

Иркутская государственная сельскохозяйственная академия

На правах рукописи

**До Мань Тунг**

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАССТРОЙКИ ПАРАМЕТРОВ  
НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАБОЧИХ КОЛЕС  
ТУРБОМАШИН**

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата  
технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук,  
профессор О.В. Репецкий

Иркутск – 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. ВЛИЯНИЯ РАССТРОЙКИ ПАРАМЕТРОВ НА ДИНАМИКУ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОМАШИН.....	15
1.1. Проблема колебаний в газотурбинных двигателях.....	15
1.1.1. Колебание отдельных лопаток .....	16
1.1.2. Колебания настроенных рабочих колес .....	17
1.1.3. Колебания расстроенных рабочих колес.....	19
1.1.4. Влияние вращения на колебания рабочих колес турбомашин .....	19
1.2. Обзор влияния расстройки параметров на динамические характеристики рабочих колес турбомашин.....	20
1.3. Методы моделирования рабочих колес турбомашин с расстройкой ...	27
1.3.1. Пружинно-массово-демпферная модель .....	28
1.3.2. Конечноэлементная модель .....	29
1.3.3. Статистическая модель.....	33
1.4. Анализ влияния расстройки параметров на долговечность рабочих колес турбомашин.....	33
1.5. Расчетно-экспериментальные методы оценки влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин.....	36
1.6. Выводы.....	41
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССТРОЙКИ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОМАШИН. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ДЕТАЛЕЙ ТУРБОМАШИН .....	43
2.1. Анализ свойства циклической симметрии .....	43
2.1.1. Анализ свойства циклической симметрии с использованием отдельных подструктур .....	43
2.1.2. Анализ свойства циклической симметрии с использованием целых подструктур .....	48
2.2. Разработка модели возбуждающих газодинамических нагрузок .....	50
2.3. Метод конечных элементов в динамике деформируемых тел .....	53

2.3.1. Основные алгоритмы метода конечных элементов .....	53
2.3.2. Применяемые конечные элементы.....	56
2.4. Применение метода конечных элементов в анализе прочности деталей турбомашин .....	66
2.4.1. Задачи статического напряжённо-деформированного состояния деталей турбомашин .....	66
2.4.2. Определение характеристик колебаний деталей турбомашин .....	68
2.5. Программная реализация метода конечных элементов при исследовании влияния расстройки параметров на характеристики колебания рабочих колес турбомашин .....	71
2.6. Моделирование расстройки рабочих колес турбомашин .....	74
2.6.1. Реализация расстройки .....	75
2.6.2. Виды расстройки параметров рабочих колес .....	76
2.6.3. Варианты расстройки лопаток.....	80
2.7. Выводы.....	81
<b>ГЛАВА 3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОМАШИН .....</b>	<b>83</b>
3.1. Исследование собственных колебаний кольцевых пластин с использованием кольцевых конечных элементов .....	83
3.2. Метод циклической симметрии (МЦС) для исследования собственных колебаний рабочих колес .....	88
3.3. Метод моделирования рабочих колес на основе пружинно-массовой модели для исследования их вибрационных характеристик.....	95
3.3.1 Математическое моделирование рабочего колеса на основе пружинно-массовой модели.....	96
3.3.2. Определение эквивалентных параметров модели.....	98
3.3.3. Результаты исследования .....	101
3.4 Исследование влияния вращения на собственные колебания рабочих колес турбомашин .....	103

3.5. Программа для исследования собственных колебаний рабочих колес с учетом влияния вращения (PISVRBD) .....	112
3.6. Выводы.....	114
ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ РАССТРОЙКИ ПАРАМЕТРОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ РАБОЧИХ КОЛЕС .....	116
4.1. Исследование колебаний рабочих колес с расстройкой на основе пружино-массовой модели.....	116
4.1.1. Моделирование расстройки рабочих колес .....	116
4.1.2. Математическое моделирование рабочих колес с расстройкой на базе пружинно-массовой модели .....	117
4.1.3. Исследование влияния расстройки на характеристики колебаний рабочих колес на основе ПММ.....	118
4.2. Исследование колебаний рабочих колес с расстройкой на основе моделирования уменьшенного порядка.....	121
4.2.1. Метод моделирования уменьшенного порядка .....	121
4.2.2. Математическая модель рабочих колес на основе моделирования уменьшенного порядка .....	123
4.2.3. Исследование колебаний рабочих колес на основе метода моделирования уменьшенного порядка.....	130
4.2.4. Программный комплекс для анализа влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес (PVR0MBD).....	137
4.3. Экспериментальное и численное исследование для оценки влияния расстройки масс лопаток на колебания рабочих колес турбомашин .....	145
4.3.1. Оборудование и подготовка эксперимента .....	145
4.3.2. Результаты экспериментальных и численных исследований .....	147
4.4. Исследование влияния расстройки на собственные колебания рабочих колес с использованием свойств циклической симметрии .....	150
4.4.1. Исследование собственных колебаний рабочих колес без расстройки как ЦСС с порядком симметрии $N/2$ .....	151

4.4.2. Исследование собственных колебаний рабочих колес с расстройкой как ЦСС с порядком симметрии $N/2$ .....	153
4.5. Выводы .....	156
ГЛАВА 5. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКОНОВ РАССТРОЙКИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ РЕАЛЬНЫХ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОМАШИН .....	158
5.1. Общая схема анализа влияния расстройки параметров на характеристики колебаний реальных рабочих колес .....	159
5. 2. Результаты исследования .....	161
5.2.1. Расстройки жесткости одной лопатки .....	164
5.2.2. Расстройки жесткости всех лопаток, значения расстройки которых подчиняются закону нормального распределения Гаусса.....	166
5.3. Выводы .....	170
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	172
ЛИТЕРАТУРА .....	175
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	193

## ВВЕДЕНИЕ

Роторы турбомашин часто работают в сложных температурных условиях при больших скоростях вращения. Колебание деталей турбомашин является важным фактором, который значительно влияет на их прочность. Колебания лопаток ротора предлагают две главных проблемы, которые необходимо решить при проектировании роторов. Во-первых, колебания часто вызывают высокое напряжение для вращающихся деталей. Этот фактор снижает их усталостную прочность при эксплуатации. Во-вторых, необходимо обеспечить изгибы лопаток роторов, вызванные колебаниями, чтобы не приводить к контакту с лопатками статора.

При изучении динамики роторов турбомашин, известно, что идеальные роторы являются циклически-симметричными системами. Если предположить, что все секторы рабочего колеса идентичны, то теория циклической симметрии может использоваться для анализа динамики всей конструкции на основе одного типичного сектора. Однако в реальных рабочих колесах при их изготовлении или эксплуатации всегда возникают малые отличия лопаток друг от друга (по массе, геометрии, свойству материала), вызванные технологическими допусками на их изготовлении, неоднородностью материала, разной посадкой в замках, действием различных эксплуатационных факторов. Все малые отличия лопаток называются расстройкой параметров и нарушают циклическую симметрию. Тогда для изучения динамики рабочего колеса с расстройкой, моделирование только одного сектора является недостаточным и нужно моделировать полное рабочее колесо.

Кроме этого, расстройку можно наблюдать в виде резких эффектов, влияющих на характеристики динамики ротора. Она может привести к локализации уровня колебаний ротора. Это явление объясняется тем, что движения колебаний рабочего колеса с расстройкой ограничены в одной или нескольких лопатках. Даже это может привести к ограничению движения колебаний рабочего колеса до маленькой зоны. Также экспериментальные исследования для амплитуды и напряжений рабочих колес с расстройкой показали,

что даже небольшая расстройка лопаток всегда увеличивает максимальную амплитуду колебаний при резонансе. Также она может привести к возникновению резонансных напряжений, которые выше, чем максимальные напряжения настроенной системы на 20% и более. Например, 5% изменения частот консольной лопатки для диска с 92 лопатками турбины с высоким давлением может привести к увеличению отклика одной лопатки до 500%, в сравнении с откликом каждой лопатки настроенного рабочего колеса [145]. Этот высокий отклик приведет к гораздо большему снижению усталостной прочности на одной или нескольких лопатках из-за высокого цикла усталостного нагружения.

Первые исследования задач расстройки лопатки проводились около 40 лет назад и в настоящий момент получены обширные знания о структурной динамике расстроенного рабочего колеса. Эффективные вычислительные методы развиваются, чтобы прогнозировать влияние расстройки на отклик колебаний ротора турбомашин. Эти методы позволяют анализировать большое число рабочих колес со случайной расстройкой, чтобы оценить статистический отклик для проектирования ротора. Однако решение задач расстройки лопатки считается недостаточным, потому что никакие численные методы не обладают сочетанием точности и вычислительной эффективностью, которые обеспечивают надежную оценку чувствительности расстройки на стадии проектирования. Однако на сегодняшний день появилось несколько коммерческих промышленных программ, таких как ANSYS, NASTRAN и др. Но они не всегда позволяют определить динамический отклик при прерывистом, нестационарном действии газовых нагрузок, которые характерны для рабочих колес и их полные конечноэлементные модели часто состоят из многих степеней свободы (миллионов степеней свободы).

Таким образом, разработка и развитие математических моделей, численных методов и программ расчета, которые позволяют точнее определить влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин, а также снижают трудоемкость и затраты времени на электрон-

ных вычислительных машинах (ЭВМ), является актуальной проблемой современности.

**Целью диссертационной работы** является разработка численных методов, эффективных алгоритмов и программного обеспечения для оценки влияния расстройки параметров на динамические характеристики рабочих колес турбомашин с учетом реальных режимов работы на основе метода конечных элементов (МКЭ) и норм для оценки динамических характеристик деталей.

**Для достижения этой цели** необходимо решение следующих задач:

1. Построение основных алгоритмов МКЭ для расчета прочности пластинчато-оболочечных деталей турбомашин. Приведение видов и различных законов расстройки параметров рабочих колес турбомашин при их изготовлении или эксплуатации. Математическое моделирование и определение значений расстройки рабочих колес турбомашин МКЭ. Определение модели возбуждающих газодинамических сил, приближенных к реальным режимам работы двигателей турбомашин.

2. Разработка и развитие численных методов и новых алгоритмов для расчета характеристик колебаний рабочих колес без учета и с учетом влияния вращения.

3. Развитие эффективных методов и разработка методик и новых алгоритмов для математического моделирования рабочих колес турбомашин с расстройкой. Проведение оценки влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес и сравнение результатов расчета с данными эксперимента и данными анализа в программном комплексе ANSYS. Обоснование выбора эффективных численных методов для оценки влияния расстройки параметров на динамические характеристики рабочих колес.

4. Развитие эффективных численных методов и алгоритмов и их реализация в виде программных комплексов для расчета влияния различных законов расстройки на характеристики колебаний реальных рабочих колес турбомашин.



**Методы исследования.** В качестве базового метода исследований выбран метод конечных элементов. В диссертационной работе также использованы теория упругости, теория колебаний, механики деформируемого твердого тела и др. При проведении расчета применены теория матриц, решение алгебраической системы уравнений и численное интегрирование.

При математическом моделировании рабочих колес с расстройкой использованы метод моделирования уменьшенного порядка и метод синтеза форм колебаний.

Для проведения численного эксперимента разработаны программный комплекс PVROMBD, созданные на алгоритмическом языке «MATLAB».

**Научная новизна работы** заключается в следующем:

1. Систематизированы виды и варианты расстройки параметров рабочих колес турбомашин при их изготовлении, сборке и эксплуатации. Разработаны и развиты эффективные алгоритмы МКЭ для определения значений расстройки рабочих колес.

2. Предложен и развит метод математического моделирования рабочих колес турбомашин для расчета их динамических характеристик на основе пружинно-массовой модели (ПММ). Разработан эффективный численный метод для определения эквивалентных физических величин механической системы, таких как масса, жесткость, коэффициент демпфирования и др.

3. Предложено математическое моделирование и развиты численные методы для анализа вибрационных характеристик рабочих колес турбомашин с расстройкой параметров на основе метода моделирования уменьшенного порядка (МУП) и МКЭ. Разработан алгоритм и создано программное обеспечение для оценки влияния расстройки лопаток на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин.

4. Выполнены комплексные исследования для оценки влияния различных законов расстройки параметров на свободные и вынужденные колебания реальных рабочих колес турбомашин с применением математического моделирования и вычислительного эксперимента. Выявлены зоны частот, в кото-

рых формы собственных и вынужденных колебаний рабочих колес даже с небольшой расстройкой жесткости лопаток сильно изменяются как качественно, так и количественно.

### **Научные положения, выносимые на защиту**

1. Математические методы и алгоритмы для моделирования лопатки с расстройкой по массе, материалу и геометрии.

2. Программный комплекс PVROMBD на основе МУП и МКЭ, позволяющий определять характеристики колебаний рабочих колес турбомашин при снижении размерности задачи до анализа только одного сектора и существенном сокращении временных и материальных затрат в расчетах.

3. Результаты численного анализа колебаний реального рабочего колеса турбомшины с расстройкой жесткости одной лопатки и расстройкой жесткости всех лопаток, значения которых изменяются по закону нормального распределения Гаусса.

### **Практическая значимость работы.**

1. Исследовано влияние различных законов распределения расстройки по лопаткам рабочего колеса и выявлены качественные и количественные факторы влияния расстройки на свободные и вынужденные колебания данных конструкций.

2. Создано математическое и программное обеспечение для исследования характеристик колебаний рабочих колес турбомашин без расстройки и с расстройкой параметров, которые могут применяться на стадиях проектирования, сборки и эксплуатации для большинства циклически симметричных конструкций на предприятиях авиационного, космического, транспортного, энергетического, химического и нефтяного машиностроения.

3. Выявлены поворотные зоны частот, в которых характеристики колебаний рабочих колес даже с небольшой расстройкой жесткости лопаток сильно изменяются как качественно, так и количественно.

Результаты, полученные в работе, использовались при выполнении НИР и в учебном процессе кафедры «Автоматизация производственных про-

цессов» в Иркутском государственном университете путей сообщения, г. Иркутск, а также в учебном процессе кафедры «Информатика и математическое моделирование» Иркутской государственной сельскохозяйственной академии, г. Иркутск.

**Достоверность результатов.** Достоверность полученных численных результатов подтверждена данными эксперимента и результатами расчетов в программных комплексах ANSYS, VLADIS+.

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на всероссийских научно-практических и международных конференциях, таких как «Авиамашиностроение и транспорт Сибири» (ИрГТУ, Иркутск, 2013 и 2014); «Научные исследования и разработки к внедрению в АПК» (ИрГСХА, Иркутск, 2013); «Современные проблемы и перспективы развития АПК» (ИрГСХА, Иркутск, 2014); «Научная инициатива иностранных студентов и аспирантов российских вузов» (ТПУ, Томск, 2014).

Диссертация прошла апробацию на конференциях и семинарах кафедры «Информатика и кибернетика» Байкальского государственного университета экономики и права; кафедры «Информатика и математическое моделирование» Иркутской государственной сельскохозяйственной академии.

Автор получил диплом I степени в VII Всероссийской научно-практической конференции «Научная инициатива иностранных студентов и аспирантов российских вузов» (Томск, 2014).

**Сведения о публикациях.** Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 16 печатных работах, в том числе в 8-ми публикациях в изданиях из списка ВАК, 2-х свидетельствах о государственной регистрации программ для ЭВМ.

**Структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложения.

**Во введении** обоснована актуальность темы исследования, определены объект и предмет исследования, цели исследования, задачи и методы их реше-

ния, приведены основные положения, выносимые на защиту, краткое содержание диссертации по главам.

**В первой главе** представлены проблема колебаний деталей турбомашин и влияние расстройки параметров и вращения на колебания рабочих колес турбомашин. Приведены основные результаты исследований эффекта расстройки параметров на динамические характеристики рабочих колес и методы моделирования рабочих колес с расстройкой, которые проводились в мире (Иванов В.П. [20], Ewins D.J. [91], Whitehead D.S. [173], Mignolet [153], Ottarsson [143], Kruse [119, 120], Bladh [71, 72, 73], Wei и Pierre [169, 170], Репецкий О.В., Рыжиков И.Н. [45] и др.). Выполнен обзор схем для оценки влияния расстройки на долговечность рабочих колес турбомашин. В первой главе представлены расчетно-экспериментальные методы, такие как метод экспериментальной оценки «Монте-Карло» для оценки влияния расстройки параметров на динамические характеристики рабочих колес турбомашин.

**Во второй главе** представлены отношения механических величин, таких как перемещение, сила и т.д., в физических координатах для полной системы и в циклических координатах для одного базового сектора (анализ циклической симметрии). Вторая глава посвящена математическому моделированию возбуждающих газодинамических сил, приближённых к реальным режимам работы двигателей турбомашин, чтобы увеличить точность при анализе динамики деталей турбомашин. Также эта глава содержит описание сущности, вариантов применений МКЭ в технике, основных принципов МКЭ, основных алгоритмов при реализации МКЭ и виды конечных элементов для расчета прочности пластинчато-оболочечных деталей турбомашин. Приведены основные алгоритмы МКЭ для решения задач статического напряжённо-деформированного состояния и определения характеристик колебаний деталей турбомашин.

В этой главе приведены понятия явления расстройки параметров и основные алгоритмы МКЭ для определения значений расстройки лопаток рабочих колёс турбомашин. Также представлены виды расстройки и различные

законы расстройки параметров, которые часто возникают при изготовлении и эксплуатации рабочих колёс турбомашин. Кроме этого, разработаны общие схемы программы для исследования влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колёс турбомашин. В программе приведены основные уравнения, в которых моделируется расстройка при расчете. Это является основой для выбора подхода к анализу влияния расстройки на динамические характеристики рабочих колёс на основе МКЭ.

**В третьей главе** представлены математическое моделирование и решение задачи исследования собственных колебаний кольцевых пластин с использованием кольцевых конечных элементов. Приведен метод циклической симметрии для исследования собственных колебаний циклически-симметрических систем, таких как рабочие колёса турбомашин без расстройки на основе одного типичного сектора с помощью МКЭ. Также представлено математическое моделирование ЦСС на основе пружинно-массовой модели (ПММ) в том, что приведен эффективный метод для определения эквивалентных физических величин системы (масса, жесткость, коэффициент демпфирования). Эти методы обеспечивают сходимость решения и снижают трудоемкость и численные затраты времени на ЭВМ.

Кроме этого, разработан и программно реализован блок программы PISVRBD для оценки влияния вращения на характеристики собственных колебаний рабочих колёс турбомашин МКЭ.

**В четвёртой главе** приведены математическое моделирование и решение задач при анализе характеристик колебаний рабочих колёс турбомашин с расстройкой параметров на основе ПММ. Также представлен способ МУП для исследования характеристик колебаний рабочих колёс турбомашин без расстройки и с расстройкой жесткости лопаток. В этом способе используется метод синтеза форм колебаний, который позволяет легко вносить расстройку жесткости лопатки в расчете. При использовании МУП исходные данные и математическое моделирование рабочих колёс с расстройкой строятся из одного сектора, чтобы снизить используемый объем памяти компьютера и вы-

числительные затраты. Также создан программный комплекс PVROMBD для исследования влияния расстройки параметров на колебания рабочих колес турбомашин на основе МКЭ и МУП. Результаты расчета МУП хорошо согласуются с данными эксперимента и данными в программном комплексе ANSYS. В этой главе даны поворотные зоны частот, в которых перемещения лопаток по Евклидовой норме для собственных вынужденных колебаний рабочих колес даже с маленькой расстройкой жесткости сильно изменяются.

Кроме этого, в четвертой главе приведен метод для анализа влияния расстройки геометрии лопаток на характеристики собственных колебаний рабочих колес с использованием свойств циклической симметрии. Также выполнен расчет влияния расстройки толщины лопаток и диска на спектр собственных частот модельного рабочего колеса. Полученные результаты согласуются с результатами, полученными при использовании программного комплекса ANSYS.

**В пятой главе** проводится анализ влияния различных законов распределения расстройки лопаток на характеристики колебаний реальных рабочих колес турбомашин в поворотных зонах частот. Также разработан и предложен комплекс рекомендаций по повышению прочности рабочих колес турбомашин с расстройкой. Эти результаты позволяют решать задачи чувствительности колебаний, оптимизацию и повышения прочности рабочих колес с расстройкой при проектировании новых и эксплуатации старых конструкций турбомашин. Следующим этапом работы станет исследование влияния расстройки на долговечность рабочих колес турбомашин.

# ГЛАВА 1. ВЛИЯНИЯ РАССТРОЙКИ ПАРАМЕТРОВ НА ДИНАМИКУ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОМАШИН

## 1.1. Проблема колебаний в газотурбинных двигателях

Большое внимание уделяется проблеме колебаний лопаток турбомашин, которые могут привести к высокому циклу усталости и отказу. Такие отказы являются внезапными событиями, которые не могут быть легко обнаружены и измерены и поэтому представляют собой угрозу для безопасности и надежности двигателей. Силовые колебания деталей турбомашин обычно делятся на автоколебания и вынужденные колебания.

**Автоколебания.** Характеристики колебаний лопатки увеличиваются с помощью небольших аэродинамических и механических возбуждений, вызванных полем нестационарных давлений на поверхности лопатки. Это поле давления может демпфировать лопатки, так что колебания исчезают, или это может возбуждать лопатки, таким образом, характеристики колебаний быстро увеличиваются. Последний случай, рассматривающийся как автоколебание, является аэроупругой неустойчивостью или флаттером. Флаттер деталей турбомашин имеет большой диапазон, который регулируется скоростью потока, а также собственными частотами и формами ротора [112].

**Вынужденные колебания.** Поля давлений на поверхности лопатки могут возникать также из внешних источников. Такие возбуждения лопатки могут привести к вынужденным и резонансным колебаниям. Самые распространенные проблемы вынужденных колебаний вызваны относительным движением между вращающейся и невращающейся частями, т.е. явлением потока, где частота возбуждения синхронизируется с частотой вращения ротора. Такие колебания могут возникнуть из-за искажения входа потока и взаимодействий лопаток и потока газа сопла.

Резонансные колебания возникают, если частота и форма нестационарного давления совпадает с собственной частотой и формой колебаний турбинного ротора.

Дополнительно изучение колебаний рабочего колеса турбомашин может делиться на три части, именно: колебание отдельных лопаток, колебание диска и колебание рабочего колеса.

### 1.1.1. Колебание отдельных лопаток

Одна лопатка часто рассматривается как консольная балка, жестко заземленная на поверхности между диском и лопаткой. Тем не менее, многоступенчатый компрессор или турбина содержит тысячи лопаток и многие из них показывают различные динамические характеристики. Повреждение только одной из них может привести к повреждению других деталей двигателя и на практике бывает несколько примеров отказов, вызывающих повреждение лопатки двигателя из-за чрезмерных колебаний. Кроме этого, взаимодействие между колебаниями лопаток и потоком газа может вызывать аэродинамическую неустойчивость. Это приводит к флаттеру, который является формой самостоятельного возбужденного колебания. Исследование флаттера лопатки является одним из основных направлений в настоящее время. Таким образом, изучение колебаний лопаток является важным моментом при изучении колебаний диска.

