамического анализа сборных роторов турбомашин. Дис. на соиск. учен. степ. док. техн. наук. Москва, 2006. – 428 с.

78. Рентгеновская компьютерная томография. Руководство для врачей. Под ред. проф. Г. Е. Труфанкова и к. м. н. С. Д. Рудя. – СПБ: ООО «Издательство ФОЛИАНТ», 2008. – 1200 с.

79. Рогожников, Г. И. Влияние модуля упругости губчатой и кортикальной кости на напряжённое состояние в области пластинчатого имплантата при окклюзионной нагрузке/ Г. И. Рогожников, С. Г. Конюхова, Ю. И. Няшин и др. // Российский журнал биомеханики. – 2004. – Т.8. – №1. – С.54–60.

80. Роджерс, Д. Алгоритмические основы машиной графики Перевод с английского С. А. Вичеса, Г. В. Олохтоновой, П. А. Монахова. – М.: Мир, 1989. – 512 с., ил.

81. Рыбников, Е. К. Инженерные расчеты механических конструкций в системе MSC Patran – MSC Nastran. Учебное пособие. Часть I / Е. К. Рыбников, С. В.

Володин, Р. Ю. Соболев. –М.:, 2003. – 130 с.

82. Рыбников, Е. К. Инженерные расчеты механических конструкций в системе MSC Patran – MSC Nastran. Учебное пособие. Часть II / Е. К. Рыбников, С. В. Володин, Р. Ю. Соболев. М.:, 2003. – 174 с.

83. Сальников, И. И. Поэлементный анализ растровых изображений: монография. – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2015. – 180 с.

84. Саулгозис, Ю. Ж. Механические свойства конструктивного биополимера – компактной ткани человека. Дис. на соиск. учен. степ. канд. тех. наук. Рига, 1975. – 142 с.

85. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов. Пер. с англ. А. А. Шестакова под редакцией Б. Е. Побери. Издательство «Мир», Москова, 1979. – 392 с.

86. Сизиков, В. С. Обратные прикладные задачи и MatLab. Санкт-Петербург: СПб: Лань, 2011. – 256 с.

87. Сизиков, В. С. Предшествующая и последующая фильтрация шумов в алгоритмах восстановления изображений / В. С. Сизиков, Р. А. Экземпляров // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2014. – Т.89. – С. 112–122.

88. Симонов, Е. Н. К вопросу получения объемных изображений в рентгеновсой компьютерной томографии / Е. Н. Симонов, Д. В. Аврамов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2015. – Т.15. – №4. – С. 50–57.

89. Соколов, А. К. Трехмерное геометрическое моделирование сложных тел на примере построения человеческого зуба на основе его радиовизиографических изображений / А. К. Соколов, Н. И. Симакина, В. Н. Терпугов // Вестник молодых ученых ПГНИУ. Сб. науч. тр. / отв. редактор Бячкова В. А.; Перм. гос. нац. иссл. ун-т. – Пермь. – 2013. – Вып.3. – С. 131–139.

90. Соловцова, Л. А. Методика компьютерного исследования жесткости спице-стержневых фиксирующих устройств // Российский журнал биомеханики. – 2010. – Т.14. – №1(47). – С. 17–25.

91. Справочник по композиционным материалам. Под редакцией Дж. Лю-

бина. М.: Машиностроение, 1988.

92. Строение зуба [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://crest-3d.ru/2010/10/stroenie-zuba/ (дата доступа: 2017).

93. Тимошенко, С. П. Теория упругости. / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Машиностроение, 1975. – 500 с.

94. Титов, И. О. Выделение контуров изображения движущегося объекта / И. О. Титов, Г. М. Емельянов // Вестник Новгородского Государственного Университета. – 2010. – №55. – С. 27–31.

95. Троицкий, И. Н. Статистическая теория томографии. – М.: Радио и связь, 1989. – 240 с.

96. Труфанов, Г. Е. Лучевая диагностика: учебник / Г. Е. Труфанов и др.; под ред. Труфанова Г. Е. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2015. – 496 с.