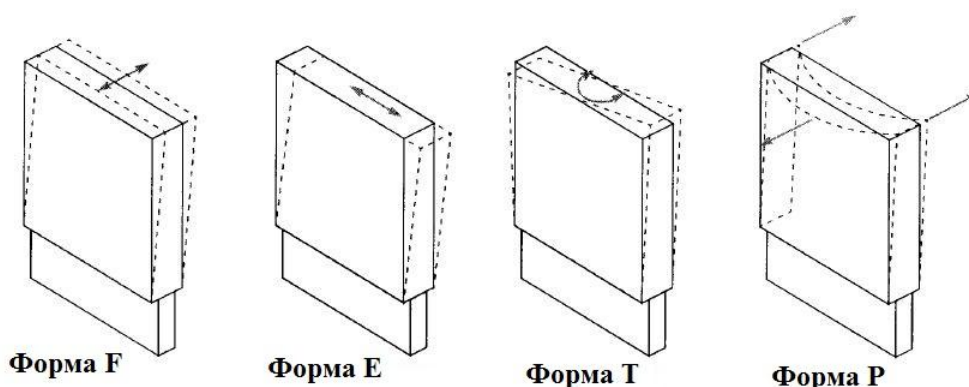


Рис. 1.1. Формы колебаний одиночной лопатки

Основной причиной колебаний лопаток является возбуждение, которое действует на лопатку газовым потоком. Во многих работах показано, что вершина амплитуды резонанса колебаний лопатки, зависящая от числа демпфирования лопатки, происходит, когда частота возбуждения равна собственной частоте этой лопатки. Поэтому для изучения колебаний рабочих



колес необходимо впервые исследовать колебания индивидуальных лопаток. С помощью МКЭ можно вычислить колебания любых лопаток турбомашин. На практике конечноэлементная модель отдельно лопатки может соответствовать реальной лопатке. Однако она также может быть определена с помощью разделения конечноэлементной модели рабочего колеса на диск и лопатку.

Важной характеристикой колебаний рабочего колеса является набор форм отдельной лопатки, определенной фиксированной лопаткой на поверхности между ней и диском. Эти формы определяются как формы консольной балки и похожи на формы прямоугольных консольных пластин [29, 32, 99, 100]. На рис. 1.1 показаны четыре формы колебаний консольной пластины. Это изгибная форма в области минимальной жесткости ( $F$ ), изгибная форма края в области максимальной жесткости ( $E$ ), крутильная форма ( $T$ ) и пластинчатая форма ( $P$ ). Эти формы консольной лопатки являются важными, потому что они соответствуют ее движению в колебаниях рабочих колес для лопатки, доминирующей в системе или при вынужденных колебаниях.

### **1.1.2. Колебания настроенных рабочих колес**

Лопатки связываются механически с диском с помощью гибкого хвостовика. В действительности система «диск-лопатка» обычно колеблется как полная система, а не как отдельные консольные лопатки или просто вращающийся диск. Дополнительно бандажи повышают взаимодействие между лопатками. Настроенные рабочие колеса рассматриваются многими исследователями (Ewins и Cottney, Srinivasan и т.д.). Циклически симметричное рабочее колесо имеет четкие определенные типы форм колебаний. Эти формы могут быть охарактеризованы по количеству диаметральных узловых линий  $n$ , обычно называемых узловыми диаметрами. Максимальное возможное число узловых диаметров равно  $N/2$  для четных  $N$ , и  $(N-1)/2$  для нечетных  $N$ , где  $N$  - количество лопаток системы. Кроме этого, формы колебаний рабочих колес могут быть охарактеризованы по количеству окружных узловых линий  $m$ , обычно называемых узловыми окружностями. Формы колеба-

ний при  $n=0$  и  $n=N/2$  происходят как единственные формы. Для всех остальных узловых диаметров  $n$  формы колебаний являются двукратными, т.е. пары форм колебаний с идентичной частотой [19, 32].

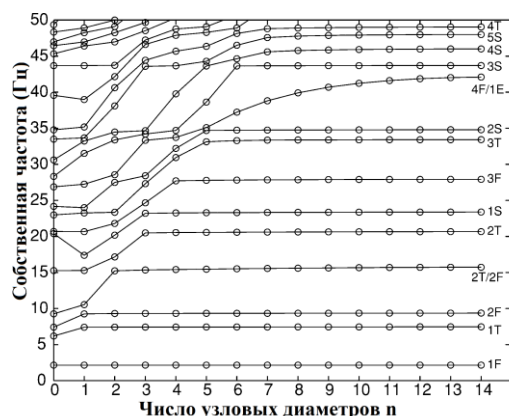
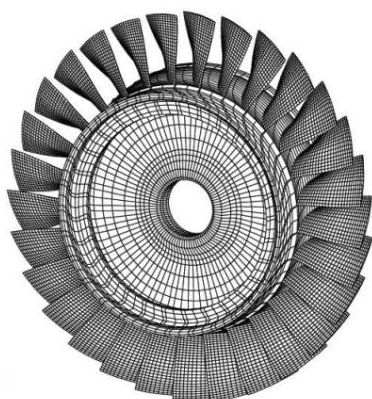


Рис. 1.2. Конечноэлементная модель для промышленных рабочих колес

Рис. 1.3. График собственных частот рабочего колеса

В промышленных газовых турбинах часто используется конечноэлементная модель, показанная на рис. 1.2. Для настроенного случая диск с  $N$  лопатками состоит из  $N$  идентичных секторов. Если применять соответствующие условия фазы на границах с соседними секторами, то модель только из одного сектора является достаточной для прогнозирования колебаний полной циклически симметричных систем (см. 3.2). Собственные частоты определяются МКЭ и изображаются как функция от числа узловых диаметров (рис. 1.3). Линии рисуются, чтобы помочь визуализировать семейство форм доминированной лопатки и доминированного диска.

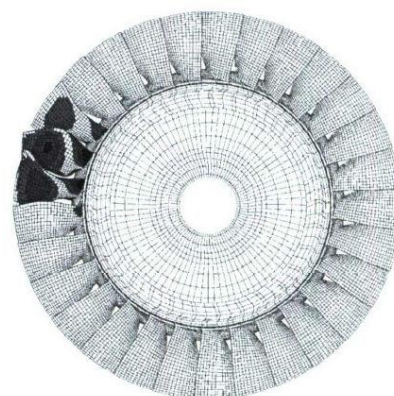
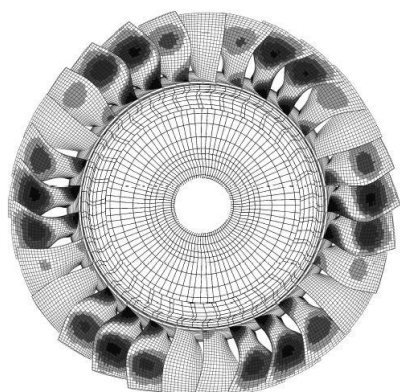


Рис. 1.4. Форма колебаний настроенного рабочего колеса с 3-я узловыми диаметрами

Рис. 1.5. Форма колебаний настроенного рабочего колеса

Форма колебаний для настроенной системы показана на рис. 1.4. Данная форма имеет 3 узловых диаметра.

### 1.1.3. Колебания расстроенных рабочих колес

Как мы говорили в разделе 1.1.2, настроенный случай является идеализацией. На практике всегда имеются маленькие случайные отклонения в свойствах лопаток из-за факторов, таких как допуски изготовления и устойчивость материала и износ при их эксплуатации. Эти отклонения между лопатками называются расстройкой, нарушающей свойство циклической симметрии. Расстройка лопатки может иметь значительное влияние на колебания рабочего колеса. Например, форма колебаний для промышленного рабочего колеса с расстройкой показана на рис. 1.5. Расстроенная форма колебания нечетко выражает число узловых диаметров, но вместо этого имеет несколько гармоник так, что может возбуждаться всеми порядками энергии возбуждения. Кроме того, форма колебаний отражает локализацию колебаний на только нескольких лопатках. Пространственное ограничение колебаний двигателя может привести к значительному увеличению максимального значения амплитуды и напряжения лопаток для вынужденных колебаний расстроенной системы в сравнении с настроенной системой [82, 116, 124, 154].

### 1.1.4. Влияние вращения на колебания рабочих колес турбомашин

Рабочие колеса турбомашин часто работают в условиях высоких скоростей вращения. Это имеет два противодействующих влияния на собственные частоты колебаний. Это «*Stress stiffening*» и «*Spin softening*». «*Stress stiffening*», также называемое геометрической жесткостью или начальным напряжением жесткости, является жесткостью структуры из-за предварительно напряженного состояния, вызванного центробежными и др. силами. Напряжение жесткости относится к потенциальной энергии. «*Spin softening*» происходит, потому что расстояние каждой точки в структуре до центра вращения изменяется с движением колебаний, таким образом, связано с кинетической энергией. «*Stress stiffening*» обычно имеет самый сильный эффект и таким образом, собственные частоты рабочего колеса обычно увеличиваются при увеличении скорости вращения. На рис. 1.6. иллюстрируется влияние «*stress stiffening*» и «*spin softening*» [137].

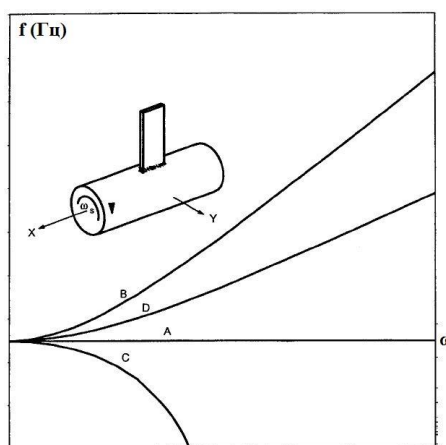


Рис. 1.6. График частот собственных колебаний деталей турбомашин с учетом вращения (А- без эффектов; В- только «*Stress stiffening*»; С- только «*Spin softening*» и D- синтез эффектов)

## 1.2. Обзор влияния расстройки параметров на динамические характеристики рабочих колес турбомашин

Расстройка используется для выражения небольших отклонений свойств структуры, таких как масс и жесткости, между лопатками рабочего колеса. Эффект расстройки может приводить к значительным изменениям в динамических характеристиках лопаток при работе. Причина расстройки параметров рабочих колес может зависеть от нескольких факторов:

- допуски производства размеров лопатки или диска;
- изменение демпфирования между лопатками или на поверхностях раздела бандажа;
- аэродинамические нагрузки распределяются неоднородно на лопатках;
- характеристики материала лопаток неоднородны.

Однако расстройка параметров рабочих колес может классифицироваться по другим законам, например, расстройка одной лопатки; последовательная расстройка или случайная расстройка лопаток или другие особые варианты.

Известно очень много работ, посвященных исследованию влияния расстройки на характеристики колебания и долговечность рабочих колес турбомашин. Авторы доказали, что амплитуды колебаний расстроенных рабочих колес часто выше, чем амплитуды колебаний настроенных рабочих колес. Также сделаны выводы:

- высочайший отклик (динамических перемещений и напряжений) обычно возникает в рабочих колесах с расстройкой;
- распределение динамических характеристик лопаток зависит от расстройки лопаток.

Далее в этом разделе представлены основные результаты эффекта расстройки, которые опубликованы авторами в мире:

Влияние расстройки параметров на собственные колебания показано в работах Иванова В.П. [20], Ewins D.J. [91] и др. Они установили, что в спектре собственных частот циклически-симметричного колеса содержатся двукратные частоты, которые при введении малой расстройки становятся различными. При введении возбуждающих сил в систему, применяя принцип суперпозиции, можно определить амплитуды колебаний лопаток, а затем и напряжения.

Исследование влияния расстройки параметров на характеристики вынужденных колебаний выполнено очень давно. Авторы установили, что максимальная амплитуда лопаток рабочих колес с расстройкой изменяется значительно. Ученые часто исследуют максимальный коэффициент увеличения амплитуды колебаний, потому что такое значение прогнозирует самые худшие случаи работы роторов турбомашин. Первая работа опубликована в 1966 г. автором Whitehead D.S. [174]. В ней получена формула для определения максимального коэффициента увеличения амплитуды колебаний, которая в дальнейшем использовалась разными авторами:

$$k = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{N}), \quad (1.1)$$

где  $N$  - число лопаток.

Выражение (1.1) называется коэффициентом «Whitehead» и является верхней границей коэффициента одной степени свободы для сектора системы, если максимальные формы колебаний расстроенного рабочего колеса нормализуются по отношению вершины колебаний настроенного рабочего колеса. Другие верхние границы коэффициента увеличения амплитуды коле-

баний представлены автором Whitehead в 1976 г. [173] для порядка энергии возбуждения  $n$ , который не равен 0 или  $N/2$ :

$$k = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{N}{2}} \right). \quad (1.2)$$

Однако выражение «Whitehead» (1.2) сокращено в 1998 г. [175]. В 2003 г. Kenyon [115] показал, что формула (1.2) является максимумом коэффициента увеличения амплитуды колебаний только через искаженные формы, и результаты моделирования из предыдущих исследований показали, что коэффициент увеличения амплитуды может быть выше, чем выражение (1.2). Согласно с выражением наибольшего коэффициента увеличения амплитуды, Rivas - Guerra и Mignolet [153] в 2004 г. дали максимум коэффициента увеличения амплитуды одной степени свободы для каждого сектора пружинно-массовой системы и меньше, чем коэффициент «Whitehead». Также Martel [131] в 2009 г. установил, что верхняя граница коэффициента увеличения меньше, чем коэффициент «Whitehead».

Кроме этого, Kenyon [114] показал, что коэффициент увеличения амплитуды может превышать коэффициент «Whitehead», если рабочее колесо возбуждается в поворотных зонах частот, Xiao [167] предлагал, что максимум коэффициента увеличения конечного элемента на основе модели рабочего колеса зависит от проектирования рабочего колеса и является значением между коэффициентом «Whitehead» и  $\sqrt{N}$ . Согласно этому, Boulton L.A. [74], Shiha A. [160], Ottarsson [143], Kruse [119, 120], Bladh [70 - 74] исследовали влияние расстройки жесткости лопаток на характеристики колебаний рабочих колес с использованием моделирования уменьшенного порядка и показали, что характеристики вынужденных колебаний системы зависят от частот возбуждения и порядков энергии возбуждения.

Wagner (1967 г.) развил одну модель для колебаний турбомашин с упругим диском и лопатками, состоящими из грузов и пружин и доказал, что существуют большие изменения в максимальных напряжениях лопатки

[168, 169]. Dye и Henry (1969) дали простую модель для рабочих колес и прогнозировали коэффициент «Whitehead» для наихудшей лопатки [87]. Хотя они не могли найти точное значение как Whitehead, но они показали, что несколько лопаток имеет амплитуду выше, чем другие. Они анализировали и испытали другие варианты распределения расстройки, состоящего из расстройки одной лопатки, альтернативной расстройки, случайной расстройки с нормальным законом распределения Гаусса и синусоидальной расстройки. Они установили, что случай распределения расстройки по закону Гаусса и случай расстройки одной лопатки дают амплитуды больше, чем другие случаи. Также расстройка одной лопатки может привести к увеличению напряжения рабочего колеса до 180%.

Далее Ewins представил несколько работ для анализа колебаний рабочих колес и влияния расстройки параметров на них. Ewins разработал и развил метод для анализа настроенных и расстроенных рабочих колес с помощью связи диска, лопаток и бандажей. В 1969 г. он опубликовал важную работу о характеристиках колебаний настроенных систем и оценил влияние слабого демпфирования (light damping) на увеличение максимального отклика резонанса [90]. Детальное резюме для характеристик колебаний рабочих колес опубликовано в 1973 г. [91]. Он и Rao (1976 г.) исследовали влияние уровней демпфирования на вынужденный отклик (динамические перемещения и напряжения) рабочих колес. В 1980 г. он представил основные методики, использованные для анализа колебаний рабочих колес и влияния расстройки на них. Он использовал теоретический и экспериментальный метод для оценки влияния случайной расстройки на перемещения и динамические напряжения диска с 24 лопатками и диска с 30 лопатками. Результаты двух методов сравнились друг с другом. Максимальное напряжение для рабочего колеса со случайной расстройкой определено и выше на 20%, чем настроенный случай [92]. Также Ewins и Nan (1984 г.) исследовали процесс выбора лопаток при сборке и показали, что для типичного набора рабочего колеса разные сборки дают разные степени влияния расстройки и лопатки с самой

большой расстройкой имеют худшие перемещения и динамические напряжения [93]. Согласно с этим 1986-1988 г. [64] Afolabi исследовал спектр собственного значения расстроенной системы и доказал, что максимальные амплитуды часто происходят для лопатки с самой большой расстройкой.

Bayoumy и Srinivasan (1975 г.) анализировал влияние расстройкой на колебания лопатки с использованием модели осесимметричных пластин для диска и одного груза для лопатки [68]. Они показали, что перенапряжение из-за расстройкой зависит от распределения частот и отклонения частот колебаний консольной лопатки от средня значения. Затем MacBain и Whaley (1984 г.) развили работу Ewins (1969 г.) и получили аналитическое выражение для максимального отклика резонанса [126].

В 1984 г. важные исследования выполнены Bendiksen [69], который использовал метод возмущения для изучения эффектов расстройкой. Этот подход предполагает, что параметры расстройкой, которые являются небольшими факторами для масштабирования сборки матрицы так, что небольшие вариации могут быть добавлены в возмущенные матрицы масс и жесткости. Bendiksen установил, что альтернативная расстроенная система лучше, чем случайная расстроенная система для управления флаттера. Далее в 1986 г. Valero и Bendiksen исследовали влияние расстройкой на поверхность между лопаткой и бандажом с использованием МКЭ [165]. Они установили, что угол поверхности бандажа не влияет на эффект расстройкой, но расстройкой дала формы колебаний с низкими частотами, в которых соединение между лопатками является слабой. Таким образом, они сделали выводы, что локализация динамических характеристик чаще всего происходят в системах, где расстройкой сосредоточена в нескольких элементах. В 1988 г. Wei и Pierre [170-172] использовали анализ возмущения для исследования собственных и вынужденных колебаний расстроенных систем. Они сделали выводы, что степень влияния расстройкой зависит от сцепления между лопатками. Слабое сцепление имеет высокую чувствительность к маленькой расстройкой. В 1994 г. [61] Репецкий О.В. развил этот метод для исследования влияния расстрой-



ки масс на характеристики собственных колебаний. Расстройка вносится в расчет путем добавления масс различной величины на периферию лопаток. Автор выполнил расчет для реального диска с 30-ю лопатками и дал численное (BLADIS+ [51]) изменение частот от варьирования дополнительных масс. Также представлено влияние расстройки на максимальное перемещение лопатки по первой изгибной форме колебания для различных связей между лопатками. Далее в 2011 г. [45] Репецкий О.В. и Рыжиков И.Н. использовали схему расчета Wei и Pierre [170-172], чтобы разработать программный комплекс для исследования влияния различных видов расстройки параметров на колебания и долговечность рабочих колес турбомашин. Они рассматривали влияние расстройки параметров, вызванной отклонениями частот колебаний одной лопатки и частот всех лопаток от номинального значения и показали, что при наличии в колесе одной лопатки с отклонениями параметров наблюдается «расщепление» частот парных форм колебаний. При этом у одной из этих парных форм узловой диаметр проходит точно посередине лопатки с расстройкой и не изменяется. У второй парной формы узловой диаметр расположен перпендикулярно оси лопатки с расстройкой и частота данной формы отличается от частоты колеса без расстройки. В случае, когда все лопатки колеса не идентичны и они исследовали расстройку параметров лопаток, подчиняющихся закону нормального распределения Гаусса, при этом минимальное влияние расстройки достигается при «пилообразном» расположении лопаток на диске. В 2011 г. Рыжиков И.Н. и Репецкий О.В. проводили экспериментальные исследования влияния расстройки масс на колебания рабочих колес турбомашин. Они сделали выводы о том, что даже незначительная расстройка может существенно изменить частотный спектр колебаний рабочего колеса, привести к значительному «расслоению» частот парных форм, также небольшая расстройка приводит к значительному изменению форм колебаний и появлению локализации колебаний, когда значительно увеличивается амплитуда колебаний только одной лопатки при неподвижных остальных.

Полная работа о статистических аспектах расстройки опубликована авторами Griffin и Hoosac в 1984 г. [97], и в первый раз определены характеристики вынужденных колебаний рабочих колес при разных порядках энергии. С помощью описания максимума амплитуды расстроенных лопаток из 100 случайных рабочих колес они показали, что самые высокие амплитуды с соответствием порядка энергии  $C$  происходят на лопатках, собственные частоты которых почти равны частоте, на которой система будет резонировать, если лопатки идентичны. Для диска с 72-мя лопатками представлен коэффициент увеличения напряжения рабочего колеса с расстройкой ( $k=2,18$ ). Необходимо использовать данные двигателя для прогнозирования динамических сил, действующих на конструкцию. Однако они показали, что усталостная прочность расстроенных рабочих колес всегда меньше, чем прочность настроенных рабочих колес.

В 1986 г. [98] Basu и Griffin использовали законы аэродинамики для расчета влияния жидкой связи на подобную модель. Они сделали выводы о том, что эффекты расстройки могут быть тесно связаны с порядком энергии возбуждения и жесткости диска с числом лопаток. Дополнительно для статистического анализа Griffin и Shinha представили работы об эффектах демпфирования трения на расстроенных рабочих колесах в 1985 г. Аналитические методы для статистического подхода к расстройке описаны автором Shinha в 1986 г. [159]. Вероятностный анализ показал, что максимальное значение амплитуды колебаний лопаток будет превышать критическое значение. Sinha и Chen (Sinha, 1986; Sinha и Chen, 1989; Sinha 1992) развивали эту методику для расчета статистики максимума амплитуды колебаний, когда возбуждение является детерминистическим и синусоидальным. Авторы исследовали влияние расстройки на характеристики вынужденных колебаний системы, когда её свойство возбуждения является случайным. В 1999 г. Cha D. и Sinha A. представили два вида случайного возбуждения: «White-noise and narrow band». Они использовали общую аналитическую методику для расчета стати-

стики характеристик колебаний для расстроенной системы под действием «White-noise and narrow band».

С другой стороны, максимальное значение коэффициента увеличения амплитуды особого рабочего колеса может быть определен путем анализа оптимизации. Информация, используемая в расчете, является соотношением между коэффициентом увеличения амплитуды колебаний и вариантами расстройки конструкции. Первая работа, связанная с расстройкой лопаток как проблемой оптимизации, выполнена в 1999 г. автором Petrov и др. [148], Petrov, Ewin [145-147]. Они использовали «gradient-based» для анализа оптимизации, чтобы определить максимальное значение коэффициента увеличения амплитуды диска с 26-ю лопатками и 92-я секторами диска с бандажом. В 2005 г. Scarselli и Leese провели анализы оптимизации на основе генетических алгоритмов для определения максимума коэффициента увеличения амплитуды рабочего колеса. Введение анализа оптимизации решило проблему для оценки точно максимального значения коэффициентов увеличения амплитуды конкретных конструкций. Результаты показали, что максимальные значения коэффициента увеличения амплитуды может быть меньше, чем коэффициент «Whitehead» в нескольких конструкциях. Например, максимальные значения коэффициента увеличения амплитуды в двух конструкциях, выполненных авторами Petrov и Ewins в 2003 г., очень отличается (-62%) от коэффициента «Whitehead» для диска с 26-ю лопатками и 95% для диска с 92-мя лопатками.

### **1.3. Методы моделирования рабочих колес турбомашин с расстройкой**

Явление расстройки широко изучено более полувека назад, особенно для рабочих колес турбомашин. Расстройка является одним из основных факторов, который значительно влияет на характеристики колебаний и также напряжения вращающихся элементов турбомашин. Из-за свойства циклической симметрии, незначительные дефекты свойств конструкции и незначительные отклонения геометрий лопаток приведут к значительному увеличению характеристик колебаний. Для теоретических исследований эффекта

расстройки необходимо моделировать рабочие колеса по другим математическим моделям. В мире было очень много работ других авторов, посвященных моделированию рабочих колес с расстройкой. В 2002 г. Мироновский С.Н. и Репецкий О.В. [35] представили классификацию исследований по расстройке и несколько моделей при исследовании расстройки. В данном разделе представлены три вида моделей расстройки для рабочих колес.

### 1.3.1. Пружинно-массово-демпферная модель

Упрощенная дискретная пружинно-массово-демпферная модель использована авторами Whitehead D.S., Ewins D.J., Griffin J.H. и Sinha A., Afolabi D.H., Sanliturk K.Y., Wei S.T., Pierre C. и др.[89-93, 97, 98]. Эта модель состоит из диска 1, демпфера лопаток 2, пружин лопаток 3 и соединительных элементов лопаток 4 (рис. 1.7).

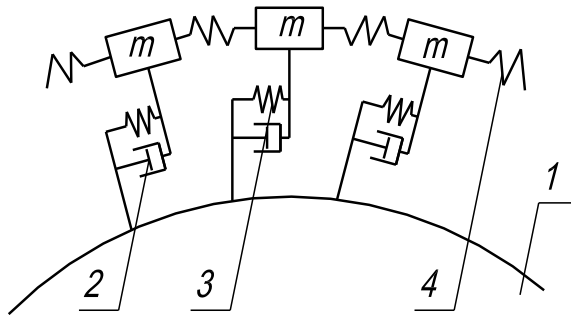


Рис. 1.7. Упрощенная дискретная массово-пружинно-демпферная модель

Эта модель имеет простые математические зависимости, небольшой размер вычислений, но трудно определить эквивалентные физические величины модели, такие как масса, жесткость, демпфер системы. Также для данной модели требуется минимум вычислительных ресурсов. Используя эту модель, можно исследовать какие-либо определенные свойства расстройки с помощью относительно несложных математических зависимостей. Расстройка в данную модель обычно вносится путем изменения жесткости пружины 3, характеристик демпфера 2 или массы  $m$  (рис. 1.6).

Степени характеристики колебаний рабочих колес турбомашин с расстройкой зависят от геометрически и физически точных моделей рабочего колеса. Колебаниям рабочих колес впервые уделено значительное внимание в исследованиях 1960-1970 г. Известные ранние работы сделаны авторами

Whitehead [173-175], Wagner, Dye и Henry, Ewins [89-93]. Для того чтобы отразить основные характеристики колебаний, рабочие колеса часто моделируются как циклические последовательности пружинно-массовых осцилляторов. Простейшая модель  $N$  секторов рабочего колеса является последовательностью  $N$  отдельных степеней свободы осцилляторов, которые связаны с линейными пружинами (пружинно-массовая модель, см. рис. 1.7). Дополнительные осцилляторы могут быть добавлены в каждый сектор, имеющий степени свободы диска и лопаток. Расстройка обычно моделируется как малые случайные возмущения в жесткость степеней свободы лопатки. Эти пружинно-массовые модели можно рассматривать как основные или качественные модели расстроенных рабочих колес. Пружинно-массовая модель применяется редко, потому что эти модели имеют маленький размер. В 1994 г. Rządkowski использовал эту модель и добавил кручение и деформационные эффекты. Sinha в 2006 г. и Veirrow в 2007 г. использовали пружинно-массовые модели соответственно для изучения статистики и анализа аэродинамики.

### **1.3.2. Конечноэлементная модель**

Конечноэлементная модель, которая использована авторами Bladh J. R., Brown J. M., Castanier M. P., Kruse M., Mikkel Myhre, Ottarsson G. S. Петров Е.Р., Репецкий О.В. и др., показана на рис. 1.2.

Свойства геометрии и материала рабочих колес могут быть точно смоделированы с использованием конечноэлементных моделей. Используя эту модель, возможно проведение более детальных исследований эффекта расстройки, при этом расстройка учитывается путем введения так называемой матрицы расстройки, которая, как и в первом случае, может описываться за счет изменения одного из трех параметров конечных элементов: массы, жесткости и демпфирующих свойств. При использовании этой модели можно учитывать для любого рабочего колеса с помощью МКЭ и дать результаты с высокой точностью.

Известно, что при прогнозировании характеристик колебаний реальных рабочих колес турбомашин конечноэлементная модель обычно создается

только для одного сектора рабочего колеса. Предполагаем, что все секторы идентичны, свойство циклической симметрии может быть использовано для расчета собственных и вынужденных колебаний более эффективно, чем моделирование всей системы. Тем не менее, моделирование одного сектора при исследовании колебаний расстроенных рабочих колес является недостаточным, необходимо моделировать полное рабочее колесо. Но полные конечно-элементные модели, состоящие обычно из многих степеней свободы (15 миллионов степеней свободы), не подходят исследованию проблемы расстройки лопаток, потому что матрицы системы являются слишком большими. Для исследования точных конечноэлементных моделей нужно использовать уменьшенные модели, также как моделирование уменьшенного порядка (МУП) и их алгоритмы должны развиваться, чтобы снижать размеры матриц масс и жесткости конечноэлементных моделей и рассматривать варианты расстройки, которые имеют гораздо меньше параметры, чем число степеней свободы конечноэлементной модели, как входной параметр вместо параметра системы.

Первое поколение конечных элементов на основе МУП создано с помощью синтеза форм колебаний (СФК) системы. По подходу к СФК формы колебаний одного элемента вычисляются отдельно. Метод СФК рассматривается как метод «фиксированный интерфейс», метод «подвижный интерфейс» или гибридные методы, которые зависят от граничных условий, использованных для расчета компонентов форм колебаний. Методы «фиксированный интерфейс» состоят из набора статических форм, чтобы захватить движение интерфейса. Затем система СФК синтезируется из компонентов модели путем применения условий совместимости на границе между элементами. Кроме этого, рабочие колеса диска и каждую из  $N$  лопаток можно рассматривать как отдельные элементы.

В 1983 г. применение СФК для МУП при расчете колебаний рабочих колес исследовано автором Irretier [107]. Он использовал свободный интерфейс СФК авторов Criag и Chang. Irretier рассматривал две конечноэлементные модели для диска с 24-мя лопатками. Первая модель с 576-ю степенями

свободы, а вторая с 1584-мя степенями свободы. Выбрав 15 форм колебаний для диска и 4 формы колебаний для каждой лопатки, он получил 135 степеней свободы МУП. В 1985 г. Zheng и Wang [180] использовал свободный интерфейс СФК для пакетов лопаток, связанных друг с другом с помощью бандажей. Они обнаружили, что СФК обеспечивает хорошую точность со значительным снижением времени вычисления для анализа методом конечных элементов. В 1990 г. разработан новый подход к МУП исследователями и установлено, что модели уменьшенного порядка, имеющие порядок  $10N$ , дают точность выше, чем семейство моделей конечных элементов диска с  $N$  лопатками.

В 1994 г. Ottarsson [143] сделал наблюдение, что колебания лопатки на рабочем колесе могут быть синтезированы из основных форм колебаний консольной лопатки и набора форм колебаний лопатки, который создан из-за колебаний диска. Он предложил расчет набора форм с помощью анализа конечных элементов, чтобы найти формы колебаний диска с безмассовыми лопатками. Расстройка вносится в часть матрицы масс, которая принадлежит одиночной лопатке. Для настроенного случая этот метод дал хорошие результаты по собственным колебаниям, но результаты могут быть улучшены путем ручной настройки матрицы жесткости консольных лопаток. Далее Vlahd [72] развил эту модель с бандажом. Он представил использование методов СФК для анализа расстроенных рабочих колес. Он использовал метод «Craig-Bampton», чтобы соединять количество лопаток на идеально настроенном диске. В этот же период времени Yang и Griffin [177] представил МУП на основе методики СФК, при помощи которой синтезируется движение диска и лопатки через предположение об основном движении жесткой лопатки. То есть поверхность соединения между диском и лопаткой, рассматривается как твердое тело, которое также упрощено процессом синтеза форм и исключено из расчета. Эти методы представляют собой усовершенствование в прогнозных возможностях, потому что они позволили создавать модели уменьшенного порядка систематически от конечноэлементных

моделей, которые обеспечивают хорошую точность при изучении эффектов расстройки.

Корме этого, Yang и Griffin представили связь настроенного диска с расстроенными лопатками через функцию частотной характеристики (ФЧХ). Трансформация, изображающая движение интерфейса между диском и лопаткой с помощью количества форм поступательного и вращательного твердого тела, используется для снижения количества связанных степеней свободы. Дополнительно матрица ФЧХ для каждой степени свободы на лопатке может быть учтена для каждого узла в диапазоне частоты. Далее Yang и Griffin [176] развили этот метод, называющийся методом номинальных форм колебаний (НФК). В нем они предположили, что расстроенные формы колебаний могут быть изображены формами, которые принадлежат к одному семейству настроенных форм. Незначительные изменения собственных частот отдельных лопаток не приведут к значительным изменениям форм лопатки, но ведут к локализации через сборку. Форма колебаний, в которой большинство энергии деформации локализована на одной лопатке, может быть изображена путем суммирования аналогичных номинальных форм, соответствующих всем числам узловых диаметров. Этот метод требует знания форм колебаний настроенной системы и матриц масс и жесткости одной лопатки. Далее Feiner и Griffin [94, 95] улучшили этот метод, чтобы рассматривать отдельное семейство моделей, называющееся основной расстроенной моделью (ОРМ). Предполагая, что собственные частоты в одном семействе форм колебаний являются близкими, они больше не требуют иметь матрицы масс и жесткости лопатки. Later, Feiner и др. в дальнейшем улучшили ОРМ для расчета переходного отклика (transient response) расстроенных рабочих колес. Затем ОРМ используется для идентификации отдельной расстроенной лопатки из экспериментальных измерений.

Как дополнение к методам, основанным ФЧХ, Петров и др. предлагал использовать формулу «Sherman-Morrison-Woodbury» для написания точного соотношения между настроенной и расстроенной функцией частотной характеристики. Степени свободы разделены как на активные и пассивные, вклю-



чая узлы, где применяются расстройки и динамические характеристики должны рассчитываться. Далее Petrov и Ewins [145-148] использовали этот метод для вычисления вариантов расстройки рабочего колеса. Они формировали задачу оптимизации, в которой имеется вариант расстройки, являющийся набором значений расстройки для одной лопатки, а частота возбуждения является основной переменной. Также они улучшили эффективный метод при расчете коэффициентов чувствительности для максимальной вынужденной характеристики с отношением к расстроенной лопатке». Later, Petrov и Ewins использовали этот метод для расчета нелинейных вынужденных характеристик рабочего колеса с бандажом при присутствии расстройки собственной частоты и разброса характеристик контактного интерфейса.

### **1.3.3. Статистическая модель**

Статистическая модель использована авторами Srinivasan A.V. и Frye H.M., Griffin J.H. и Hoosac T.M., Shinha и Ewins D.J. и др.

При использовании статистической модели исследователи применяют статистические методы. В этом случае используются исходные данные, полученные при проведении эксперимента и данные, полученные при эксплуатации реальных конструкций. К числу таких данных относятся собственные частоты лопаток и дисков, измеренные различными способами, положение узловых диаметров на диске, время работы дисков до появления первых разрушений.

## **1.4. Анализ влияния расстройки параметров на долговечность рабочих колес турбомашин**

Рабочие колеса часто работают в сложных температурных условиях, больших скоростях вращения и должны удовлетворять жестким требованиям стандартов к уровням резонансных частот колебаний. Расстройка параметров рабочих колес является одним из важных факторов, который может оказывать значительное влияние не только на этот уровень работы, но на долговечность конструкции турбомашин. Причины расстройки параметров рабочих колес могут быть разные, но чаще всего это небольшие отличия лопаток

в геометрии, характеристиках материала, условиях закрепления лопаток в замках и бандаже и т.д. Одним из важных направлений при изучении колебаний расстроенных рабочих колес является вопрос влияния расстройки на их усталостную прочность и долговечность. Первым исследованием по данному направлению была работа Sogliero G. и Srinivasan A.V. [163]. Здесь исследовался диск со случайным расположением расстроенных лопаток и были сделаны некоторые выводы. Представлена методика расчета ожидаемой усталостной прочности для рабочих колес турбомашин с расстройкой. Однако некоторые авторы показали, что существование небольшой расстройки, т.е. небольших отклонений от идеальности, может привести к возникновению резонансных напряжений, которые выше оптимальных на 20% и более. Реальное увеличение максимальных напряжений на отдельных лопатках составляет от 0 до 20% и зависит от размещения лопаток на диске. Далее в 1992 г. Sanliturk [155, 156] использовал пружинно-массовую модель для прогнозирования долговечности рабочих колес с расстройкой, вызванной усталостной трещиной. Этот метод основан на определении номинального напряжения в положении трещины с помощью частотной функции и далее позволяет прогнозировать динамические усталостные ресурсы при вынужденных колебаниях. Он выполнил расчет для случая расстройки одной лопатки рабочего колеса и результаты показали, что совпадение частоты возбуждения с новыми собственными частотами системы из-за усталостной трещины необходимо избегать для продления усталостной долговечности.

Кроме этого, в работах [51, 61, 103] Репецкий О.В., Hohlrieder M., Schmidt R., Irretier впервые применили МКЭ для анализа свободных колебаний рабочих колес с расстройкой, а затем для анализа влияния расстройки параметров на долговечность рабочих колес. Также они представили схему для оценки ресурса лопаток и рабочих колес турбомашин:

- моделирование рабочих колес на основе МКЭ и внесение расстройки параметров в расчет, затем анализ статических напряжений, вычисление собственных частот и форм колебаний рабочих колес с расстройкой;
- расчетное экспериментальное определение возбуждающей нагрузки на ста-

ционарных и переходных режимах работы. Для лопаток турбин ведущее место принадлежит возбуждению от парциальности подвода пара или газа и кромочных следов соплового аппарата;

- оценка демпфирования в материале (а), конструкционного демпфирования (б), аэродинамического демпфирования (в) и демпфирования от ударных эффектов (г). Для турбинных лопаток и пакетов основную роль играет демпфирование вида (а) и (б);

- расчет отклика (динамических перемещений и напряжений) рабочих колес с расстройкой на стационарных и переходных режимах, уточненные двух или трехмерный анализ напряжений в местах концентрации, суммирование статических и динамических напряжений с учетом истории нагружения;

- оценка ресурса лопаточных систем, прогнозирование времени образования трещины и разрушения конструкции.

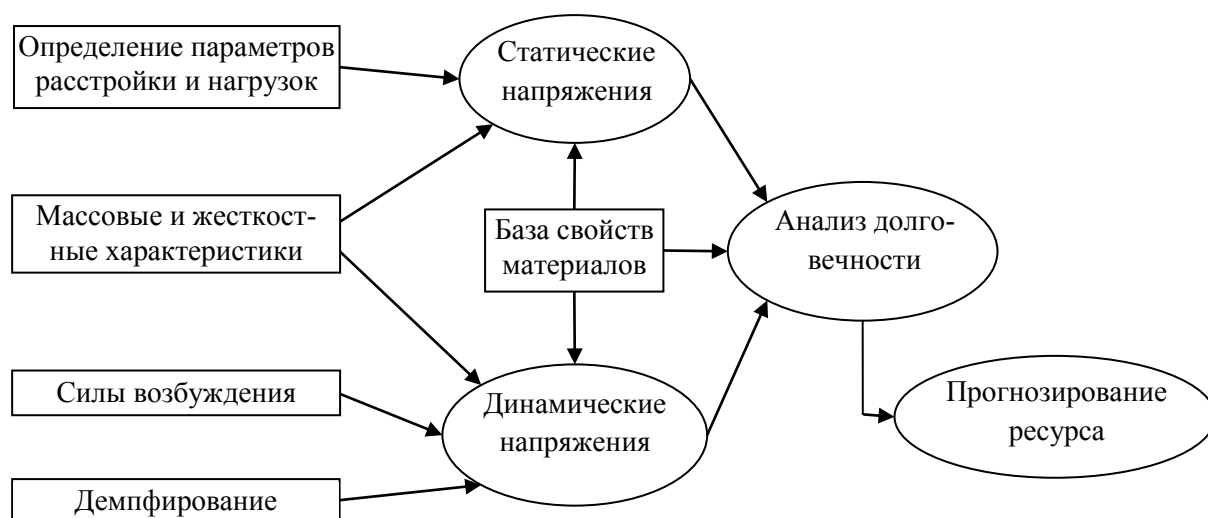


Рис. 1.8. Диаграмма расчета долговечности рабочих колес с расстройкой

Общий вид диаграммы для прогнозирования долговечности рабочих колес с расстройкой представлен на рис.1.8.

Усталостные разрушения составляют основной вид разрушения и нередко приводят к тяжелым последствиям. Разрушение происходит без заметной пластической деформации и, как правило, на поверхности детали от забоин, рисок, в местах концентрации напряжений. Процесс усталостного разрушения можно разделить на несколько фаз: 1) фаза свободная от трещины;

2) образование трещины на поверхности; 3) расширение трещины; 4) разрушение.

### **1.5. Расчетно-экспериментальные методы оценки влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин**

Кроме комплексных аналитических и вычислительных исследований, которые выполнены для анализа влияния расстройки на динамические характеристики рабочих колес турбомашин, на практике известно несколько видов экспериментальных исследований. Эксперимент является необходимым для того, чтобы подтвердить физическое явление расстройки, проверить результаты численного прогнозирования модели с расстройкой и модели уменьшенного порядка, а также изучить факторы, которые оказывают значительное влияние на динамические характеристики расстроенных рабочих колес. Особенно экспериментальные исследования использованы для явлений, влияющих на характеристики рабочих колес с расстройкой, и эти явления не могут численно моделироваться, например, погрешности в конечноэлементных моделях и др.

Однако трудно использовать экспериментальные методы для оценки эффекта случайной расстройки или подтвердить численные исследования для динамики рабочих колес с расстройкой, потому что при проведении эксперимента требуются много конкретных вариантов расстройки. Присоединение масс к лопаткам является обычным подходом для умышленной расстройки в экспериментальном исследовании. Дополнительный анализ вероятности является базовым методом для проверки экспериментом модели расстройки. Rossi и др. [96] создали 10 вариантов расстройки рабочего колеса путем присоединения масс к лопаткам и получили данные тестирования для сравнения с результатами численного прогнозирования. В 2001 г. Judge J. и др. [110] проводили экспериментальное исследование диска с 12-ью лопатками. Они установили экспериментальную схему и получили характеристики колебаний рабочего колеса без расстройки и с расстройкой масс. Они показали явление расщепления частот парных форм и локализации форм колебаний, которые могут привести к увеличению резонансных амплитуд колебаний лопатки из-за расстройки. В 2013 г. Pettinato V.C. и др. [144] проводили

экспериментально-статистический анализ вынужденного отклика для идентификации расстроенного ротора. Они представили метод измерения расстройки, метод определения характеристик расстройки, классификацию форм и метод оценки напряжений для конструкции. В этом разделе представлен метод экспериментальной оценки «Монте-Карло», которые часто используются для оценки влияния расстройки параметров на динамические характеристики рабочих колес при их проектировании.

### **1.5.1. Метод экспериментальной оценки «Монте-Карло» для колебаний рабочих колес с использованием изменения внешних сил**

Значения расстройки являются случайными величинами, анализ вероятности для проведения модельных экспериментов, таких как «Монте-Карло» [67, 108, 109, 122], играют важную роль при прогнозировании вынужденных характеристик для оценки надежности и безопасности рабочих колес турбомашин. Однако использование экспериментальных методов для оценки эффекта случайной расстройки на динамику рабочих колес является трудной задачей, потому что требуется много конкретных вариантов расстройки при проведении эксперимента. Для снижения трудоемкости при тестировании колебаний системы с несколькими вариантами расстройки, предполагается, что изменение функции внешних сил, приложенных на лопатки, может быть использовано для имитации влияния структурного свойства расстройки лопаток на характеристики колебаний системы. Так как это легче и более эффективно, чем изменить физические свойства лопаток.

#### **1.5.1.1. Идентификация расстройки и обновление модели на основе метода синтеза форм колебаний**

В методе синтеза форм колебаний (СФК) [86, 105] выбранный набор форм системы для настроенного рабочего колеса используется как основа моделирования. Диагональная матрица собственных значений для этого набора настроенной системы -  $[\Lambda^S]$ . Расстройка индивидуальной лопатки моделируется как отклонение значений жесткости расстроенной консольной лопатки в сравнении с значениями жесткости настроенной лопатки. Диагональная матрица значений расстройки всех лопаток в координатах консоль-

ной лопатки -  $[\delta\Lambda^{CB}]$ . Далее расстройка лопаток проектируется в модель уменьшенного порядка системы «диск-лопатка» с помощью связи форм колебаний консольной лопатки с частью форм лопатки системы. Тогда матрица  $[Q^{CB}]$  создана для трансформации расстройки лопаток из координат консольной лопатки в координаты модели уменьшенного порядка.

Кроме этого, метод СФК расширен для выполнения идентификации расстройки и обновления модели уменьшенного порядка. детальное изучение этого метода выполняется для рассмотрения влияния погрешности параметров моделирования и измеренных данных в результаты идентификации расстройки. При компенсировании этих погрешностей, предполагается, что циклическая погрешность моделирования может быть идентифицирована от данных тестирования, когда среднее значение расстройки реальной системы равно нулю. Циклическая погрешность моделирования  $[\delta\Lambda^S]$  определяется отклонением собственных значений настроенной системы, которые получены с использованием конечноэлементной модели и идентификации реального рабочего колеса. После идентификации расстройки лопаток и циклической погрешности моделирования, матрица жесткости обновленной модели определена в виде

$$[K^U] = [\Lambda^S] + [\delta\Lambda^C] + [Q^{CB}][\delta\Lambda^{CB}][Q^{CB}]. \quad (1.3)$$

Уравнение движения может быть написано в координатах настроенной системы как

$$[-\omega^2[I] + (1 + i\gamma)[K^U]]\{q\} = \{f\}, \quad (1.4)$$

где  $\omega$  - частота возбуждения;  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\gamma$  - коэффициент структурного демпфирования;  $\{q\}$  - вектор перемещения;  $\{f\}$  – вектор возбуждающих сил. Обратите внимание, что размер модели уменьшенного порядка равен количеству выбранных форм системы.