97. Тяжелов, А. А. Математическая модель таза для расчета его напряженно-деформированного состояния / А. А. Тяжелов, В. А. Филиппенко, А. В. Яресько, С. Е. Бондаренко // Ортопедия, травматология и протезирование. – 2015. – №1. – С. 25–33.

98. Утенькин, А. А. Биомеханические свойства компактного вещества кости / А. А. Утенькин, А. А. Свешникова // Архив анатомии, гистологии и эмбриологии. – 1971. – №10. – С.45–50.

99. Утенькин, А. А. Исследование механических свойств компактного вещества кости как анизотропного материала. Дис. на соиск. учен. степ. канд. техн. наук. Рига, 1974. – 199 с.

100. Утенькин, А. А. Об анизотропии компактного вещества кости/ А. А. Утенькин, Е. К. Ашкенази // Механика полимеров. – 1972. – № 4. – С. 711–716.

101. Утенькин, А. А. Упругие свойства костной компактной ткани как анизотропного материала / А. А. Утенькин, А. А. Свешникова // Проблемы прочности. – 1971. – Т.3. – №3. – С.40–45.

102. Фокс, А. Вычислительная геометрия применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 304 с., ил.

103. Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – Издательство «Мир», Москва,

1980. – 279 с.

104. Фурман, Я. А. Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений / Я. А. Фурман, А. Н. Юрьев, В. В. Яншин. Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1992. – 248 с.

105. Хермен, Г. Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии: пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 352 с.

106. Хофер, М. Компьютерная томография. Базовое руководство. Медицинская Литература, 2011. – 224 с.

107. Челнокова, Н. О. Компьютерное 3D пространственно-ориентированное моделирование гемодинамики венечных артерий при их атеросклеротическом поражении и реконструктивных вмешательствах / Н. О. Челнокова, Н. В. Островский, А. А. Голядкина и др. // Вопросы реконструктивной и пластической хирургии. – 2015. – №1(52). – С. 64–74.

108. Чигарев, А. В. Моделирование управляемого движения двуногого антропоморфного механизма / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Российский журнал биомеханики. – 2011. – Т.15. – №1(51). – С. 74–88.

109. Чуйко, А. Н. О биомеханике нижней челюсти человека при протезировании несъемными протезами / А. Н. Чуйко, В. О. Олейник // Российский журнал биомеханики. – 2009. – Т.13. – №1(43). – С. 79–94.

110. Чуйко, А. Н. Определение основных механических характеристик костных тканей на базе данных компьютерной томографии / А. Н. Чуйко, И. А. Шинчуковский // Современная стоматология (Украина). – 2011. – №1, – С. 90–98.

111. Чумаченко, Е. Н. Моделирование геометрической модели моляра верхней челюсти с различными видами реставраций / Е. Н. Чумаченко, Е. Е. Олесов, С. А. Бобер и др. // Российский стоматологический журнал. – 2014. – №6. – С. 36–38.

112. Штанчаев, Х. Б. Кривые Безье в задачах распознавания образов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mir-nauki.com/PDF/30TMN215.pdf (дата доступна: 2018).

113. Abdel-Wahab, A. Micro-scale modelling of bovine cortical bone fracture: Analysis of crack propagation and microstructure using X-FEM / A. Abdel-Wahab, R.

Maligno, V. Silberschmidt // Computational Materials Science. – 2012. – Vol. 52. – P. 128–135.

114. Abdel-Wahab, A. Modelling fracture processes in bones / A. Abdel-Wahab, S. Li and V. Silberschmidt // Computational Modelling of Biomechanics and Biotribology in the Musculoskeletal System. – 2014. – P. 268–302.

115. Andresa, C. O. Evaluation of mechanical properties of Z250 composite resin light-cured by different methods / C. O. Andresa, C. S. Mário Alexandre, C. S. Lourenço and other //Journal of Applied Oral Science. J. Appl. OralSci. – 2005. – Vol.13. – №4 Bauru Oct. / Dec.

116. Boccaccio, A. Finite element modelling of bone tissue scaffolds / A. Boccaccio, A. Messina, C. Pappalettere, M. Scaraggi // Computational Modelling of Biomechanics and Biotribology in the Musculoskeletal System. – 2014. – P. 485–511.