### 1.5.1.2 Формулировка модифицированных сил для имитации влияния расстройки лопатки

Предполагается, что вариант расстройки  $[\delta\Lambda_{int}^{CB}]$  вносился в образец и

вектор возбуждающих сил  $[f_E]$  используется как функция сил. Тогда уравнение движения (1.4) запишется как

$$\left[ -\omega^2[I] + (1 + i\gamma)([K^U] + [Q^{CB}]^T [\delta\Lambda_{int}^{CB}] [Q^{CB}]) \right] \{q_m\} = \{f_E\}, \quad (1.5)$$

где  $\{q_m\}$  - вектор перемещения расстроенной системы для данного порядка энергии возбуждения. Предполагается, что одинаковый отклик может быть создан путем изменения вектора сил системы и уравнение движения имеет вид

$$\left[ -\omega^2[I] + (1 + i\gamma)[K^U] \right] \{q_m\} = \{f_m\}, \quad (1.6)$$

где  $\{f_m\}$  - модифицированный вектор сил.

Из уравнения (1.5) вектор перемещения расстроенной системы может быть определен для данного варианта расстройки и порядка энергии возбуждения

$$\{q_m\} = \left[ -\omega^2[I] + (1 + i\gamma)([K^U] + [Q^{CB}]^T [\delta\Lambda_{int}^{CB}] [Q^{CB}]) \right]^{-1} \{f_E\}. \quad (1.7)$$

Подставив выражение (1.7) в уравнение (1.6), получим модифицированный вектор сил как

$$\{f_m\} = \left[ -\omega^2[I] + (1 + j\gamma)[K^U] \right] \left[ -\omega^2[I] + (1 + j\gamma)([K^U] + [Q^{CB}]^T [\delta\Lambda_{int}^{CB}] [Q^{CB}]) \right]^{-1} \{f_E\}. \quad (1.8)$$

### 1.5.1.3. Оценка трехпараметрического распределения Вейбулла

Для колебаний рабочего колеса с расстройкой переменная является максимумом отклика лопаток системы. Теория вероятности может быть использована для ускорения моделирования Монте-Карло. Особенно значения максимума отклика лопаток ближе к распределению Вейбулла. Функция плотности вероятности трехпараметрического распределения Вейбулла для значений максимума отклика лопаток имеет вид

$$F(x) = \frac{\beta}{\delta} \left( \frac{\lambda - x}{\delta} \right)^{\beta-1} e^{-\left( \frac{\lambda - x}{\delta} \right)^\beta}, \quad (1.9)$$

где  $\delta, \beta, \lambda$  - соответственно коэффициенты масштаба, фазы и сдвига;  $x$  - переменная, например, максимум амплитуды колебаний лопаток или коэффициента увеличения отклика лопатки.

Коэффициент сдвига  $\lambda$  выражается верхней границей  $x$ . В данном работе он выбран приближительным максимумом коэффициента увеличения отклика лопаток, определенного автором Whitehead как

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{N}), \quad (1.10)$$

где  $N$  - количество лопаток рабочего колеса.

В численном моделировании с использованием этого приблизительно-го значения для верхней границы два параметра распределения Вейбулла могут быть оценены с помощью данных нескольких реализаций Монте-Карло.

### 1.5.1.3. Экспериментальный образец и система возбуждения

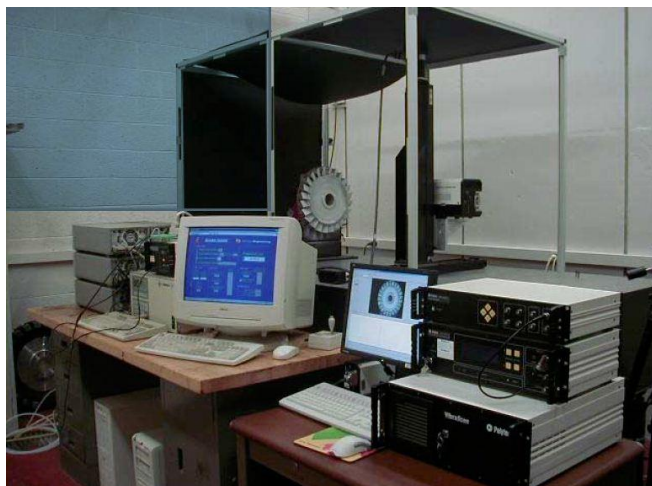


Рис. 1.9. Экспериментальный образец и оборудование

Экспериментальный образец и оборудование для проведения экспериментальной оценки методом «Монте-Карло» показаны на рис. 1.9 (система возбуждающей волны; диск с 24-ю лопатками; система измерения вибрационных характеристик – лазерный сканирующий виброметр).

Акустическое возбуждение для лопаток создано с помощью ряда динамиков. За каждой лопаткой имеется один круглый динамик, установленный в параллельном положении с поверхностью лопатки для приложения акустической силы. Для создания порядка энергии возбуждения, все динамики управляются одновременно, чтобы создать силы с одинаковой амплитудой, но с фазой запаздывания между соседними динамиками

$$\Phi = \frac{2\pi C}{N}, \quad (1.11)$$

где  $C$  – порядок энергии возбуждения.

Сила  $n$ -ой лопатки может быть определена в виде

$$f_n = f_0 \cos(\omega t + (n-1)\Phi), \quad (1.12)$$



где  $f_0$  - амплитуда силы.

#### 1.5.1.4. Вычислительное моделирование «Монте-Карло»

Для выполнения вычислительного моделирования Монте-Карло, методика идентификации расстройки и обновления модели используются, чтобы получить обновленный компонент форм колебаний для первого изгибного семейства системы форм колебаний лопатки. В примере стандартное отклонение расстройки жесткости лопаток равно 0,29%. Затем для данного значения стандартного отклонения расстройки, 1000 случайных вариантов расстройки, созданные из равномерного распределения, используются для обновления компоненты форм расстройки модели. Для каждой моделируемой расстроенной системы, создается одна частотная кривая, и определяется самое максимальное значение отклика лопаток в расстроенной системе. Это значение разделено на самое максимальное значение отклика настроенной системы, тогда получается коэффициент увеличения перемещения лопатки. Распределение Вейбулла коэффициента увеличения оценивается из данных тестирования. В данном примере процесс выполнен для порядков энергии от 6 до 12. Результаты вычислительного моделирования «Монте-Карло» для порядков энергии 8, 9 показаны на рис. 1.10

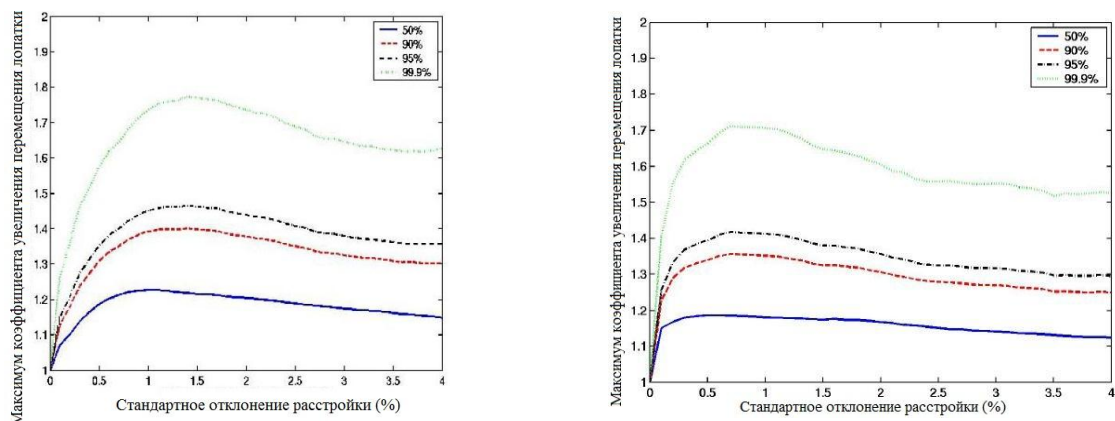


Рис. 1.10. Моделирование Монте-Карло расстроенной системы при порядке энергии возбуждения 8-9, 1000 случайных вариантов расстройки

#### 1.6. Выводы

Приведены явления колебаний отдельной лопатки, рабочих колес без расстройки и с расстройкой и влияние вращения на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин.

Небольшие отличия лопаток друг от друга всегда имеются в реальных конструкциях и причины расстройки параметров циклически симметричной конструкции могут быть разные. В данном разделе представлены виды расстройки, типы моделей при исследовании влияния расстройки на динамические характеристики рабочих колес и методы моделирования рабочих колес турбомашин с расстройкой. Также приведены явления расстройки рабочих колес турбомашин и основные результаты исследований эффекта расстройки, которые выполнены другими авторами.

Рассмотрено влияние расстройки параметров на долговечность рабочих колес турбомашин и общий вид диаграммы для прогнозирования долговечности рабочих колес с расстройкой.

Представлены расчетно-экспериментальные методы оценки влияния расстройки параметров на динамические характеристики рабочих колес. Также детально описан численный метод «Монте-Карло» для анализа влияния расстройки, который чаще всего используется при анализе динамики рабочих колес с расстройкой.

Исследование влияния расстройки на колебания и долговечность циклически симметричных систем, таких как рабочие колеса турбомашин, выполнено достаточно давно. В первой главе приведен обзор методов изучения и основные результаты влияния расстройки на колебания и долговечность рабочих колес. Эта информация позволяет найти новые методы для анализа колебаний и долговечности рабочих колес турбомашин с расстройкой при проектировании.

Проведенный анализ показал, что несмотря на достаточно большое количество работ, связанных с исследованием расстройки, ряд моментов требует дополнительного изучения и анализа. К ним относятся метод МУП на основе МКЭ с помощью треугольных или трёхмерных конечных элементов и обратный метод для анализа влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин. Однако использование этих методов позволяют значительно снизить затраты расчета. Исследованию данных проблем посвящена эта диссертационная работа.

## ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССТРОЙКИ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОМАШИН. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ДЕТАЛЕЙ ТУРБОМАШИН

### 2.1. Анализ свойства циклической симметрии

Настроенные рабочие колеса турбомашин относятся к классу периодических структур, называемых циклически-симметричными системами (ЦСС). Такие структуры имеют свойство циклической симметрии. Это свойство заключается в том, что геометрические, упругие и массовые характеристики системы повторяются вокруг оси симметрии с периодом  $2\pi/N$ , где  $N$  - порядок симметрии или количество секторов. Свойство циклической симметрии играет важную роль в методе моделирования уменьшенного порядка и позволяет значительно снизить вычислительные затраты до модели одного сектора. Этот подход к анализу циклической симметрии широко используется в методе конечных элементов (МКЭ) или анализе конечных элементов программного комплекса ANSYS, NASTRAN и др. В мире было много работ, посвященных использованию этого подхода для анализа динамики ЦСС ([72], [143] и т.д.). В этом разделе построим соотношения физических величин ЦСС в различных координатах при изучении колебаний ЦСС, таких как рабочие колеса турбомашин.

#### 2.1.1. Анализ свойства циклической симметрии с использованием отдельных подструктур

Из теории свойства циклической симметрии найдем соотношение между величиной  $x_n$  (например, перемещение, силы и т.д.) в физических координатах для  $n$ -го сектора и величиной  $u^k$  в циклических координатах для одного фундаментального сектора. Преобразование координат определяется выражением [72]

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} u^0 + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} [u^{k,c} \cos(n-1)k\alpha + u^{k,s} \sin(n-1)k\alpha] + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{N}} u^{\frac{N}{2}}, \quad (2.1)$$

где  $k$  - порядок гармоники,  $N$  - количество секторов,  $\alpha = 2\pi/N$  - угол между

лопатками и  $Q$  определено как

$$Q = \begin{cases} \frac{N-1}{2}, & \text{если } N - \text{нечетное число} \\ \frac{N-2}{2}, & \text{если } N - \text{четное число} \end{cases}. \quad (2.2)$$

Последний член в выражении (2.1) существует, если  $N$  - четное число.

В данной работе величины  $x$  и  $u$  соответственно выражают перемещения всех узлов в физических и циклических координатах. Соответственно обратная трансформация от физических координат в циклических координатах дается по следующим соотношениям [72]:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N x_n, \quad (2.3)$$

$$u^{k,c} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N x_n \cos(n-1)k\alpha, \quad u^{k,s} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^N x_n \sin(n-1)k\alpha, \quad (2.4)$$

$$u^{\frac{N}{2}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} x_n. \quad (2.5)$$

Векторы перемещения системы определены как

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u^0 \\ u^{1,c} \\ u^{1,s} \\ u^{2,c} \\ \vdots \\ u^{\frac{N}{2}} \end{Bmatrix}. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.1) более удобно представить в виде матрицы

$$\{x\} = ([\bar{F}] \otimes [I])\{u\}, \quad (2.7)$$

где  $[\bar{F}]$  - реальная матрица Фурье (см. приложение B), символ  $\otimes$  обозначает оператор Кронекера, определенный в приложении A,  $[I]$ - единичная матрица размера  $N$  и  $([\bar{F}] \otimes [I])^{-1} = [F]^T \otimes [I]$ .

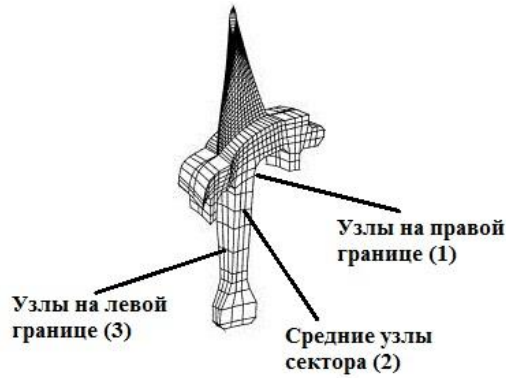


Рис. 2.1. Один типичный сектор

Предполагается, что движение системы является гармоническим, тогда удобно определять величину  $[Y]$  как

$$[Y] = [K] - \omega^2 [M], \quad (2.8)$$

где  $[K], [M]$  - соответственно матрицы жесткости и масс одного базового сектора,  $\omega$  - частота движения. Следует отметить, что эти матрицы включают в себя все элементы, связанные с обеими границами секторов.

Один сектор может быть представлен в виде структурных матриц по следующим схемам

$$[Y] = \begin{bmatrix} [Y_{11}] & [Y_{12}] & [Y_{13}] \\ [Y_{21}] & [Y_{22}] & [Y_{23}] \\ [Y_{31}] & [Y_{32}] & [Y_{33}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] & [M_{13}] \\ [M_{21}] & [M_{22}] & [M_{23}] \\ [M_{31}] & [M_{32}] & [M_{33}] \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\text{с } [K_{21}] = [K_{12}]^T; [K_{31}] = [K_{13}]^T; [K_{23}] = [K_{32}]^T$$

$$\text{и } [M_{21}] = [M_{12}]^T; [M_{31}] = [M_{13}]^T; [M_{23}] = [M_{32}]^T,$$

где индексы 1 и 3 соответственно обозначают степени свободы на независимых и зависимых границах, а индекс 2 обозначает внутренние степени свободы (рис. 2.1).

Вектор перемещения одного сектора может быть определен как

$$\{\delta^k\} = \begin{bmatrix} \{\delta_1^k\} \\ \{\delta_2^k\} \\ \{\delta_3^k\} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Внутренняя энергия  $E$  системы (всех секторов) теперь может быть выражена как

$$E = \frac{1}{2} \{x\}^T ([I] \otimes [Y]) \{x\}, \quad (2.11)$$

где символ  $\otimes$  обозначает оператор Кронекера (см. приложение А);  $[I] \otimes [Y]$  выражается компактной формой блочно-диагональной матрицы

$$[I] \otimes [Y] = Bdiag_{n=1, \dots, N}[Y] = \begin{bmatrix} [Y] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [Y] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [Y] \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

С помощью преобразования координат и применения принципа Гамильтона получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dE dt = \int_{t_1}^{t_2} d\{\delta\}^T ([F]^T \otimes [I]) ([I] \otimes [Y]) ([F] \otimes [I]) \{\delta\} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\{\delta\}^T ([I] \otimes [Y]) \{\delta\} dt = 0, \quad (2.13)$$

где матрица  $([F]^T \otimes [I]) ([I] \otimes [Y]) ([F] \otimes [I])$  просто определяется как блочно-диагональной матрицей  $([I] \otimes [Y])$ .

Известно, что уравнение (2.13) должно иметь смысл для независимых наборов виртуальных перемещений  $d\{\delta\}$ . Уравнения (2.6), (2.12) и (2.13) дают набор задач на собственные значения в циклических координатах. Эти задачи на собственные значения уменьшаются до размера одного или двух секторов:

$$\text{- при } k = 0 \quad [Y] \{\delta^0\} = 0; \quad (2.14)$$

$$\text{- при } 1 \leq k \leq Q \quad \begin{bmatrix} [Y] & 0 \\ 0 & [Y] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\delta^{k,c}\} \\ \{\delta^{k,s}\} \end{bmatrix} = 0; \quad (2.15)$$

$$\text{- при } k = N/2 \quad [Y] \{\delta^{\frac{N}{2}}\} = 0, \text{ если } N \text{ - четное число.} \quad (2.16)$$

Известно, что задачи на собственные значения идентичны. Каждый вектор перемещения  $\{\delta^k\}$  состоит из узлов на двух границах сектора. Если учитывать свойство циклической симметрии, то перемещения узлов на одной из этих двух границ зависят от перемещений узлов остальной границы. Кроме того, эта зависимость является единственной для каждого порядка гармо-

ники. Используя знаки, показанные на рис. 2.1, необходимые соотношения циклической границы для реального и виртуального перемещения могут быть записаны как

$$\begin{cases} \{u_3^{k,c}\} = \{u_1^{k,c}\} \cos k\alpha + \{u_1^{k,s}\} \sin k\alpha \\ \{u_3^{k,s}\} = -\{u_1^{k,c}\} \sin k\alpha + \{u_1^{k,s}\} \cos k\alpha \end{cases}; \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} d\{u_3^{k,c}\} = d\{u_1^{k,c}\} \cos k\alpha + d\{u_1^{k,s}\} \sin k\alpha \\ d\{u_3^{k,s}\} = -d\{u_1^{k,c}\} \sin k\alpha + d\{u_1^{k,s}\} \cos k\alpha \end{cases}. \quad (2.18)$$

Следует отметить, что при  $k = 0$  и четном  $N$  основные соотношения в уравнениях (2.14-2.16) будут записаны в следующем виде

$$\text{- при } k = 0: \quad \{\delta_3^0\} = \{\delta_1^0\}; \quad d\{\delta_3^0\} = d\{\delta_1^0\}, \quad (2.19)$$

$$\text{- при } k = \frac{N}{2}: \quad \{\delta_3^{\frac{N}{2}}\} = -\{\delta_1^{\frac{N}{2}}\}; \quad d\{\delta_3^{\frac{N}{2}}\} = -d\{\delta_1^{\frac{N}{2}}\}. \quad (2.20)$$

Эти выражения согласуются с представлениями одного сектора для этих гармоник в уравнениях (2.14-2.16).

Подставив уравнения (2.10) и (2.17-2.20) в уравнения (2.14-2.16), получим следующие четыре набора основных уравнений движения после упрощений членов:

для  $d\{\delta_1^{k,c}\}^T$  имеем

$$\begin{aligned} & \left[ [Y_{11}] + ([Y_{13}] + [Y_{13}]^T) \cos k\alpha + [Y_{33}] \right] \{\delta_1^{k,c}\} + \left[ [Y_{12}] + [Y_{23}]^T \cos k\alpha \right] \{\delta_2^{k,c}\} \\ & + ([Y_{12}] - [Y_{12}]^T) \sin k\alpha \{\delta_1^{k,s}\} - [Y_{23}]^T \sin k\alpha \{\delta_2^{k,s}\} = 0 \end{aligned}; \quad (2.21)$$

для  $d\{\delta_2^{k,c}\}^T$  имеем

$$\left[ [Y_{12}]^T + [Y_{23}] \cos k\alpha \right] \{\delta_1^{k,c}\} + [Y_{22}] \{\delta_2^{k,c}\} + [Y_{23}] \sin k\alpha \{\delta_1^{k,s}\} = 0; \quad (2.22)$$

Для  $d\{\delta_1^{k,s}\}$  имеем

$$\begin{aligned} & \left[ ([Y_{13}]^T - [Y_{13}]) \sin k\alpha \right] \{\delta_1^{k,c}\} + [Y_{23}]^T \sin k\alpha \{\delta_2^{k,c}\} \\ & + \left[ [Y_{11}] + ([Y_{12}] + [Y_{12}]^T) \cos k\alpha + [Y_{33}] \right] \{\delta_1^{k,s}\} + \left[ [Y_{12}] + [Y_{23}]^T \cos k\alpha \right] \{\delta_2^{k,s}\} = 0 \end{aligned}; \quad (2.23)$$

для  $d\{\delta_2^{k,s}\}^T$  имеем

$$[Y_{23}] \sin k\alpha \{\delta_1^{k,c}\} + \left[ [Y_{12}]^T + [Y_{23}] \cos k\alpha \right] \{\delta_1^{k,s}\} + [Y_{22}] \{\delta_2^{k,s}\} = 0. \quad (2.24)$$

Обратите внимание, что здесь рассматривается обобщенная задача на собственные значения для двукратной гармонике (при  $1 \leq k \leq Q$ ). Уравнения равновесия наверху для одного сектора могут быть записаны в матричном виде

$$[\tilde{Y}^k] \{ \tilde{\delta}^k \} = \begin{bmatrix} [Y_a^k] & [Y_b^k] \\ [Y_b^k]^T & [Y_a^k] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^{k,c} \\ \delta_2^{k,c} \\ \dots \\ \delta_1^{k,s} \\ \delta_2^{k,s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.25)$$

где

$$[Y_a^k] = \begin{bmatrix} [Y_{11}] + ([Y_{13}] + [Y_{13}]^T) \cos k\alpha + [Y_{33}] & [Y_{12}] + [Y_{23}]^T \cos k\alpha \\ [Y_{12}]^T + [Y_{23}] \cos k\alpha & [Y_{22}] \end{bmatrix},$$

$$[Y_b^k] = \begin{bmatrix} ([Y_{13}] - [Y_{13}]^T) \sin k\alpha & -[Y_{23}]^T \sin k\alpha \\ [Y_{23}] \sin k\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Видно, что  $[\tilde{Y}^k]$  - симметричная матрица и её два диагональных блока идентичны. Задача на собственные значения  $\det[\tilde{Y}^k] = 0$  принадлежит вырожденному классу задач и имеет пары реальных собственных значений. Таким образом, существует бесконечное количество собственных значений, удовлетворяющих задаче собственных значений для каждой их пары, которые вообще не взаимно ортогональны. Однако так как линейная комбинация из двух собственных векторов, связанных с одной парой собственного значения, также является доступным решением, задача ортогонализации собственных векторов вполне является тривиальной.