117. Bribiesca, E. A new chain code, Pattern Recognition, 1999. – Vol. 32. – P. 235–251.

118. Burger, W. J Principles of Digital Image Processing. Fundamental Techniques / W. Burger, M. J. Burge. Springer-Verlag London, – 2009. – 272 p.

119. Burstein, A. H. The ultimate properties of bone tissue. The effect of yielding./ A. H. Burstein, J. D. Currey, V. H. Frankel, D.T. Reilly. – J. Biomech, 1972. – Vol. 5. – №1. – P. 35–44.

120. Canny, J. F. A computational approach to edge detection. IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., 1986. – Vol. PAMI-8. – №6. – P. 679–697.

121. Canny, J. F. Finding edges and lines in images. Master's thesis. MIT, Cambridge, USA, 1983. – 145 p.

122. Chris Solomon Fundamentals of Digital Image Processing: Practical Approach with Examples in Matlab / Chris Solomon, Toby Breckon. Wiley, 2011. – 344 p.

123. Currey, J. D. The adaptation of bone to stress. – J. Theor. Biol. – 1968, – Vol. 20. – P. 91–106.

124. Dempster, W.T. Compact bone as a non-isotropic material / W.T. Dempster, R. T. Liddiacoat. – Amer. J. Anat., 1952. – Vol. 91. – №3. – P. 331–362.

125. Digital Imaging and Communications in Medicine (DICOM) [Электронный

ресурс]. – Режим доступа: http://medical.nema.org/dicom (дата доступна: 2017).

126. Evan, F. G. Mechanical properties of bone. Springfield (Illinois), C. C. Thomas, 1973. – 322 p.

127. Evans, F. G. Physical and histological differences between human fibular and femoral compact bone / F. G. Evans, M. Lebow // Studies on the anatomy and function of bone and joints. Ed. by F. G. Evant. Berlin, Springer-Verlag. – 1966. – P. 142–155.

128. Evans, F. G. Relation of collagen fiber orientation to some mechanical properties of hunan cortical bone / F. G. Evans, R. Vincentelli. – J. Biomech. – 1969, – Vol. 2. – №1. – P. 63 – 71.

129. Felsberg, M. Computer Analysis of Images and Patterns: 17th International Conference / M. Felsberg, A. Heyden, N. Krüger (ed.). CAIP 2017, Ystad, Sweden, Proceedings. – Springer. – 2017. – T. 10425.

130. Freeman, H. On the encoding of arbitrary geometric configurations, IRE Transactions on Electronic Computers EC. – 1961. – P. 260–268.

131. Garcea, S. C. X-ray computed tomography of polymer composites / S. C. Garcea, Y. Wang, P. J. Withers // Composites Science and Technology. – 2017. – Vol. 156. – P. 305–319.

132. Graphics and Media Lab [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://graphics.cs.msu.ru/ (дата доступа: 2017).

133. Gurjeet, S. Study and Comparison of Various Techniques of Image Edge Detection / S. Gurjeet, S. Harjinder // Gurjeet Singh et al Int. Journal of Engineering Research and Applications. – 2014. – Vol.4. – Issue 3 (Version 1). – P. 908–912.

134. Ikeda, M. Development of an advanced finite element model for a pedestrian pelvis / M. Ikeda, S. Suzuki, Y. Gunji // Proceedings of the 22nd International Technical Conference on the Enhanced Safety of Vehicles (ESV). Washington, DC. – 2011. – Vol.1. Access to materials: https://www-esv.nhtsa.dot.gov/Proceedings/22/files/22ESV-000009.pdf.

135. Kanan, C. Color-to-grayscale: does the method matter in image recognition? / C. Kanan, G. W. Cottrell // PloS ONE. – 2012. – Vol.7. – №1. – P. e29740.

136. Kokaram, A. C. Motion Picture Restoration: Digital Algorithms for Artefact

Suppression in Degraded Motion Picture Film and Video // Springer Science & Business Media, 2013. – 334 p.

137. Kugel, G. Direct and indirect adhesive restorative materials: a review // American journal of dentistry. – 2000. – Vol.13. – P. 35–40.

138. Kusy, P. R. Analysis of moment/force ratios in the mechanics of tooth movement / P. R. Kusy, J. F. Camilla Tulloch // American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics. – 1986. – №90. – P. 127–131.

139. Larson, N. M. Insights from in-situ X-ray computed tomography during axial impregnation of unidirectional fiber beds/ N. M. Larson, W. Z. Frank // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2018. – Vol.107. – P. 124–134.

140. Li, Z. Biomechanical response of the pubic symphysis in lateral pelvic impacts: a finite element study / Z. Li, J. E. Kim, J. S. Davidson and other // Journal of Biomechanics. – 2007. – Vol.40(12). – P. 2758–2766.

141. Lim, W. H. Color to grayscale conversion based on neighborhood pixels effect approach for digital image / W. H. Lim, N. A. M. Isa // ELECO 2011 7th International Conference on Electrical and Electronics Engineering, Bursa, Turkey. – 2011. – P. 1–4.

142. Liu, R. Identification of crack progression in filled rubber by micro X-ray CT-scan / R. Liu, E. Sancaktar // International Journal of Fatigue. – 2018. – Vol.111. – P. 144–150.

143. Liu, X. S. et al. Accuracy of high-resolution in vivo micro magnetic resonance imaging for measurements of microstructural and mechanical properties of human distal tibial bone // Journal of Bone and Mineral Research. – 2010. – Vol.25. – №9. – P. 2039–2050.

144. Mow, C. Basic Orthopedic Biomechanics / C. Mow, W. C. Hayes. New York, 1991. – 464 p.

145. MSC Nastran 2018 Implicit Nonlinear (SOL 600) User's Guide. Copyright 2018 MSC Software Corporation.

146. MSC Nastran 2018: Implicit Nonlinear (SOL 400) Demonstration Problems Manual. Copyright 2018 MSC Software Corporation.

147. MSC Nastran SOL 400, SOL 600, SOL 700. [Электронный ресурс]. – Ре-

жим доступа: http://www.mscsoftware.ru/products/msc-nastran-sol (дата доступа: 2018).

148. Nguyen, Nghi Q. Micro-CT measurement of fibre misalignment: Application to carbon/epoxy laminates manufactured in autoclave and by vacuum assisted resin transfer moulding / Nguyen Nghi Q., Mahoor Mehdikhani, Ilya Straumit, Larissa Gorbatikh, Larry Lessard, Stepan V. Lomov //Composites Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2018. – Vol.104. – P. 14–23.

149. Nuray, A. Flow, strength, stiffness and radiopacity of flowable resin composites / A. Nuray, E. Tam Laura, McComb Dorothy // Journal-Canadian Dental Association. – 2003. – №69(8). – P. 516-521.

150. PAT312, Section 11 - Finite element meshing. December 2006. MSC Software Corporation.

151. PATRAN 2017 doc finite element modeling. MSC Software Corporation.

152. PATRAN 2017 doc pcl customization. MSC Software Corporation.

153. PATRAN 2017 doc pcl reference example. MSC Software Corporation.

154. PATRAN 2017 doc pcl reference. MSC Software Corporation.

155. Pereira, R.A. Comparative analysis of the shrinkage stress of composite resins / R. A. Pereira, P. A. Araújo, J. C. Casteñeda-Espinosa, R. F. L. Mondelli // Journal of Applied Oral Science. – 2008. – №16 (1). – P. 30–34.

156. Perrier, A. Quantitative analysis by micro-CT of damage during tensile test in a woven hemp/epoxy composite after water ageing / A. Perrier, F. Touchard, L. Chocinski-Arnault, D. Mellier // Composites: Part A - Applied Science and Manufacturing. – 2017. – Vol.102. – P. 18–27.

157. Radiography & CT [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.gemeasurement.com/CT (дата доступа: 2018).

158. Raman, M. Study and Comparison of Various Image Edge Detection Techniques / M. Raman, A. Himanshu // International Journal of Image Processing (IJIP). – 2009. – Vol.3: Issue (1). – P. 1–11.