### 2.1.2. Анализ свойства циклической симметрии с использованием целых подструктур

Альтернативный способ формулирования структурной матрицы является рассмотрением подструктуры или сектора, как неотъемлемой части всей сборки. Это означает, что узлы на границе 1 рассматриваются в качестве узлов границы 3 соседнего сектора. Кроме того, структурные связи между смежными секторами затем уже учтены. Это приводит к блочно-



циркулянтным матрицам структуры, следовательно, блочно-циркулянтной матрице собственного значения. Связь структуры может быть выражена только между смежными секторами для всей структуры и получается следующего вида

$$[\bar{Y}] = \text{Bcirc}[\bar{Y}_0, [\bar{Y}_1], 0, \dots, 0, [\bar{Y}_1]^T] = \begin{bmatrix} [\bar{Y}_0] & [\bar{Y}_1] & 0 & \dots & 0 & [\bar{Y}_1]^T \\ [\bar{Y}_1]^T & [\bar{Y}_0] & [\bar{Y}_1] & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & [\bar{Y}_1]^T & [\bar{Y}_0] & [\bar{Y}_1] \\ [\bar{Y}_1] & 0 & \dots & 0 & [\bar{Y}_1]^T & [\bar{Y}_0] \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Приняв степени свободы для отдельной подструктуры, эти новые блоки  $[\bar{Y}_0]$ ,  $[\bar{Y}_1]$  будут иметь следующий состав

$$[\bar{Y}_0] = \begin{bmatrix} [Y_{11}] + [Y_{33}] & [Y_{12}] \\ [Y_{12}]^T & [Y_{22}] \end{bmatrix}, \quad [\bar{Y}_1] = \begin{bmatrix} [Y_{12}] & 0 \\ [Y_{23}] & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

здесь отмечено, что связь между секторами  $[\bar{Y}_1]$  является несимметричной. Однако сейчас зависимость узлов на циклической границе 3 исключается из двух физических и циклических векторов перемещения. В этом случае векторы перемещения имеют вид

$$\{\bar{x}_n\} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_n^1 \\ \bar{x}_n^2 \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{u}^k\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^k \\ \bar{u}_2^k \end{Bmatrix}. \quad (2.28)$$

Соотношения между физической и циклической координатами даны в уравнении (2.7). Матрица  $[\bar{Y}]$ - блочно-циркулянтная. Циклическая задача на собственные значения, полученная от трансформации  $([F]^T \otimes [I])[\bar{Y}]( [F] \otimes [I])$ , будет псевдо-блочно-диагональной и блок, связанный с двойной гармоникой  $k$ , имеет следующие виды

$$[\bar{Y}^k] = \begin{bmatrix} [\bar{Y}_0] + ([\bar{Y}_1] + [\bar{Y}_1]^T) \cos k\alpha & ([\bar{Y}_1] - [\bar{Y}_1]^T) \sin k\alpha \\ ([\bar{Y}_1]^T - [\bar{Y}_1]) \sin k\alpha & [\bar{Y}_0] + ([\bar{Y}_1] + [\bar{Y}_1]^T) \cos k\alpha \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

С помощью комбинации уравнений (2.27) и (2.29) легко показать, что будет получен точно-одинаковый набор циклических задач на собственные значения в общей форме, показанной как уравнение (2.25).

## 2.2. Разработка модели возбуждающих газодинамических нагрузок

Роторы турбомашин часто работают в сложных условиях аэродинамических сил и больших скоростях вращения. Возбуждающие газодинамические силы описаны в работах [11, 31, 51] и зависят от режимов работы ротора (стационарные и переходные) и механической модели рабочего колеса. Лопатка имеет закрутку  $\Psi$  и устанавливается с углом установки  $\alpha$  на диске. Диск вращается с переменной угловой скоростью согласно уравнению  $\Omega = \Omega_0 + \beta t$ , где  $\Omega_0$  - начальная угловая скорость ротора;  $\beta$  - угловое ускорение ротора;  $t$  - время. В результате каждая лопатка по длине возбуждается в зависимости от времени прохода сопловой решетки через число  $z$  сопел. При проходе каждого сопла рабочая лопатка подвержена силам потока внутри  $\mu$ -й части сопла шириной  $S$ , пока  $(S - \mu)$ -я часть свободна от нагрузки (рис. 2.2). Возбуждающие нагрузки включают в себя подъемную силу  $F_L$ , силу сопротивления  $F_D$  и момент  $M_b$  (рис. 2.3). Эти силы в общем виде можно обозначить как  $F^r = F^r(t)$  и выразить через комплексный ряд Фурье

$$F^r = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} F_v^r e^{iv\omega t}, \quad (2.30)$$

где  $\omega = z\Omega$ ,  $\Omega$  - угловая скорость вращения.

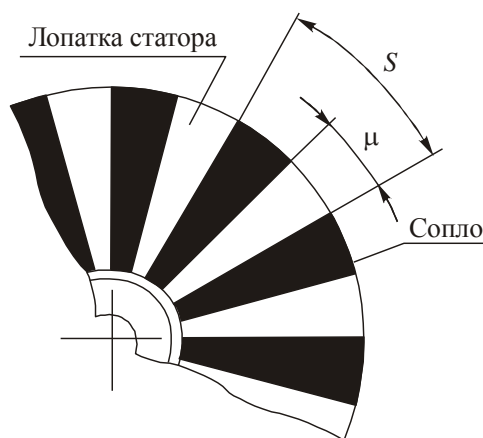


Рис. 2.2. Распределения нагрузки при прохождении лопатки через сопло

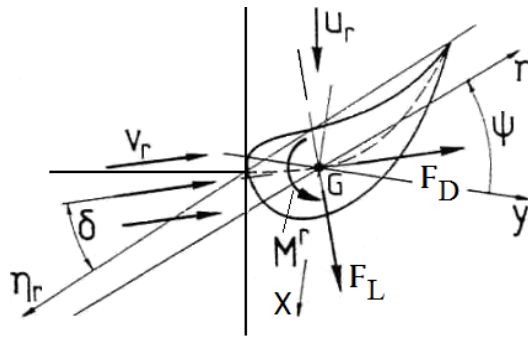


Рис. 2.3. Распределение газодинамических сил

Для исследования влияния нестационарных газодинамических сил на динамику конструкции рассмотрено рабочее колесо в общей системе координат (см. рис. 3.14). При этом математическое выражение распределения вектора газодинамических сил  $\{F_E\}$  по длине лопатки может быть записано в виде [51]:

$$\{F_E\} = [P_x \quad P_y \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad m_z]^T, \quad (2.31)$$

где  $P_y = P_y(z, t)$  и  $P_x = P_x(z, t)$  - возбуждающие силы по направлениям x и y;  $m_z = m_z(z, t)$  - крутящий момент (рис. 2.4). Эти силы могут быть определены по следующим уравнениям

$$\begin{cases} P_y = F_L \sin(\Psi - \delta) + F_D \cos(\Psi - \delta) \\ P_x = F_L \cos(\Psi - \delta) - F_D \sin(\Psi - \delta), \\ m_z = -M^r \end{cases} \quad (2.32)$$

где  $\delta$  - угол между направлением скорости течения  $Vr$  (рис. 2.3) и хордой  $\eta_r$ , который предполагается параллельным с главной осью лопатки  $\eta$ ,  $\psi$  - угол закрутки (угол установки лопатки по радиусу относительно корня).

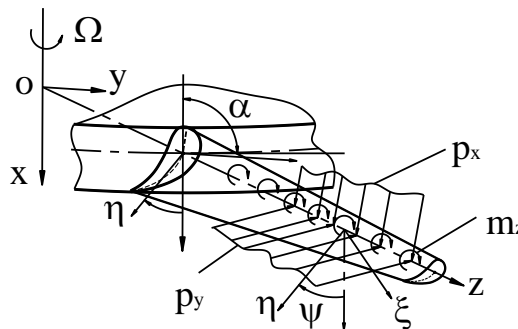


Рис. 2.4. Математическая модель рабочего колеса под действием газодинамических сил

Формулу (2.30) с учетом (2.32) можно представить в виде

$$(P_x, P_y, m_z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (P_{x\nu}^r, P_{y\nu}^r, m_{z\nu}^r) e^{i\nu\varphi}, \quad (2.33)$$

где  $\varphi = z \int_0^t \Omega dt$  - фаза периодического соплового возбуждения,  $(P_{x\nu}^r, P_{y\nu}^r, m_{z\nu}^r)$  - комплексные амплитуды ряда Фурье.

В стационарном режиме:  $\Omega$  - неизменное значение, тогда  $\varphi = z\Omega t$  и  $P_x, P_y, m_z$  - периодические возбуждающие нагрузки. При переходных режимах  $\Omega$  - переменная функция по времени и  $P_x, P_y, m_z$  являются квазипериодическими возбуждениями с увеличивающейся или уменьшающейся частотой.

На практике разработан более реалистичный подход, при котором нагружение - разгрузка лопатки происходит не мгновенно как в случае прямоугольной нагрузки (рис. 2.5), а постепенно по линейной зависимости, которую обеспечивает трапецевидное нагружение (рис. 2.6). Постепенное нагружение, соответствующее трапецевидному, приводит к уменьшению амплитуды колебаний в сравнении с максимально возможной амплитудой при прямоугольной нагрузке.

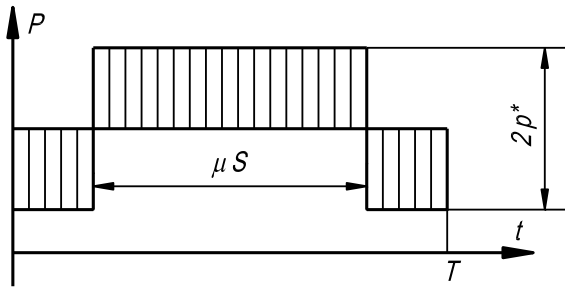


Рис. 2.5. Прямоугольное распределение нагрузки при проходе лопатки через сопло

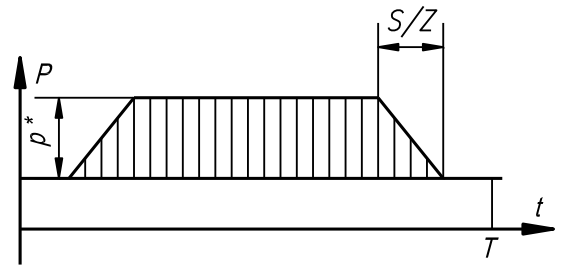


Рис. 2.6. Трапецевидное распределение нагрузки при проходе лопатки через сопло

В данной работе рассмотрен закон возбуждающих газодинамических сил, который опубликован в работах [41, 51, 103]. В переходных режимах Фурье ряд для подъёмной силы  $F_L(t)$  и силы сопротивления  $F_D(t)$  (рис. 3.13) могут быть определены следующими уравнениями

$$F_L = L(1 + 0,05\cos\varphi + 0,025\cos 2\varphi), \quad (2.34)$$

$$F_D = L(0, 1 + 0,005\cos\varphi + 0,0025\cos 2\varphi), \quad (2.35)$$

где первый член  $L$  представляет собой статическую часть.

Вообще говоря, в переходных режимах  $\Omega$  - переменная. Предполагается, что в режимах разгона и торможения ротор вращается с переменной угловой скоростью по уравнению  $\Omega = \Omega_0 + \beta t$  (где  $\Omega_0$  - начальная угловая скорость ротора;  $\beta$  - угловое ускорение ротора;  $t$  - время).

## **2.3. Метод конечных элементов в динамике деформируемых тел**

### **2.3.1. Основные алгоритмы метода конечных элементов**

Метод конечных элементов (МКЭ) в настоящее время наиболее широко используется для решения задач теории поля и упругости механики деформируемого твёрдого тела. Этот метод имеет общий алгоритм, простое использование и является эффективным инженерным средством, которое позволяет в короткое время выполнить расчеты различных вариантов конструкций. В мире известно много работ, посвященных общей теории и применению этого метода. В этом разделе представлены конечные элементы и применение МКЭ при расчете прочности пластинчато-оболочечных деталей турбомашин, которые описаны в работах [3, 7, 8, 9, 10, 18, 24, 33, 51, 57, 179].

Конструкция представляется совокупностью достаточно большого числа точек, так называемых узлов. Координаты узлов задаются в общей системе координаты  $Oxuz$  и определяют геометрическую форму конструкции. Совокупность нескольких узлов создает элемент, который устанавливается дополнительными геометрическими характеристиками (толщина и т.д.) и свойствами материала (модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность). Для математического описания каждого элемента выбирается аппроксимирующая функция в виде полинома, который соответствует дифференциальному уравнению элемента. Использование полинома позволяет определить функции формы  $[N]$ . Вектор перемещения  $\{\delta\}$  любой точки внутри элемента может быть описан с помощью функции  $[N]$  и вектора перемещений узлов элемента  $\{\delta\}$  как

$$\{f\} = [N]\{\delta\}. \quad (2.36)$$

Деформации  $\{\varepsilon\}$  определяются из соотношения

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} \quad (2.37)$$

и напряжения

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (2.38)$$

где  $[B]$  - матрица дифференцирования перемещений,  $[D]$  - матрица упругости материала.

Матрица жесткости элементов  $[k^e]$  получается из соотношения

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV, \quad (2.39)$$

а матрица масс элементов  $[m^e]$  имеет вид

$$[m^e] = \rho \int_V [N]^T [N] dV, \quad (2.40)$$

где  $\rho$  - плотность элемента.

Интегрирование в выражениях (2.39) и (2.40) проводится численным интегрированием Гаусса. Таким образом, из выражений (2.36-2.40) определяются матрицы жесткости и масс элементов. Однако определение матриц  $[B]$ ,  $[D]$ ,  $[N]$  и процедура расчета зависят от вида конечных элементов. Для треугольных элементов (STI218) процедура определения матрицы жесткости состоит из следующих этапов [9, 11, 51]:

- чтение характеристик геометрии и материала, описание элементов в локальных координатах;
- определение матрицы дифференцирования перемещений  $[B]$ , связывающей с деформациями и перемещениями;
- составление матрицы упругости  $[D]$ , связывающей с напряжениями и деформациями;
- определение матричного произведения  $[D][B]$  и запись на диск;
- определение матричного произведения  $[B]^T [D][B]$ ;
- применение координат  $L$  для численного интегрирования матричного произведения  $[B]^T [D][B]$  и определение матрицы жесткости для элементов  $[k^e]$ ;

- выполнение преобразования полученной матрицы жёсткости для элементов  $[k^e]$  к глобальным координатам.

Аналогичная процедура определения матрицы масс включает в себя:

- чтение характеристик геометрии и материала, описание элементов в локальных координатах;
- определение матрицы функций формы  $[N]$  с помощью отношения между перемещениями любой точки внутри элемента и перемещениями узлов;
- определение матричного произведения  $[N]^T[N]$  и запись на диск;
- численное интегрирование произведения  $\rho[N]^T[N]$  для получения согласованной матрицы массы  $[m^e]$ ;
- выполнение при необходимости обратного преобразования полученной матрицы масс  $[m^e]$  к глобальным координатам;

### **Построение матриц конструкции**

Определение матриц жесткости, масс и их преобразование к глобальным координатам представлены выше. Необходимо последовательно оформить матрицы жесткости и масс конструкции из матриц жесткости и масс элементов. Процесс объединения матриц жесткости элементов в матрицы ансамбля (глобальные матрицы) символически можно записать в виде [11, 51]

$$[K] = \sum_i [k_i^e], \quad (2.41)$$

где  $[K]$  - матрица жесткости конструкции размером  $n \times n$ ,  $n$  – число степеней свободы системы,  $[k_i^e]$  - матрица жёсткости  $i$ -го элемента размером  $n_e \times n_e$ ,  $n_e$  - число степеней свободы каждого элемента.

Известно, что индекс членов матрицы  $[K]$  составлен из индексов степеней свободы системы, которые соответствуют индексу всех узлов по последовательному порядку, а индекс членов матрицы  $[k_i^e]$  составлен случайно из индексов степеней свободы  $i$ -го элемента, которые соответствуют индексу узлов  $i$ -го элемента. Суммирование распространяется на все элементы ансамбля в соответствии с индексами членов матриц  $[K]$  и  $[k_i^e]$ .

Аналогично строятся матрица масс  $[M]$  и вектор сил  $\{F\}$  для ансамбля из матриц масс и векторов сил для элементов.

Динамические свойства для линейного демпфирования при использовании МКЭ могут быть описаны следующим уравнением

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\}, \quad (2.42)$$

где  $\{\ddot{\delta}\}$ ,  $\{\dot{\delta}\}$ ,  $\{\delta\}$  - вектор ускорения, скорости и перемещения в узловых точках соответственно,  $\{F\}$  - вектор возбуждающих сил,  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  - матрицы масс, демпфирования и жесткости конструкции. Матрицы  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  определяются в зависимости от используемых математических моделей и типа конечных элементов.

Для статических задач уравнение равновесия при использовании МКЭ имеет следующий вид

$$[K]\{\delta\} = \{F\}. \quad (2.43)$$

### 2.3.2. Применяемые конечные элементы

В этой работе для моделирования деталей рабочих колес турбомашин МКЭ использованы три типа конечных элементов: кольцевые (STI2R4, STI2R6) [8, 36], трёхмерные (SOLID20) и треугольные (STI218) конечные элементы [3, 9, 11, 18, 36, 37, 51].

**Кольцевые конечные элементы.** При исследовании динамических характеристик кольцевых пластин или круглых пластин переменной толщины целесообразно использовать кольцевые конечные элементы (STI2R4, STI2R6).

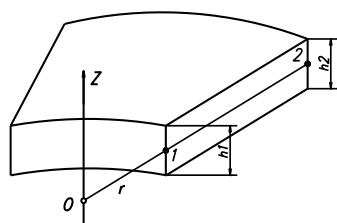


Рис. 2.7. Кольцевые конечные элементы STI2R4 (число узлов: 2; степени свободы:  $w$ ,  $\varphi_r$ )

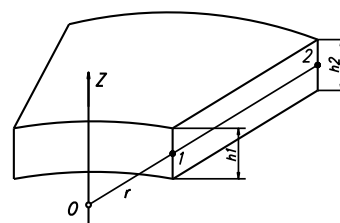


Рис. 2.8. Кольцевые конечные элементы STI2R6 (число узлов: 2; степени свободы:  $w$ ,  $\varphi_r$ ,  $\varphi_{rr}$ )



Кольцевые конечные элементы STI2R4 имеют два узла и его каждый узел имеет две степени свободы (рис. 2.7). А кольцевые конечные элементы STI2R6 имеют два узла и его каждый узел имеет три степени свободы (рис. 2.8). Определение матрицы функций формы  $[N]$ , матрицы дифференцирования перемещений  $[B]$ , матрицы упругости  $[D]$ , матрицы жесткости  $[K]$  и матрицы масс  $[M]$  детально описано в разделе 3.1.

**Трёхмерные конечные элементы (SOLID20).** Элементы SOLID20 применяются в анализе динамических характеристик трёхмерных моделей. Эти элементы имеют 20 узлов, из них: 8 узлов устанавливаются на 8 вершинах и 12 узлах - на средних точках 12-и ребер (рис. 2.9).

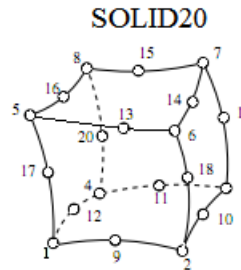


Рис. 2.9. Трёхмерные конечные элементы SOLID20

Функции формы элемента имеют вид [51, 179]:

$$\left. \begin{aligned} N_i(\xi, \eta, t) &= \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta + t_i t - 2), i = 1, 2, \dots, 8 \\ N_i(\xi, \eta, t) &= \frac{1}{4} (1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(1 + t_i t), i = 9, 11, 13, 15 \\ N_i(\xi, \eta, t) &= \frac{1}{4} (1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi)(1 + t_i t), i = 10, 12, 14, 16 \\ N_i(\xi, \eta, t) &= \frac{1}{4} (1 - t^2)(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), i = 17, 18, 19, 20 \end{aligned} \right\}, \quad (2.44)$$

где  $\xi_i, \eta_i, t_i$  - локальные координаты вершины с номером  $i=1, 2, \dots, 20$  (рис. 2.10)

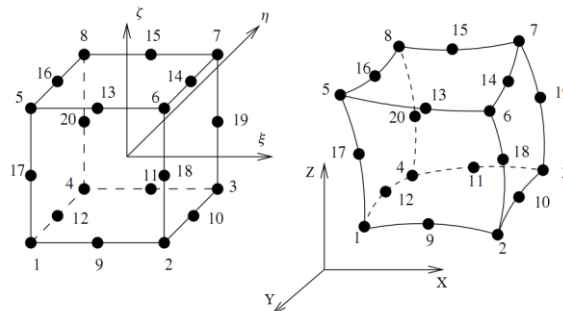


Рис. 2.10. Шестигранный элемент второго порядка

Геометрическая матрица элемента имеет вид

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} N_i \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}. \quad (2.45)$$

В общем трехмерном случае, когда в каждом узле содержится по три степени свободы в виде линейных перемещений  $u, v, w$  вдоль осей  $x, y, z$  декартовой системы координат. Перемещение произвольной точки внутри элемента SOLID20 через узловые перемещения может быть определено в виде:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{20} N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}. \quad (2.46)$$

Связь между глобальными и криволинейными координатными системами конечного элемента описывается уравнением [18, 38, 41, 51, 61]

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}, \quad (2.47)$$

где  $[J]^{-1}$  – матрица, обратная матрице Якоби.

Выражение матрицы Якоби через матрицу перемещений узлов имеет вид

$$[J] = \sum_{i=1}^{20} \begin{bmatrix} x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & z_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & z_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ x_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & y_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} & z_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Деформации в каждом узле элемента можно выразить с помощью уравнений Коши

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} = [B]\{\delta\}, \quad (2.49)$$

где  $\{\delta\} = [\{\delta_1\}^T \dots \{\delta_{20}\}^T]^T$  - вектор перемещений узлов элемента;

$\{\delta_i\} = [u_i \ v_i \ w_i]^T$  - вектор перемещений узла  $i$ ;  $B$  - матрица дифференцирования перемещений и  $[B] = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & [B_3] & \dots & [B_{20}] \\ \underbrace{6 \times 3} & \underbrace{6 \times 3} & \underbrace{6 \times 3} & & \underbrace{6 \times 3} \end{bmatrix}$ ,

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & [B_3] & \dots & [B_{20}] \\ \underbrace{6 \times 3} & \underbrace{6 \times 3} & \underbrace{6 \times 3} & & \underbrace{6 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Предполагается, что линейная связь деформаций и напряжений выражается обобщенным законом Гука:

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}), \quad (2.52)$$

где  $\{\varepsilon_0\}$  - вектор начальных деформаций,  $[D]$  - матрица упругости материала.

Матрица упругости трёхмерных конечных элементов (SOLID20) определяется следующим уравнением:

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{vmatrix}, \quad (2.53)$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Матрицы жесткости и масс элементов определены в следующем виде

$$[K]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] [J] d\xi d\eta dt, \quad (2.54)$$

$$[M]_e = \int_V \rho [N]^T [N] dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho [N]^T [N] [J] d\xi d\eta dt. \quad (2.55)$$

При расчете интегрирований (2.54) и (2.55) использовано численное интегрирование Гаусса по схеме 3x3x3 [51, 179]. Результаты интегрирования дают матрицы жесткости и масс элемента размером 60x60.

### Треугольные конечные элементы (STI218)

При третьем подходе наилучшие результаты и минимальная трудоемкость получены при анализе динамических характеристик пластинчато-оболочечных деталей с использованием треугольных конечных элементов (STI218) переменной толщины с изгибно-мембранной жесткостью, описывающих мембранное состояние (индекс  $m$ ) и изгиб (индекс  $b$ ). Эти элементы имеют три узла и узловыми степенями свободы в них являются три линейных перемещения  $u, v, w$  и три угла поворота  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ , но дополнительная шестая степень свободы (поворот относительно оси перпендикулярной плоскости элемента) появляется позднее при трансформации локальной координатной системы в глобальную. Таким образом, треугольный элемент (STI218) имеет 18 узловых параметров [9, 18, 51, 179].

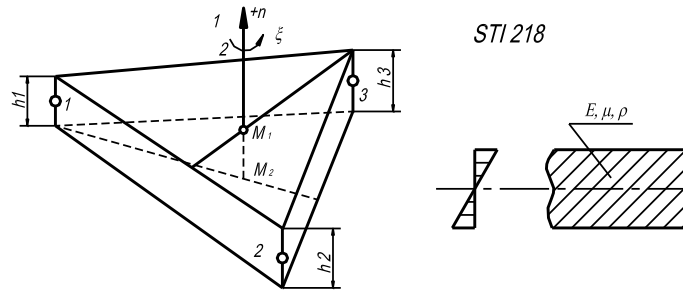


Рис. 2.11. Треугольные конечные элементы STI218

Уравнение статического равновесия для этих элементов имеет вид

$$\{F\} = [K]\{\delta\}, \quad (2.56)$$

где  $[K]$  - матрица жесткости в местной системе координат,  $\{\delta\}$  - вектор узловых перемещений элемента,  $\{F\}$  - вектор узловых усилий.

Тогда для плосконапряженного состояния можно записать

$$\{F\}_m = [K]_m \{\delta\}_m. \quad (2.57)$$

$$\text{Соответственно для изгиба имеем: } \{F\}_b = [K]_b \{\delta\}_b. \quad (2.58)$$

$$\text{Здесь } \{F\}_m = \{F_{1x} \ F_{1y} \ F_{2x} \ F_{2y} \ F_{3x} \ F_{3y}\}, \quad \{\delta\}_m = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\}, \quad (2.59)$$

$$\text{и } \{F\}_b = \{F_{1z} \ M_{1x} \ M_{1y} \ F_{2z} \ M_{2x} \ M_{2y} \ F_{3z} \ M_{3x} \ M_{3y}\},$$

$$\{\delta\}_b = \{w_1 \ \varphi_{1x} \ \varphi_{1y} \ w_2 \ \varphi_{2x} \ \varphi_{2y} \ w_3 \ \varphi_{3x} \ \varphi_{3y}\}. \quad (2.60)$$

Объединяя зависимости (2.59) и (2.60), получаем

$$\begin{Bmatrix} \{F\}_m \\ \{F\}_b \\ M_{1z} \\ M_{2z} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K]_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta\}_m \\ \{\delta\}_b \\ \varphi_{1z} \\ \varphi_{2z} \\ \varphi_{3z} \end{Bmatrix}. \quad (2.61)$$

Нули в формуле (2.61) означают, что поворот  $\varphi_z$  вокруг оси  $Oz$  не участвует в общем числе неизвестных при решении плоской задачи теории упругости, однако они необходимы, например, для согласования конечных элементов, расположенных под углом друг к другу.

При описании изгибных деформаций функцию прогиба можно записать в виде аппроксимирующего полинома третьей степени [9, 18, 51, 179]:

$$w = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 (L_1 L_2^2 + P_L) + \alpha_5 (L_2 L_3^2 + P_L) + \alpha_6 (L_3 L_1^2 + P_L) + \alpha_7 (L_1^2 L_2 + P_L) + \alpha_8 (L_2^2 L_3 + P_L) + \alpha_9 (L_3^2 L_1 + P_L), \quad (2.61)$$

где  $P_L = \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3$ ;  $L_1, L_2, L_3$  - треугольные координаты, связанные с декартовыми следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\ y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3, \\ 1 = L_1 + L_2 + L_3 \end{cases} \quad (2.62)$$

Узловые перемещения в узле при изгибе имеют вид

$$\{\delta\}_i = \begin{pmatrix} w \\ -\frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.63)$$

Подставив формулу (2.61) в выражение (2.63), можно определить коэффициенты  $\alpha_i$  и функции формы

$$w = [N_b] \{\delta_b\} = [[N_{1b}] [N_{2b}] [N_{3b}]] \{\delta_b\}, \quad (2.64)$$

$$\text{при } [N_{1b}] = \begin{bmatrix} L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2 \\ b_3 (L_1^2 L_2 + L_1 L_2 L_3 / 2) - b_2 (L_1^2 L_3 + L_1 L_2 L_3 / 2) \\ c_3 (L_1^2 L_2 + L_1 L_2 L_3 / 2) - c_2 (L_1^2 L_3 + L_1 L_2 L_3 / 2) \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

где  $[N_{2b}]$  и  $[N_{3b}]$  определяются циклической перестановкой,  $b_1 = y_3 - y_2$  и  $c_1 = x_3 - x_2$ .

Деформации для изгибной части (индекс  $b$ ), а также кривизна следуют из уравнения

$$[\varepsilon_b] = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = [B_b] \{\delta_b\}. \quad (2.66)$$

Матрица дифференцирования перемещений  $[B_b]$  для изгиба имеет вид

$$[B_b] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2[N_{1b}]^T}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2[N_{2b}]^T}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2[N_{3b}]^T}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2[N_{1b}]^T}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2[N_{2b}]^T}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2[N_{3b}]^T}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2[N_{1b}]^T}{\partial x\partial y} & -\frac{\partial^2[N_{2b}]^T}{\partial x\partial y} & -\frac{\partial^2[N_{3b}]^T}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Для плосконапряжённого состояния аппроксимируем линейные перемещения в следующем виде:

$$u = L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3, \quad (2.68)$$

$$v = L_1 v_1 + L_2 v_2 + L_3 v_3, \quad (2.69)$$

где  $L_1, L_2, L_3$  - треугольные координаты [18, 51, 179].

Матрица функции формы для мембранной части (индекс  $m$ ) имеет вид

$$[N_m] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Выражение деформаций элемента для мембранной части (индекс  $m$ ) имеет вид

$$[\varepsilon_m] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = [B_m] \{\delta_m\}, \quad (2.71)$$

где

$$[B_m] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

причём  $\Delta$  - площадь треугольника,  $b_1 = y_2 - y_3$ ,  $a_1 = x_1 - x_2$ , при этом  $a_i, b_i$  ( $i = 2, 3$ ) получаются циклической перестановкой.

Матрица упругости для мембранной части (индекс  $m$ ) имеет вид

$$[D_m] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.73)$$

и соответственно для изгиба (индекс  $b$ )

$$[D_b] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

где  $E$  - модуль упругости,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $h$  - толщина элемента.

Матрицы жёсткости и масс подразделяются на две подматрицы в соответствии с мембранной частью (индекс  $m$ ) и изгибом (индекс  $b$ )

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K]_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

где  $[K_m] = \int_V [B_m]^T [D_m] [B_m] dV$  (2.76)

и  $[K_b] = \int_V [B_b]^T [D_b] [B_b] dV$ . (2.77)

Соответственно для матрицы масс имеем

$$[M] = \begin{bmatrix} [M]_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [M]_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

где  $[M_m] = \rho \int_V [N_m]^T [N_m] dV$  (2.79)

и  $[M_b] = \rho \int_V [N_b]^T [N_b] dV$ , (2.80)

где  $dV = h \Delta dL_1 dL_2$  в декартовой системе координат,  $h$  - толщина элемента.

Изменение толщины в пределах элемента задается линейно:

$$h = L_1 h_1 + L_2 h_2 + L_3 h_3. \quad (2.81)$$



При интегрировании матриц масс и жесткости элемента используется численное интегрирование по квадратной схеме Гаусса [18, 51]. Для изгибной части элемента используются 7 точек интегрирования, для мембранной - 3.

Матрицы жесткости, масс, сил и др. удобно получать в местной системе координат, а затем необходимо переходить к глобальной. Связь между локальной и глобальной системами координат запишется как [51, 179]

$$[R] = [L]^T [R_{lok}] [L] \quad (2.82)$$

с  $[R] = [M], [K]$  или  $[C]$ .

Для сил имеем:

$$\{F\} = [L]^T \{f_{lok}\}, \quad (2.83)$$

где

$$[L] = \begin{bmatrix} [\lambda] & & & & & & 0 \\ & [\lambda] & & & & & \\ & & [\lambda] & & & & \\ & & & [\lambda] & & & \\ & & & & [\lambda] & & \\ & & & & & [\lambda] & \\ 0 & & & & & & [\lambda] \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

с подматрицами

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{xX} & \lambda_{xY} & \lambda_{xZ} \\ \lambda_{yX} & \lambda_{yY} & \lambda_{yZ} \\ \lambda_{zX} & \lambda_{zY} & \lambda_{zZ} \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

где  $\lambda_{jJ}$  - косинус угла между осями  $j$  и  $J$ , при  $j = x, y, z$  и  $J = X, Y, Z$  (рис. 2.12).

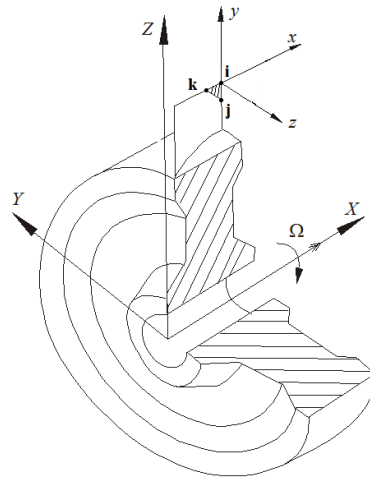


Рис. 2.12. Система координат для расчёта вращающихся систем

## 2.4. Применение метода конечных элементов в анализе прочности деталей турбомашин

### 2.4.1. Задачи статического напряжённо-деформированного состояния деталей турбомашин

Известно, что при работе детали турбомашин нагружаются внешними постоянными силами, например, центробежными силами лопатки. Тогда в конструкции возникают статические напряжения. В этом разделе представлен метод определения статических напряжений от центробежных сил лопатки и газодинамических сил с помощью МКЭ.

Статическое уравнение равновесия лопаток турбомашин в МКЭ можно определить как [11, 51]

$$[K]\{\delta\} = \{F_G\} + \{F_\Omega\}, \quad (2.86)$$

где  $\{\delta\}$  - вектор перемещений узловых точек,  $[K]$  - матрица жёсткости конструкции,  $\{F_\Omega\}$  - вектор нагрузок от центробежных сил,  $\{F_G\}$  – вектор нагрузок от действий статических газовых давлений.

Узловые силы  $\{F_G\}$ , обусловленные статическими газовыми давлениями, имеют вид

$$\{F_G\} = \int [N]^T \{p\} dS, \quad (2.87)$$

где  $\{p\}$  - вектор сил от газовых давлений.

Узловые силы  $\{F_\Omega\}$ , обусловленные центробежными силами, имеют вид

$$\{F_\Omega\} = \int [N]^T \{P\} dV, \quad (2.88)$$

где  $\{P\}$  - вектор объёмных сил от вращения, который определён в общем виде следующим уравнением

$$\{P\} = [M](R + z)\Omega^2, \quad (2.89)$$

где  $[M]$  - матрица масс элемента,  $\rho$  - плотность элемента,  $R$  – внешний радиус диска,  $z$  – расстояние от корня лопатки до центра тяжести элемента,  $\Omega$  – угловая скорость вращения.

Кроме этого, деформированное состояние  $\{f\}$  в любой точке конструкции может быть описано с помощью функций формы  $[N]$  и вектора перемещений узлов  $\{\delta\}$  [18, 51, 179]

$$\{f\} = [N]\{\delta\}. \quad (2.90)$$

Деформации  $\{\varepsilon\}$  определяются из отношения

$$\{\varepsilon\} = [L]\{f\} + \{\varepsilon_0\} \quad (2.91)$$

или

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} + \{\varepsilon_0\}, \quad (2.92)$$

где  $\{\varepsilon_0\}$  – вектор дополнительной деформации,  $[B]$  – матрица дифференцирования перемещений.

Матрицу  $[B]$  можно определить из функций формы и известного соотношения между перемещениями и деформациями:

$$[B] = [L][N], \quad (2.93)$$

где  $[L]$  линейный оператор.

Общее соотношение между напряжениями и деформациями записывается в виде

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}), \quad (2.94)$$

где  $[D]$  является матрицей упругости, описывающей механические свойства материала.

Матрицы жесткости  $[K]$ , масс  $[M]$ , функций формы  $[N]$ , дифференцирования перемещений  $[B]$  и упругости материала  $[D]$  в уравнениях (2.86-2.94) определяются для конкретных задач в зависимости от вычисляемой конструкции и используемого типа конечных элементов.

Таким образом, из формул (2.86-2.94) имеем задачу с матрицей статического напряжённо-деформированного состояния деталей турбомашин под действием внешних статических нагрузок. Эти результаты позволяют решать задачу исследования колебаний и долговечности рабочих колес с учетом влияния вращения (см. пункты 2.5.2, 3.4).

## 2.4.2. Определение характеристик колебаний деталей турбомашин

Определение характеристик собственных колебаний (собственных частот и форм колебаний) является важной задачей и позволяет решать проблему устранения явления резонанса, например, путём изменения формы деталей (в заданных пределах) и повышения ресурса деталей турбомашин под действием различных факторов, таких как температура, вращение, расстройка параметров и т.д. В данном разделе представлена общая схема решения задачи для исследования собственных колебаний деталей турбомашин. Динамические свойства для линейного демпфирования при использовании МКЭ могут быть описаны следующим уравнением [1, 5, 27, 51, 179]

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F(t)\}, \quad (2.95)$$

где  $[M]$  - матрица масс конструкции,  $[C]$  – матрица демпфирования,  $[K]$  - основная матрица жёсткости конструкции,  $\{\delta\}$ ,  $\{\dot{\delta}\}$ ,  $\{\ddot{\delta}\}$  - соответственно вектор перемещений, скорость и ускорение узловых точек, а  $\{F(t)\}$  – вектор возбуждающих сил.

Матрицы жесткости  $[K]$ , масс  $[M]$ , демпфирования  $[C]$  определяются для конкретных случаев задач в зависимости от вычисляемой конструкции деталей и используемого типа конечных элементов (треугольных, трехмерных конечных элементов и т.д.). Также эти матрицы и вектор силы  $\{F(t)\}$  зависят от факторов (например, вращение, расстройка и т.д.), которые воздействуют на систему.

Уравнение движения для свободных колебаний без демпфирования имеет вид [5, 27, 51, 179]

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0, \quad (2.96)$$

причём

$$\delta = \delta_0 \cos(\omega t - \alpha), \quad (2.97)$$

где  $\delta_0$  – амплитуда, а  $\omega$  – круговая частота системы,  $\alpha$  – фаза колебаний.

Подставив выражение (2.97) в (2.96), получим

$$([K] - \omega^2[M])\{\delta_0\} = 0. \quad (2.98)$$

Решение уравнения (2.97) представляет собой типичную задачу на собственные значения. Уравнение (2.97) имеет смысл, когда определитель равен нулю

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0. \quad (2.99)$$

Для решения этого уравнения и определения собственных значений применяют методы Якоби, Ланца [9, 21] и др. Поскольку этот определитель имеет порядок  $n$  (при размерности матрицы  $n \times n$ ), в общем случае существует  $n$  вещественных корней  $\omega^2$ . Они определяют собственные угловые частоты системы.

Каждая частота, при которой выполняется условие (2.98), определяет вектор  $\{\delta_0\}_n$ , величина компонента которого произвольна, а их отношения принимают заданные значения. Такие векторы называются формами колебаний системы.

На практике удобно вводить масштаб для этих векторов так, чтобы

$$\{\delta_0\}_i^T [M] \{\delta_0\}_i = [I], \quad (2.100)$$

где  $[I]$  - единичная матрица размера  $n$ .

Масштабированные таким образом векторы называются нормированными формами системы.

Ещё одно важное свойство форм заключается в том, что для любых двух различных частот  $i \neq j$

$$\{\delta_0\}_i^T [M] \{\delta_0\}_j = 0. \quad (2.101)$$

Это свойство называется свойством ортогональности форм колебаний. Эти свойства, описанные выражениями (2.100) и (2.101), используются при моделировании рабочих колес турбомашин с расстройкой параметров при использовании МУП (см. раздел 4.2).

Анализ задачи вынужденных колебаний требует решение уравнения (2.95) и определения матрицы демпфирования. Решение производится методом разложения по собственным формам и др.

## Исследование колебаний деталей турбомашин с учетом вращения

Уравнение движения деталей турбомашин для линейного демпфирования при использовании МКЭ и учёте влияния центробежных сил может быть описано следующим уравнением [9, 46]

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + ([K] + [K_G])\{\delta\} = \{F_E\}, \quad (2.102)$$

где  $[K_G]$  - матрица геометрической жёсткости,  $\{F_E\}$  - вектор внешних действующих сил.

Для системы без демпфирования и нет внешних возмущений уравнение (2.102) запишется в виде

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + ([K] + [K_G])\{\delta\} = \{F_\Omega\}, \quad (2.103)$$

где  $\{F_\Omega\}$  - вектор центробежных сил.

Для трехмерных конечных элементов центробежная сила определена как

$$\{F_\Omega\} = \int_V [N]^T \rho \{a_\Omega\} dV = [M_C]\{\dot{\delta}\} - [\bar{M}]\{\delta\}. \quad (2.104)$$

Для треугольных конечных элементов центробежная сила определена как

$$\{F_\Omega\} = \int_V [N]^T [A_C] [N] \{\dot{\delta}\} dV - \rho \int_V [N]^T [A_R] [N] \{\delta\} dV = [M_C]\{\dot{\delta}\} - [\bar{M}]\{\delta\}. \quad (2.105)$$

Подставив (2.104) или (2.105) в (2.103), получим уравнение движения в виде

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [M_C]\{\dot{\delta}\} + ([K] + [K_G] - [\bar{M}])\{\delta\} = 0, \quad (2.106)$$

где  $[\bar{M}]$  и  $[M_C]$  - матрица псевдомасс и Кориолиса.

Определение матриц  $[K_G]$ ,  $[\bar{M}]$  и  $[M_C]$  детально описано в разделе 3.4.

В соответствии с исследованиями, выполненными в работе [9], влиянием Кориолисова ускорения на колебания, т.е. вторым членом в уравнении (2.106), можно пренебречь. Следовательно, нахождение частот и форм собственных колебаний выполняется по общей схеме уравнений (2.96 - 2.99).

## 2.5. Программная реализация метода конечных элементов при исследовании влияния расстройки параметров на характеристики колебания рабочих колес турбомашин

На практике у реальных рабочих колес всегда возникает расстройка параметров лопаток, которая нарушает их свойство циклической симметрии и значительно влияет на долговечность конструкции. При исследовании долговечности конструкции динамические напряжения часто определяются на основе собственных частот и форм колебаний с помощью метода суперпозиции мод, ускорения мод и т.д. [11, 26, 51, 61]. Поэтому для оценки влияния расстройки лопаток на долговечность рабочих колес необходимо определить их характеристики собственных колебаний. Типичная программа для определения характеристик колебаний рабочих колёс с расстройкой, реализующая метод конечных элементов, включает в себя ряд общих блоков, которые имеют разные функции. При программировании таких задач используются две подпрограммы, а именно: подпрограмма для определения значений расстройки лопаток и подпрограмма для анализа влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин.

**Первая подпрограмма.** Эта программа определяет значения расстройки лопаток  $\Delta f_n^k$  по жесткости, массе, геометрии и т.д. Общая схема определения значений  $\Delta f_n^k$  с применением МКЭ детально описана в разделах 2.4.2, 2.6 и состоит из следующих основных этапов:

- построение исходных данных консольной лопатки с расстройкой (по жесткости, массе, геометрии). Основными системами исходных данных являются характеристики геометрии, материала и граничные условия лопатки, координаты и топология элементов;
- описание элементов в локальных координатах. Вычисление матриц жёсткости и масс для элементов;
- преобразование матриц жёсткости и масс для элементов в глобальных координатах для составления ансамбля элементов. Формирование матриц жёсткости и масс для всей конструкции;

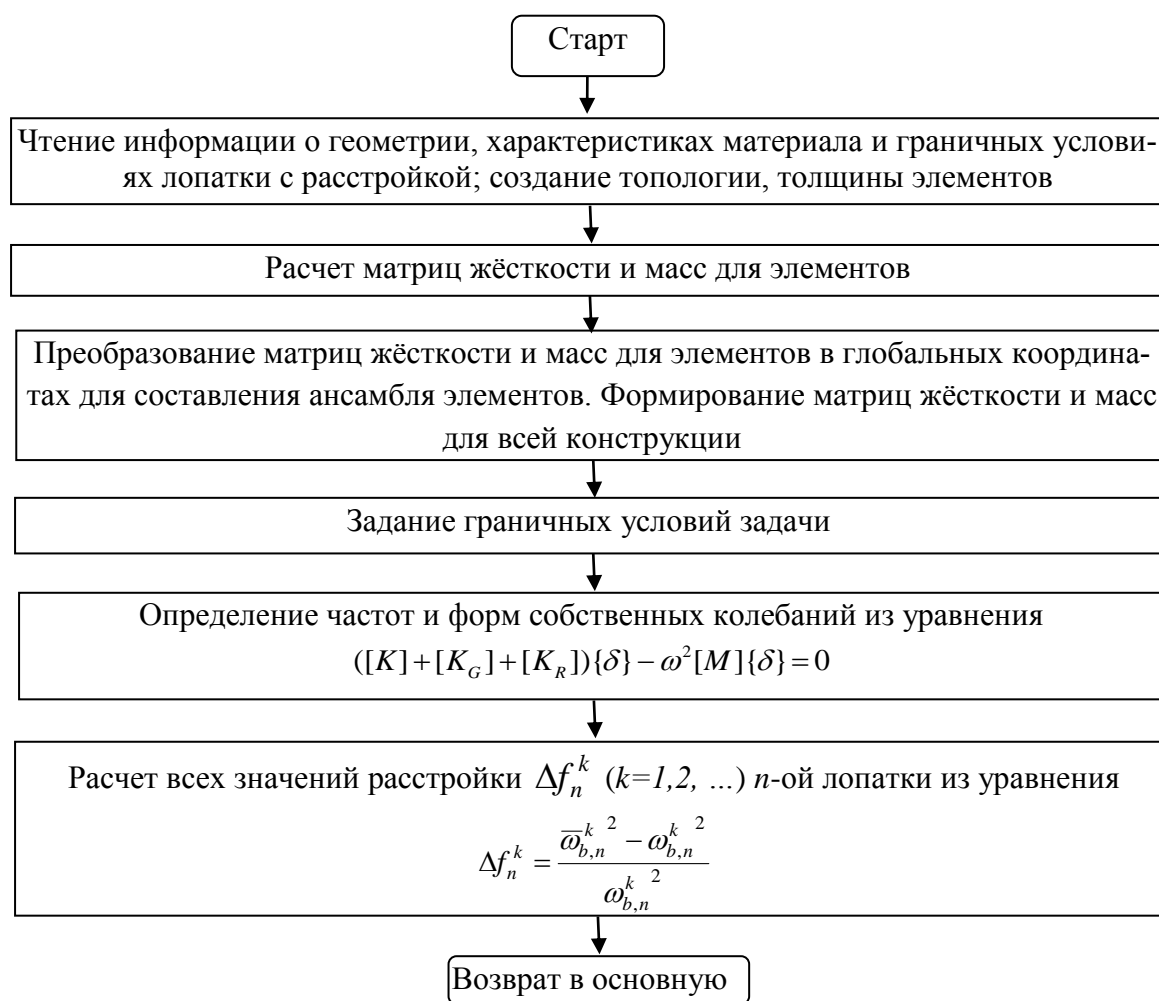


Рис. 2.13. Блок-схема алгоритма определения значений расстройки параметров лопатки  $\Delta f_n^k$

- учет граничных условий задачи;
- решение задачи на собственные значения и определение собственных частот колебаний из уравнения  $([K] - \omega^2[M])\{\delta_0\} = 0$ ;
- определение значений расстройки  $\Delta f_n^k$  ( $k=1, 2, \dots$ )  $n$ -ой лопатки из уравнения 
$$\Delta f_n^k = \frac{\bar{\omega}_{b,n}^{k^2} - \omega_{b,n}^{k^2}}{\omega_{b,n}^{k^2}}$$
 (см. раздел 2.6);
- запись значений расстройки  $\Delta f_n^k$  на диск.