159. Rapperport, D. J. Contact Finite Element Stress Analysis of Porous Ingrowth Acetabular Cup Implantation, Ingrowth, and Loosening / D. J. Rapperport, D. R. Carter,

D. J. Schurman // J. Orthopaedic Research. – 1987. – Vol.5. – P. 548–561.

160. Reilly, D. T. The elastic modulus for bone. / D. T. Reilly, A. H. Burstein, V. H. Frankel // J. Biomech. – 1974. – Vol.7. – №3. – P. 271–275.

161. Sencu, R. M. Generation of Micro-scale Finite Element Models from Synchrotron X-ray CT Images for Multidirectional Carbon Fibre Reinforced Composites / R. M. Sencu, Z. Yang, Y. Wang and other // Composites: Part A (2016), doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesa.2016.09.010.

162. Sidorov, D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control. Singapore: World Scientific Pte Ltd, 2015. – 260 p.

163. Ural, A. Multiscale modeling of bone fracture using cohesive finite elements / A. Ural, S. Mischinski Multiscale // Engineering Fracture Mechanics. – 2013. – Vol. 103. – P. 141–152.

164. Vasu, R. Stress distributions in the acetabular region-i. before and after total joint replacement / R. Vasu, D. R. Carter, W. H. Harris // J. Biomechanics. – 1982. – Vol.15. –№3. – P. 155–164.

165. Wakefield, C. Advances in restorative materials / C. Wakefield, K. Kofford // Dent. Clin. North Am. – 2001. – Vol.45. – P. 7–29.

166. Zaytsev, D. Correction of some mechanical characteristics of human dentin under compression considering the shape effect // Materials Science and Engineering C. – 2015. – Vol.49. – P. 101–105.

167. Zaytsev, D. Mechanical properties of human enamel under compression: On the feature of calculations // Materials Science and Engineering C. – 2016. – Vol. 62. – P. 518–523.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А. Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2016615938

Автоматизации обработки изображений сканирования твердых деформируемых тел для определения изменения модуля упругости и использования при построении их конечно-элементной модели.

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский национальный исследовательский технический университет» (RU)*

Авторы: *Зыонг Ван Лам (RU), Пыхалов Анатолий Александрович (RU), Зотов Игорь Николаевич (RU)*

Заявка № 2016613116
Дата поступления 05 апреля 2016 г.
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ *02 июня 2016 г.*

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности Г.П. Ивлиев



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017661241

Математическое моделирование для автоматизации обработки результатов сканирования деформируемых твердых тел сложной геометрической формы с неоднородными механическими характеристиками для построения их конечно-элементных моделей

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет путей сообщения» (ФГБОУ ВО ИрГУПС) (RU)*

Авторы: *Пыхалов Анатолий Александрович (RU), Зыонг Ван Лам (RU)*

Заявка № 2017616182
Дата поступления 27 июня 2017 г.
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ *06 октября 2017 г.*

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности Г.П. Ивлиев



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018615239

Математическое моделирование обработки результатов сканирования деформируемых твердых тел для построения геометрии их конечно-элементных моделей

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет путей сообщения» (ФГБОУ ВО ИрГУПС) (RU)*

Авторы: *Пыхалов Анатолий Александрович (RU), Зыонг Ван Лам (VN)*

Заявка № 2018612339
Дата поступления 14 марта 2018 г.
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ *03 мая 2018 г.*

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности Г.П. Ивлиев

Приложение Б. Акт о внедрении результатов

АКТ
о внедрении результатов научной работы
по теме «Математическое конечно-элементное моделирование деформируемых твердых тел на основе сканирования»

Авторы работы: Пыхалов А.А. (ИрГУПС), Зыонг Ван Лам (ИРНИТУ), Пашков В.П. (ИРНИТУ), Белозерцева О.П. (ИГМУ).

Работа выполнена в период с 20.01.2015 по 20.04.2018. Авторами разработаны новые математические методы моделирования, вычислительные алгоритмы и комплекс проблемно-ориентированных программ, предназначенные для интерпретации результатов сканирования компьютерным томографом неоднородных деформируемых твердых тел с целью построения их конечно-элементных (КЭ) моделей, имеющих индивидуальную геометрию (внешних контуров и внутренних структур) и реальное объемное поле изменения механических характеристик материала. С использованием полученной таким образом КЭ модели проведен анализ напряженно-деформированного состояния реальных деформируемых твердых тел.