**Вторая подпрограмма.** Эта программа используется для анализа влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин с применением МКЭ. Алгоритм программы состоит из следующих основных этапов:



- задание исходных данных. Основными системами исходных данных являются геометрия и характеристики материала, характеристики демпфирования структуры, вязкого демпфирования, значения расстройки параметров и граничные условия, координаты и топология элементов рабочего колеса;
- описание элементов в локальных координатах. Вычисление матриц жёсткости и масс для элементов;
- преобразование матриц жёсткости, масс для элементов в глобальных координатах для составления ансамбля элементов. Формирование матриц жёсткости и масс рабочего колеса без расстройки;
- математическое моделирование рабочего колеса с расстройкой с помощью МУП и МКЭ, пружино-массовой модели и др. Введение значений расстройки в расчете, определение отклонения матриц жесткости и масс  $[\Delta K]$ ,  $[\Delta M]$  из-за расстройки параметров;

Для задачи о собственных колебаниях рабочего колеса:

- определение частот и форм собственных колебаний рабочего колеса с расстройкой из уравнения  $\left( [K^0] + [\Delta K] - \omega^2 ([M^0] + [\Delta M]) \right) \{ \delta_0 \} = 0$ ;
- печать графическая визуализация результатов;

Для задачи о вынужденных колебаниях рабочего колеса:

- определение векторов возбуждающей нагрузки для всей конструкций;
- определение максимальных значений отклика вынужденных колебаний рабочих колес с расстройкой из уравнения  $\left( (1 + i\gamma) ([K^0] + [\Delta K]) + i\omega [C] - \omega^2 ([M^0] + [\Delta M]) \right) \{ \delta_0 \} = \{ F \}$ ;
- печать и графическая визуализация результатов.

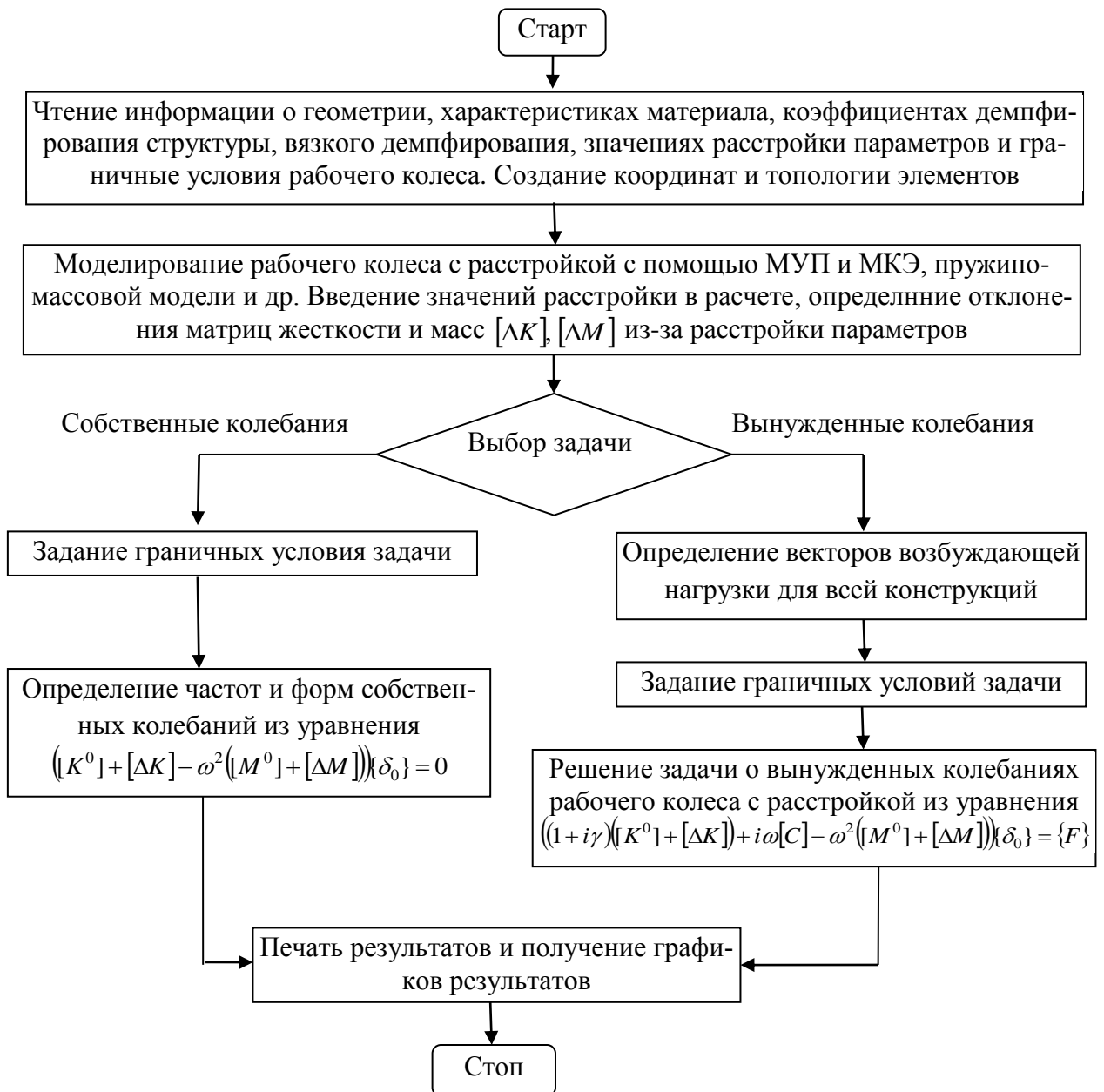


Рис. 2.14. Блок-схема алгоритма анализа влияния расстройки параметров на динамические характеристики рабочих колес турбомашин

## 2.6. Моделирование расстройки рабочих колес турбомашин

При расчете механических конструкций, таких как рабочие колеса турбомашин, компрессоров и различные тела вращения, целесообразно использовать свойство циклической поворотной симметрии. Свойство циклической симметрии позволяет аналитикам значительно снизить вычислительные затраты до модели одного сектора. На практике в конструкциях всегда возникают отличия между лопатками (по массе, геометрии, материалу и т.д.) из-за изготовления, износа при их эксплуатации и других факторов [4, 34]. Все эти

малые отличия лопаток, так называемая расстройка параметров, нарушают циклическую симметрию. Причины расстройки параметров (неидентичность секторов) ЦСС могут быть разные. Чаще всего расстройка лопаток является маленькой величиной (т.е. собственная частота лопаток различна в нескольких процентах от номинального значения), но она оказывает значительное влияние на характеристики колебаний и долговечность конструкций. Исследование эффекта расстройки играет важную роль при проектировании новых турбомашин и также в правильной оценке и увеличении ресурса уже работающих (см. [35, 61]).

### 2.6.1. Реализация расстройки

Расстройка параметров рабочих колес определена в виде [70, 71, 73]

$$\Delta f_n^k = \frac{\bar{\omega}_{b,n}^k{}^2 - \omega_{b,n}^k{}^2}{\omega_{b,n}^k{}^2}, \quad (2.107)$$

где  $\Delta f_n^k$  - значение расстройки  $k$ -ой формы колебания  $n$ -ой лопатки,  $\bar{\omega}_{b,n}^k$ ,  $\omega_{b,n}^k$  - угловые частоты колебаний  $k$ -ой формы  $n$ -ой консольной лопатки с расстройкой и без расстройки. На практике целесообразно использовать МКЭ и программный комплекс ANSYS для исследования характеристик колебаний конструкции. В данном разделе использована программа PVROMBD (см. пункт 4.2) для определения собственных частот консольной лопатки без расстройки и с расстройкой на основе МКЭ. Алгоритм МКЭ для исследования колебаний консольной лопатки детально описан в работе [8, 9, 16, 18, 24, 39].

Таким образом, расстройка лопаток моделируется путем изменения эквивалентных жесткостей  $\Lambda$  или изменения угловых частот лопаток, когда они стационарны (угловые частоты консольных лопаток). Эквивалентная расстроенная жесткость  $k$ -ой формы  $n$ -ой лопатки представлены в виде [70-73]

$$\bar{\Lambda}_{b,n}^k = (\bar{\omega}_{b,n}^k)^2 = (1 + \Delta f_{b,n}^k) \Lambda_b^k, \quad (2.108)$$

где  $\Lambda_b^k$  - жесткость  $k$ -ой настроенной формы колебаний консольной лопатки.

## 2.6.2. Виды расстройки параметров рабочих колес

В рабочих колесах турбомашин существуют три источника расстройки:

- механическая расстройка - это небольшие изменения масс, свойств материала и геометрии индивидуальных лопаток из-за изготовления. Кроме этого, другие факторы могут влиять на этот вид расстройки: неровный износ лопаток при эксплуатации, изменения свойств материала из-за процессов тепловой обработки, изменения жесткости лопаток из-за дефектов и/или усталостных трещин и т.д.
- расстройка демпфирования из-за изменения свойств демпфирования индивидуальных лопаток. Такие различия происходят из-за изменения фрикционных сил между диском и лопатками и/или лопатками.
- аэродинамическая расстройка: результаты из изменения внешних сил на индивидуальные лопатки из-за изменений амплитуды и угла фазы аэродинамических сил для каждой лопатки.

Решение задачи исследования влияния расстройки параметров на колебания и долговечность рабочих колес производится в два этапа:

- определение значений расстройки  $\Delta f_n^k$  лопаток при изменении характеристик лопаток по массе, материалу, геометрии и т.д.
- внесение значений расстройки в расчет (см. уравнение (4.27)).

Для тестирования точности и сходимости алгоритма и созданной программы PVROMBD (см. раздел 4.2) при расчете значений собственных частот колебаний консольной лопатки рассмотрен пример модельной лопатки [11]. Длина лопатки - 0,009 м, ширина - 0,009 м, толщина - 0,001 м, модуль упругости материала - 69,6E+3 МПа, плотность - 2650 кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона - 0,33. Модельная лопатка моделируется МКЭ на основе треугольных конечных элементов (STI218) [9, 51]. Расчетные и экспериментальные частоты собственных колебаний лопатки без расстройки приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Сопоставление расчетных и экспериментальных значений частот собственных колебаний лопатки без расстройки

Формы колебаний		1	2	3	4	5	6
f (Гц)	Эксперимент [11]	100	245	658	815	990	1520
	PVROMBD (STI218)	105,1	257	645	818	940	1623
$\Delta f$ (%)		5,1	4,9	-1,9	0,36	5	6,8

Из таблицы 2.1 видно, что значения собственных частот, полученных с помощью программного комплекса PVROMBD при использовании элементов STI218, хорошо согласуются с данными эксперимента [11]. Далее этот программный комплекс использован для определения значений расстройки лопатки по массе, материалу и геометрии.

**Расстройка по массе.** На практике бывает много вариантов для моделирования расстройки по массе: изменение плотности лопатки или на вершине лопаток просверливается маленькое отверстие и др. В этом разделе определены значения расстройки  $\Delta f_n^k$  одной лопатки ( $k=1, 2, \dots$ ) при увеличении плотности материала на 5%. Геометрические размеры и характеристики материала показаны выше. Расчет проводится созданной программой PVROMBD на основе элементов STI218. Значения расстройки  $\Delta f_n^k$  в зависимости от форм колебаний показаны в таблице 2.2 и на рис. 2.15.

Таблица 2.2

Значения расстройки по массе в зависимости от форм колебаний при увеличении плотности лопатки на 5 %

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta f_n^k$ (%)	-4,76	-4,76	-4,76	-4,76	-4,76	-4,76	-4,76	-4,76	-4,76	-4,76

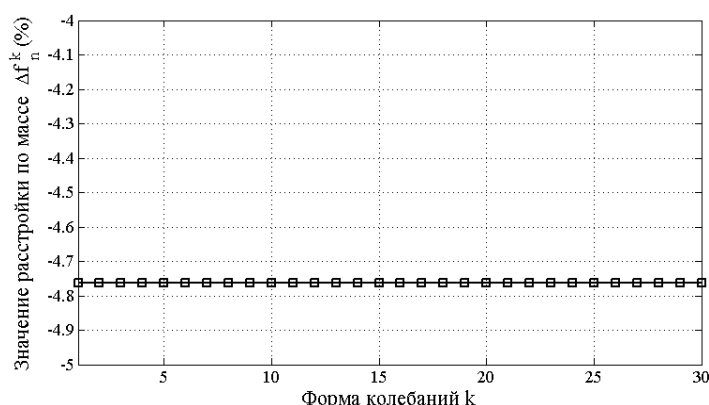


Рис. 2.15. График значений расстройки по массе в зависимости от форм колебаний при увеличении плотности лопатки на 5%

Из рис. 2.15 и таблицы 2.2 видно, что при увеличении плотности лопатки на 5% даны одинаковые значения расстройки (-4.76 %) для всех форм колебаний лопатки. Таким образом, при изменении номинальной плотности каждой лопатки дано одно значение расстройки для всех форм колебаний, и параметры расстройки  $\Delta f_n^k$  в уравнении (2.107) заменяются значением  $\Delta f_n$ .

**Расстройки по геометрии.** Расстройка моделируется путем изменения длины или толщины или ширины лопаток. В данном разделе определим значения расстройки  $\Delta f_n^k$  одной лопатки ( $k=1, 2, \dots$ ) при увеличении длины лопатки на 5%. Геометрические размеры и характеристики материала показаны выше. Расчет проводится программным комплексом PVROMBD на основе треугольных конечных элементов (STI218). Значения расстройки  $\Delta f_n^k$  в зависимости от форм колебаний показаны в таблице 2.3 и на рис. 2.16.

Таблица 2.3

Значения расстройки по геометрии в зависимости от форм колебаний при увеличении длины лопатки на 5%

<b>k</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta f_n^k$ (%)	-17,6	-11,5	-16,2	-4,47	-12,7	-9,68	-15,7	-5,72	-10,9	-6,42

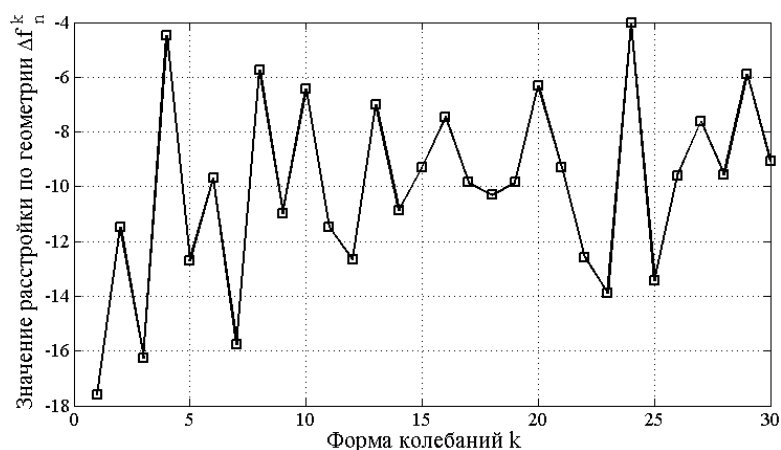


Рис. 2.16. График значений расстройки по геометрии в зависимости от форм колебаний при увеличении длины лопатки на 5%

Из рис. 2.16 и таблицы 2.3 видно, что при изменении длины лопатки получены различные значения расстройки в зависимости от форм колебаний. Таким образом, для исследования влияния расстройки на колебания и долго-

вечность рабочих колес нужно учитывать и записать значения расстройки лопаток в память ЭВМ и затем вносить их в расчет по уравнению (4.24) или (4.27).

**Расстройка по материалу.** Расстройка вносится в расчет путем изменения модуля упругости лопаток. В данном разделе определены значения расстройки  $\Delta f_n^k$  одной лопатки ( $k=1, 2, \dots$ ) при увеличении модуля упругости лопатки на 5%. Геометрические размеры и характеристики материала показаны выше. Расчет проводится программным комплексом PVROMBD на основе треугольных конечных элементов (STI218). Значения расстройки  $\Delta f_n^k$  в зависимости от форм колебаний показаны в таблице 2.4 и на рис. 2.17.

Таблица 2.4

Значения расстройки по материалу в зависимости от форм колебаний при увеличении модуля упругости лопатки на 5%

<b>k</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta f_n^k$ (%)	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

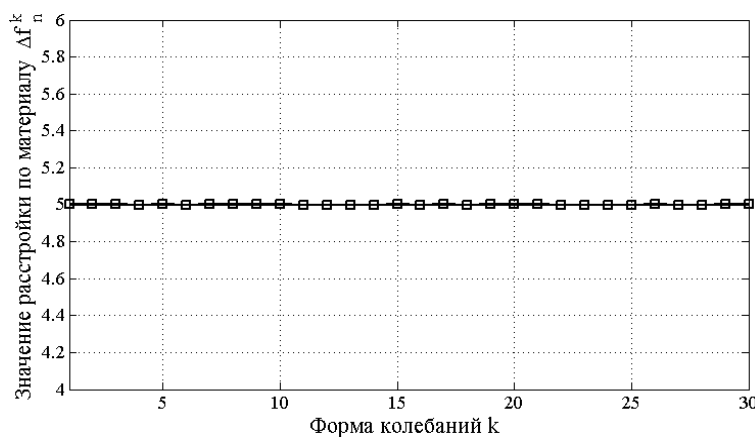


Рис. 2.17. График значений расстройки по материалу в зависимости от форм колебаний при увеличении модуля упругости лопатки на 5%

Из рис. 2.17 и таблицы 2.4 видно, что при увеличении модуля упругости лопатки на 5% получены одинаковые значения расстройки (5%) для всех форм колебаний. Таким образом, при изменении номинального модуля упругости каждой лопатки получено одно значение расстройки для всех форм и значение изменения модуля упругости равно значению расстройки для всех форм.

В данной работе рассмотрено влияние расстройки жесткости лопаток на характеристики колебаний и долговечность рабочих колес турбомашин. Расстройка жесткости вносится в расчет путем изменения модуля упругости как исходные данные расстроенных лопаток. Если материал каждой лопатки однороден, то расстроенный параметр  $\Delta f_n^k$  в уравнении (2.107) заменяется значением  $\Delta f_n$ , которое обозначает изменение номинального модуля упругости. В этом случае выражение (2.107) можно записать в виде

$$\Delta f_n = \frac{\overline{\omega}_{b,n}^k{}^2 - \omega_{b,n}^k{}^2}{\omega_{b,n}^k{}^2}, \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (2.109)$$

или

$$\Delta f_n = \frac{E_n - E_0}{E_0}, \quad (2.110)$$

где  $E_0$  - модуль упругости лопатки без расстройки,  $E_n$  - модуль упругости  $n$ -ой лопатки с расстройкой,  $\Delta f_n$  - значение расстройки  $n$ -ой лопатки.

### 2.6.3. Варианты расстройки лопаток

В большинстве опубликованных исследований по расстройке рабочих колес турбомашин представлены пять вариантов расстройки, которые часто используются в анализе влияния расстройки параметров на колебания и долговечность рабочих колес турбомашин [45].

**Первый вариант** - расстройки одной лопатки:  $\Delta f_1 = A_0$ . (2.111)

**Второй вариант** - линейный закон  $\Delta f_n = B_0 \left( \frac{2(n-1)}{N} - 1 \right)$ . (2.112)

**Третий вариант** - гармонический закон  $\Delta f_n = B_0 \sin\left(\frac{2\pi h(n-1)}{N}\right)$ . (2.113)

**Четвёртый вариант** - псевдогармонический закон

$$\Delta f_n = \begin{cases} A_0 & \text{if } n \leq N/2 \\ -A_0 & \text{if } n > N/2 \end{cases}, \quad (2.114)$$

где  $\Delta f_n$  - значение расстройки параметров  $n$ -ой лопатки;  $A_0$  – известное значение расстройки;  $B_0$  – максимальная амплитуда значения расстройки;  $N$  - число лопаток рабочего колеса;  $h$  - число гармоник.



**Пятый вариант:** значения расстройки - случайные величины, которые подчиняются закону нормального распределения Гаусса. Функция плотности Гаусса вероятности определена как

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.115)$$

где параметр  $\mu$  - математическое ожидание,  $\sigma$  - стандартное отклонение.

## 2.7. Выводы

В этой главе представлены отношения механических величин, таких как перемещение, сила и т.д., в физических координатах для полной системы и в циклических координатах для одного фундаментального сектора (анализ циклической симметрии). Использование этих отношений позволяет моделировать циклически симметричные системы на основе только одного базового сектора и значительно снизить вычислительные затраты.

Приведены модели возбуждающих газодинамических сил, приближенные к реальным режимам работы двигателей турбомашин, что позволяет увеличить точность при анализе динамических задач для оценки влияния расстройки параметров на колебания и долговечность рабочих колёс турбомашин, а также легко реализовать программу на компьютере.