Представленная технология построена на использовании результатов сканирования компьютерным томографом, в виде растровых (цифровых) изображений, а также результатов натурных механических испытаний стандартных образцов. Она может быть применена для *любых физических принципов сканирования*, таких как рентгеновский, ультразвуковой, лазерный и др. и для *любых типов материалов*, когда полученная в результате сканирования информация сформирована в виде цифрового (растрового) изображения.

В качестве примера исследуемых объектов, использованы фрагмент бедренной кости и зубы человека. В результате исследования получены их КЭ модели с учетом индивидуальности геометрии и неоднородности механических характеристик материала по всему объему. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния, в частности с решением контактной задачи. Результаты анализа показали реалистичность КЭ модели относительно представленных объектов математического моделирования.

Главный врач стоматологической клиники «32 белых»

664003, г. Иркутск, ул. Советская 122
Тел. 41-68-41.

УТВЕРЖДАЮ
И. о. директора института
«Архитектура, строительство и дизайн»

Пешков В. В.
«15» 05 2018

АКТ
о внедрении программных продуктов

Комиссия в составе: Дмитриева Т. Л., д.т.н., доцент, зав. кафедрой «Теоретическая механика и сопротивление материалов» ИРНИТУ (председатель); Лапшин В. Л., д.т.н., профессор, профессор кафедры «Теоретическая механика и сопротивление материалов» ИРНИТУ; Пыхалов А. А., д.т.н., профессор, директор учебного центра «Компьютерные технологии инженерного анализа» ИрГУПС, составила настоящий акт о том, что программные продукты:

1. «Автоматизации обработки изображений сканирования твердых деформируемых тел для определения изменения модуля упругости и использования при построении их конечно-элементной модели» (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016615938 от 02/06/2016);

2. «Математическое моделирование для автоматизации обработки результатов сканирования деформируемых твердых тел сложной геометрической формы с неоднородными механическими характеристиками для построения их конечно-элементных моделей» (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017661241 от 06/10/2017);

3. «Математическое моделирование обработки результатов сканирования деформируемых твердых тел для построения геометрии их конечно-элементных моделей» (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018615239 от 03/05/2018),

авторами которых являются Зыонг Ван Лам и Пыхалов А.А., внедрены в учебный процесс и использованы на кафедре «Теоретическая механика и сопротивление материалов» в учебных курсах, связанных с изучением дисциплин «Сопротивление материалов» и «Строительная механика».

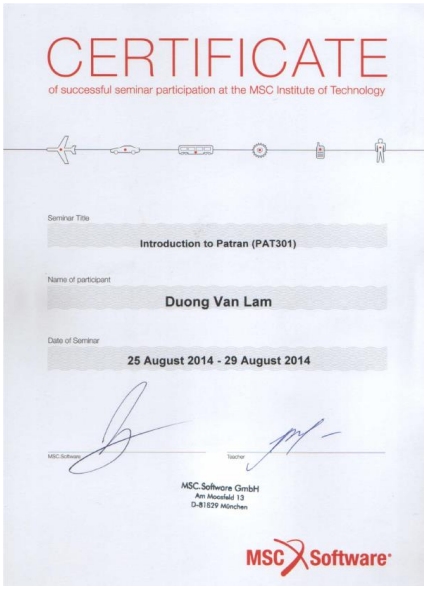
Использование представленных программных продуктов для обучения студентов, магистрантов и аспирантов технических специальностей позволяет, на основе сканирования, построить индивидуальную геометрию реальных деформируемых твердых тел и определить в них изменение механических характеристик материала. С дальнейшим использованием этих данных при построении и анализе напряженно-деформированного состояния конечно-элементных моделей.

Председатель комиссии Дмитриева Т. Л.

Члены комиссии Лапшин В. Л.

Пыхалов А. А.

Приложение В. Сертификаты



CERTIFICATE

of successful seminar participation at the MSC Institute of Technology

Seminar Title

Introduction to Patran (PAT301)

Name of participant

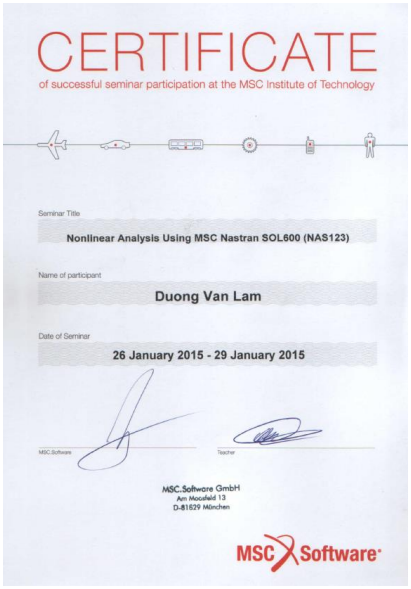
Duong Van Lam

Date of Seminar

25 August 2014 - 29 August 2014

MSC.Software GmbH
Am Moosfeld 13
D-81829 München

MSC Software



CERTIFICATE

of successful seminar participation at the MSC Institute of Technology

Seminar Title

Nonlinear Analysis Using MSC Nastran SOL600 (NAS123)

Name of participant

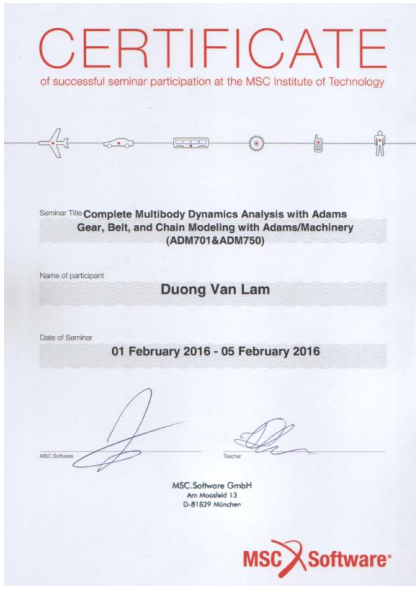
Duong Van Lam

Date of Seminar

26 January 2015 - 29 January 2015

MSC.Software GmbH
Am Moosfeld 13
D-81829 München

MSC Software



CERTIFICATE

of successful seminar participation at the MSC Institute of Technology

Seminar Title

Complete Multibody Dynamics Analysis with Adams
Gear, Belt, and Chain Modeling with Adams/Machinery
(ADM701&ADM750)

Name of participant

Duong Van Lam

Date of Seminar

01 February 2016 - 05 February 2016

MSC.Software GmbH
Am Moosfeld 13
D-81829 München

MSC Software



CERTIFICATE

of successful seminar participation at the MSC Institute of Technology

Seminar Title

Linear Static Analysis Using MSC Nastran and Patran (NAS120)
& CAE-Modeling and Simulation Using MSC Apex (APX101)

Name of participant

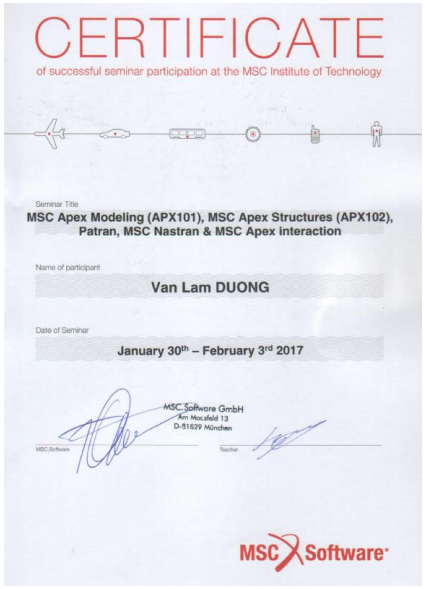
Duong Van Lam

Date of Seminar

6th-10th June 2016

MSC.Software GmbH
Am Moosfeld 13
D-81829 München

MSC Software



CERTIFICATE

of successful seminar participation at the MSC Institute of Technology

Seminar Title

MSC Apex Modeling (APX101), MSC Apex Structures (APX102),
Patran, MSC Nastran & MSC Apex interaction

Name of participant

Van Lam DUONG

Date of Seminar

January 30th – February 3rd 2017

MSC.Software GmbH
Am Moosfeld 13
D-81829 München

MSC Software