Приведены понятия явления расстройки параметров, основанные известные результаты исследования эффекта расстройки. Также дано определение значений расстройки рабочих колёс турбомашин МКЭ. Представлены виды расстройки и различные варианты расстройки параметров, которые часто возникают при изготовлении и эксплуатации рабочих колёс турбомашин. Это является важными данными, которые позволяют решать задачи исследования влияния расстройки параметров на колебания и долговечность рабочих колёс турбомашин при проектировании.

В настоящее время МКЭ является основой большинства автоматизированных программных систем для расчета динамических характеристик и прочности конструкции. Широкое применение МКЭ в технике связано с его

достаточно общим алгоритмом и простым использованием. В главе представлены основные алгоритмы МКЭ и типы конечных элементов для расчета прочности пластинчато-оболочечных деталей турбомашин, дано использование МКЭ для решения задач статического напряжённо-деформированного состояния и определения характеристик колебаний деталей турбомашин. Также разработана общая схема программы для исследования влияния расстройки параметров на колебания рабочих колес турбомашин. В программе приведены основные уравнения, в которых моделируется расстройка при расчете. Это является основой, чтобы выбрать подход к анализу влияния расстройки на динамические характеристики рабочих колес на основе метода конечных элементов.

Построенные алгоритмы и разработанные математические модели, основанные на теории пластин и оболочек, широко используются в классе задач проектирования рабочих колес турбомашин с учетом расстройки по жесткости, массе, геометрии и т.д.

## ГЛАВА 3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОМАШИН

### 3.1. Исследование собственных колебаний кольцевых пластин с использованием кольцевых конечных элементов

Кольцевые пластины переменной толщины используются в конструкциях для снижения металлоемкости и веса. Надежность и долговечность большинства таких конструкций в энергетических и транспортных турбомашинах определяются их динамической прочностью. Поэтому исследованию колебаний кольцевых пластин уделяется значительное внимание [1, 6, 8, 37, 42, 62]. В работах [1, 6] выполнено математическое моделирование и исследованы собственные колебания круглых пластин постоянной толщины аналитическим методом. В работе [62] исследованы собственные колебания кольцевых пластин постоянной толщины при различных условиях закрепления и геометрии контура аналитическим методом. В данной работе применены кольцевые элементы (STI2R4, STI2R6) для исследования собственных колебаний кольцевых пластин переменной толщины методом конечных элементов (МКЭ).

Согласно работам И.М. Бабакова [1] средняя плоскость кольцевой пластины в положении максимального отклонения располагается по поверхности

$$w(r, \theta) = \alpha(r - r_0)^s \cos n\theta, \quad (3.1)$$

где  $r_0$  - внутренний радиус;  $r$  - радиальное состояние элементов пластины от окружности крепления кольцевой пластины на валу;  $n$  - число узловых диаметров;  $s$  - параметр;  $(r, \theta)$  - полярные координаты.

Если отношение внешнего диаметра кольцевой пластины к внутреннему диаметру невелико, то в качестве минимизирующей формы целесообразно взять функцию [1, 19, 30]

$$w(r, \theta) = w(r) \cos n\theta = (\alpha_1(r - r_0) + \alpha_2(r - r_0)^2 + \alpha_3(r - r_0)^3 + \dots) \cos n\theta. \quad (3.2)$$

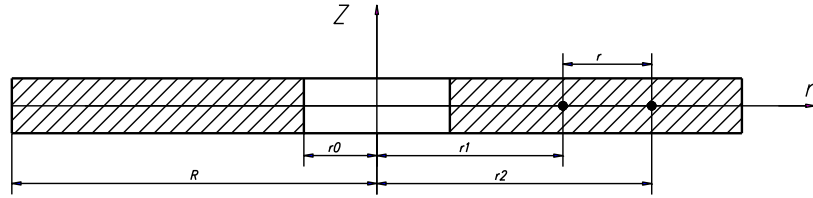


Рис 3.1. Координаты конечного элемента кольцевых пластин

При расчете изгибных колебаний кольцевых пластин переменной толщины в ряде случаев целесообразно применять МКЭ на основе кольцевых конечных элементов, которые строятся на следующих аппроксимирующих полиномах [8, 37]

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 r^2 + \alpha_4 r^3 \text{ для элементов STI2R4} \quad (3.3)$$

и  $w = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 r^2 + \alpha_4 r^3 + \alpha_5 r^4 + \alpha_6 r^5$  для элементов STI2R6. (3.4)

Узловыми перемещениями являются соответственно

$$\{\delta_i\} = \begin{cases} w \\ \frac{\partial w}{\partial r} \end{cases}, \text{ для элементов STI2R4, } \{\delta_i\} = \begin{cases} w \\ \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \end{cases}, \text{ для элементов STI2R6.} \quad (3.5)$$

Записывая выражения (3.5) с учетом (3.3) и (3.4) для всех узлов, можно установить связь между неизвестными коэффициентами  $\alpha_i$  и узловыми перемещениями  $\{\delta_e\}$ . Тогда получим выражение  $\{\delta_e\} = [C][\alpha]^T$ , (3.6)

$$\text{где } [C] = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & r_1^3 \\ 0 & 1 & 2r_1 & 3r_1^2 \\ 1 & r_2 & r_2^2 & r_2^3 \\ 0 & 1 & 2r_2 & 3r_2^2 \end{bmatrix} \text{ для элементов STI2R4,} \quad (3.7)$$

$$\text{и } [C] = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & r_1^3 & r_1^4 & r_1^5 \\ 0 & 1 & 2r_1 & 3r_1^2 & 4r_1^3 & 5r_1^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6r_1 & 12r_1^2 & 20r_1^3 \\ 1 & r_2 & r_2^2 & r_2^3 & r_2^4 & r_2^5 \\ 0 & 1 & 2r_2 & 3r_2^2 & 4r_2^3 & 5r_2^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6r_2 & 12r_2^2 & 20r_2^3 \end{bmatrix} \text{ для элементов STI2R6.} \quad (3.8)$$

Обращая матрицу  $[C]$  в выражение (3.7) или (3.8), определим неизвестные коэффициенты  $[\alpha]$

$$[\alpha]^T = [C]^{-1} \{\delta_e\}. \quad (3.9)$$

Далее удастся выразить через  $\{\delta_e\}$  перемещения произвольной точки

$$\{\delta\} = [S][C]^{-1} \{\delta_e\} = [N] \{\delta_e\}, \quad (3.10)$$

где  $[N]$  - матрица функций формы;  $[S] = \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 & r^3 \\ 0 & 1 & 2r & 3r^2 \end{bmatrix}$  для элементов

$$\text{STI2R4}; [S] = \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 \\ 0 & 1 & 2r & 3r^2 & 4r^3 & 5r^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6r & 12r^2 & 20r^3 \end{bmatrix} \text{ для элементов STI2R6.}$$

Использование матрицы форм  $[N]$  в выражении (3.10) позволяет вычислять выражение для матрицы масс кольцевых элементов в виде

$$[M_e] = \pi [C]^{-T} \rho \int_{r_1}^{r_2} [S]^T [S] h r dr [C]^{-1}, \quad (3.11)$$

где  $\rho$  - плотность материала;  $h$  - толщина элемента.

Для определения матрицы жесткости необходимо последовательно найти в произвольной точке деформации

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} -\frac{d^2 w}{dr^2} \\ -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{n^2}{r^2} w \\ \frac{2n}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{2n}{r^2} w \end{Bmatrix} = [B] \{\delta_e\} \quad (3.12)$$

и напряжения  $[\sigma] = [D] \{\varepsilon\}, \quad (3.13)$

где  $[B]$  - матрица дифференцирования перемещений;  $[D]$  - матрица упру-

$$\text{сти и } [D] = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}; \mu - \text{коэффициент Пуассона.}$$

Подстановкой в (3.12) аппроксимирующих полиномов (3.3) или (3.4) можно получить матрицу дифференцирования перемещений

$$[B] = [E][C]^{-1}, \quad (3.14)$$

где  $[E] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6r \\ \frac{n^2}{r^2} & \frac{n^2-1}{r} & (n^2-2) & (n^2-3)r \\ -2\frac{n}{r^2} & 0 & 2n & 4nr \end{bmatrix}$  для элементов STI2R4, (3.15)

и  $[E] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6r & -12r^2 & -20r^3 \\ \frac{n^2}{r^2} & \frac{n^2-1}{r} & (n^2-2) & (n^2-3)r & (n^2-4)r^2 & (n^2-5)r^3 \\ -2\frac{n}{r^2} & 0 & 2n & 4nr & 6nr^2 & 8nr^3 \end{bmatrix}$  для элементов STI2R6. (3.16)

Использование матрицы упругости  $[D]$  и матрицы дифференцирования перемещений  $[B]$  (3.14) позволяет определить матрицы жесткости кольцевых

элементов  $[K]_e = \pi[C]^{-T} \int_{r_1}^{r_2} [E]^T [D] [E] r dr [C]^{-1}$ . (3.17)

Толщина кольцевых элементов изменяется по линейному закону

$$h = h_1 + \frac{(h_2 - h_1)(r - r_1)}{(r_2 - r_1)}. \quad (3.18)$$

При интегрировании выражений для матриц масс и жесткости конечных элементов использовалась пятиточечная схема квадратур Гасс-Лежандра. Вычисление матриц масс и жесткости конструкции и решение задачи на собственные значения проводятся по алгоритму, который описан в пункте 2.5.

Для тестирования точности и сходимости этого метода при расчёте свободных колебаний кольцевых пластин решена задача о колебаниях диска, основные характеристики которого даны в работе [51]. Геометрические размеры и характеристики материала рассчитываемой конструкции: внутренний

радиус - 0,1016 м, внешний радиус - 0,2032 м, толщина диска - 0,001016 м, модуль упругости - 216 ГПа, плотность - 8230 кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона - 0,28. Диск жестко закреплен по внутреннему радиусу. Конечноэлементная модель диска на основе кольцевых конечных элементов с изгибной жесткостью и тремя степенями свободы в узле содержит 33 степени свободы. Результаты расчета частот и форм собственных колебаний в сравнении с экспериментом (Эксп.) приведены в таблице 3.1 и на рис. 3.2 в виде частотной диаграммы.

Таблица 3.1

Сопоставление расчетных и экспериментальных значений частот собственных колебаний диска (Гц)

m	n=0		n=1		n=2		n=3	
	МКЭ (STI2R6)	Эксп. [51]	МКЭ (STI2R6)	Эксп. [51]	МКЭ (STI2R6)	Эксп. [51]	МКЭ (STI2R6)	Эксп. [51]
0	79.04	79.20	80.81	81.20	89.79	90.30	113.60	-
1	517.20	515.80	527.30	526.30	558.00	557.30	609.20	-
2	1483.00	-	1494.00	-	1525.00	-	1579.00	-

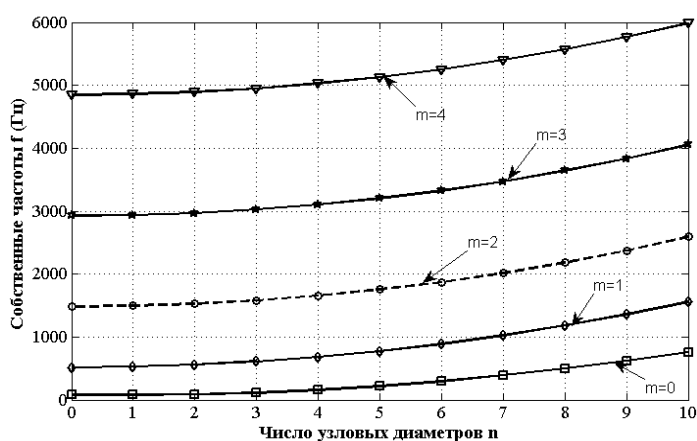
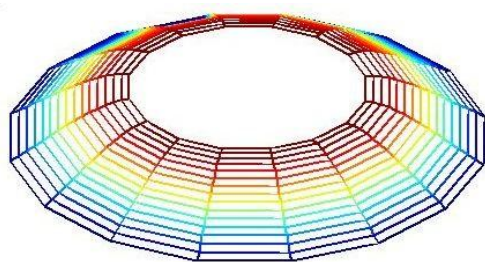
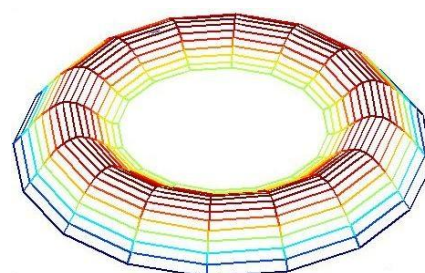


Рис. 3.2. График частот собственных колебаний кольцевых пластин в зависимости от числа узловых диаметров «n» и числа узловых окружностей «m»



при n=0; m=0



при n=0; m=1

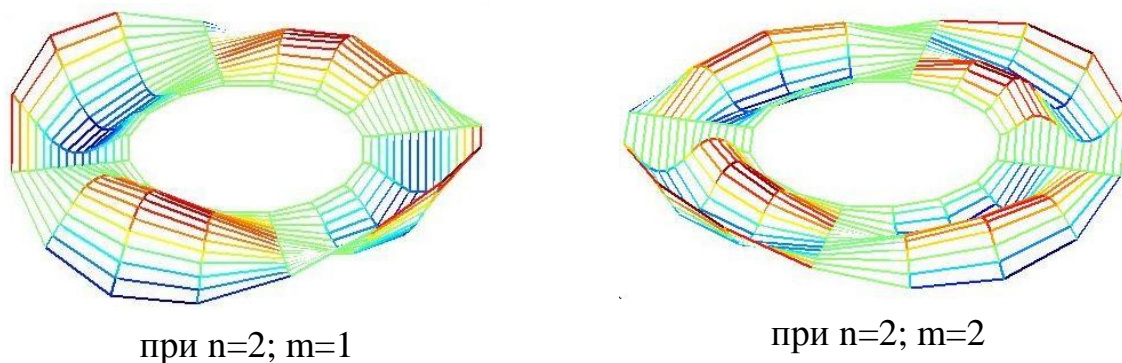


Рис. 3.3. Формы колебаний диска

Из таблицы 3.1 видно, что значения собственных частот, полученных с помощью программы при использовании элемента STI2R6, хорошо согласующиеся с экспериментом, также обеспечивают сходимость решения.

Из рис. 3.2 показано, что колебания кольцевых пластин обладают свойствами колебаний круглых пластин. Кроме этого, собственные частоты колебаний кольцевых пластин зависят от отношения радиусов внутреннего и наружного контуров. В этом примере:  $\frac{r_0}{R} = 0.5$  ( $R$ ,  $r_0$  - внешний и внутренний радиус диска), а число узловых диаметров  $n$  мало сказывается на частоте колебаний.

### 3.2. Метод циклической симметрии (МЦС) для исследования собственных колебаний рабочих колес

В технике часто встречаются циклически-симметричные системы (ЦСС), такие как рабочие колеса турбомашин, компрессоров и др., у которых сложная форма, тяжелые рабочие условия: большие окружные скорости и температуры, нестандартное нагружение и т.д. Число степеней свободы при моделировании всего рабочего колеса будет так велико, что расчет таких конструкций на ЭВМ становится проблематичным. При расчете циклически-симметричных систем целесообразно использовать свойство циклической поворотной симметрии. Это свойство заключается в том, что геометрические, упругие и массовые характеристики повторяются в окружном направлении с периодом  $\varphi = 2\pi/N$ , где  $N$ - порядок симметрии. Таким образом, можно рассчи-



тывать напряженно-деформированное состояние одного типового сектора и снизить размерность системы до анализа только одного такого сектора ЦСС. При этом другие сектора могут быть получены путем поворота одного базового сектора на угол  $p\varphi$  вокруг оси симметрии, где  $p=0,1,2,\dots,(N-1)$ . Каждый сектор называется периодическим элементом.

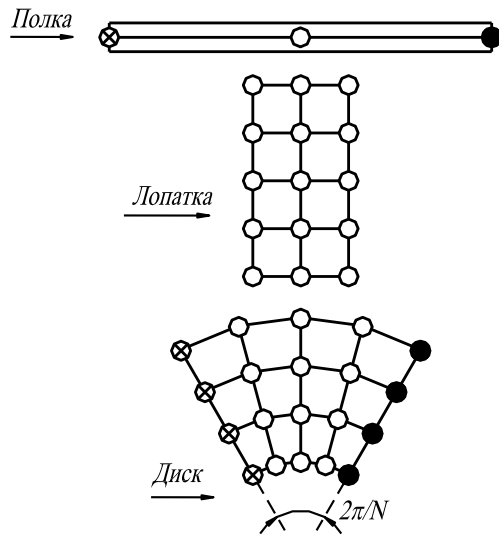


Рис. 3.4. Конечноэлементная модель сектора ЦСС

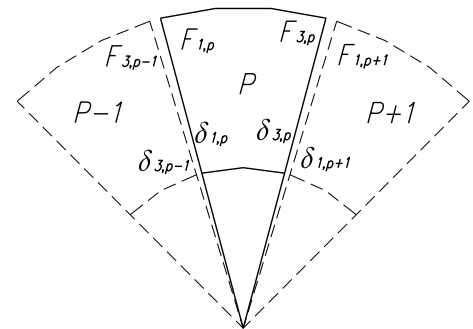


Рис. 3.5. Период поворотно-симметричной системы

**Узлы**

- ⊗ - Левый
- - Средний
- - Правый

Динамическое уравнение равновесия периодического элемента после применения метода статической конденсации в динамических задачах можно представить в матричной форме [51, 52]

$$\left( \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] & [M_{13}] \\ [M_{21}] & [M_{22}] & [M_{23}] \\ [M_{31}] & [M_{32}] & [M_{33}] \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

с  $[K_{21}] = [K_{12}]^T$ ;  $[K_{31}] = [K_{13}]^T$ ;  $[K_{32}] = [K_{23}]^T$

и  $[M_{21}] = [M_{12}]^T$ ;  $[M_{31}] = [M_{13}]^T$ ;  $[M_{32}] = [M_{23}]^T$ ,

при этом  $[M_{ij}], [K_{ij}], \{\delta_1\}, \{\delta_2\}, \{\delta_3\}$  соответственно блоки матриц масс, жесткости и перемещения на левом, в среднем и на правом рядах элементов (рис. 3.4), а  $\{F_1\}, \{F_2\}, \{F_3\}$  описывают соответствующие силы в сечении.

Для циклически-симметричных систем перемещения двух соседних элементов (рис. 3.5) различаются только по фазе [37, 51, 52, 149, 151, 152]

$$\{\delta_{1,p+1}\} = \{\delta_{1,p}\}e^{\psi}, \{\bar{\delta}\}_p = \text{Re}\{\delta\}_p, \quad (3.20)$$

где  $\psi = i\alpha$ ,  $\alpha = \frac{2\pi n}{N}$  и  $i = \sqrt{-1}$ . (3.21)

Причем  $p=0, 2, \dots, (N-1)$  - число подструктур и  $n=0, 1, 2, \dots, N/2$  для четных  $N$  и  $n=0, 1, 2, \dots, (N-1)/2$  для нечетных  $N$ .

Перемещения на левой границе элемента  $\{\delta_{1,p+1}\}$  соответствуют перемещениям на правой границе элемента  $\{\delta_{3,p}\}$ , т.е.

$$\{\delta_{1,p+1}\} = \{\delta_{3,p}\}. \quad (3.22)$$

Из равенства (3.20) и (3.22) следует  $\{\delta_{3,p}\} = \{\delta_{1,p}\}e^{\psi}$ . (3.23)

Для усилий на правой и левой границах элемента справедливо соотношение

$$\{F_{3,p}\} = -\{F_{1,p}\}e^{\psi}. \quad (3.24)$$

Для свободных колебаний общей структуры внешние силы внутри выделенного сектора исчезают и остаются только силы на границах ЦСС

$$[F]_p = \begin{bmatrix} F_{1,p} \\ 0 \\ F_{3,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1,p} \\ 0 \\ -e^{\psi} F_{1,p} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Из уравнений (3.19), (3.22) и (3.24) можно получить уравнение равновесия для свободных колебаний системы как

$$([\bar{K}] - \omega^2[\bar{M}])\{\bar{\delta}\} = 0, \quad (3.26)$$

где  $[\bar{\delta}] = \begin{bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{bmatrix}$ , (3.27)

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} ([K_{11}] + [K_{33}] + e^{-\psi}[K_{13}] + e^{\psi}[K_{31}]) & ([K_{12}] + e^{-\psi}[K_{32}]) \\ ([K_{21}] + e^{\psi}[K_{23}]) & [K_{22}] \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} ([M_{11}] + [M_{33}] + e^{-\psi}[M_{13}] + e^{\psi}[M_{31}]) & ([M_{12}] + e^{-\psi}[M_{32}]) \\ ([M_{21}] + e^{\psi}[M_{23}]) & [M_{22}] \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

Разложим выражения (3.27), (3.28) и (3.29) по формуле Эйлера. Тогда получим [51]

$$[\bar{K}] = [K]^{\text{Re}} + i[K]^{\text{Im}}, \quad (3.30)$$

$$[\bar{M}] = [M]^{\text{Re}} + i[M]^{\text{Im}}, \quad (3.31)$$

$$\{\bar{\delta}\} = \{\delta\}^{\text{Re}} + i\{\delta\}^{\text{Im}}, \quad (3.32)$$

$$[K]^{\text{Re}} = \begin{bmatrix} [K_{11}] + [K_{33}] + ([K_{13}] + [K_{31}])\cos\alpha & [K_{12}] + [K_{32}]\cos\alpha \\ [K_{21}] + [K_{23}]\cos\alpha & [K_{22}] \end{bmatrix},$$

$$[K]^{\text{Im}} = \begin{bmatrix} ([K_{13}] - [K_{31}])\sin\alpha & -[K_{32}]\sin\alpha \\ [K_{23}]\sin\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

Структура матриц  $[M]^{\text{Re}}$ ,  $[M]^{\text{Im}}$  аналогична  $[K]^{\text{Re}}$ ,  $[K]^{\text{Im}}$  нетрудно заметить, что реальная часть матриц симметрична, а мнимая часть- кососимметрична.

С помощью соотношений (3.25 - 3.32) получаем [36, 51, 149, 151, 152]

$$\left( \begin{bmatrix} [K]^{\text{Re}} & -[K]^{\text{Im}} \\ [K]^{\text{Im}} & [K]^{\text{Re}} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M]^{\text{Re}} & -[M]^{\text{Im}} \\ [M]^{\text{Im}} & [M]^{\text{Re}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \{\delta\}^{\text{Re}} \\ \{\delta\}^{\text{Im}} \end{bmatrix} = 0. \quad (3.33)$$

Зависимость (3.33) представляет собой задачу на собственные значения с действительными симметричными матрицами [40]. Порядок этих матриц не зависит от числа секторов, а определяется количеством степеней свободы одного сектора. Решение проблемы на собственные значения производится методом Якоби, итерации [9, 21, 25]. Дополнительно расчет матриц масс и жесткости в выражении (3.19) проводится МКЭ с помощью конечных элементов STI218 или SOLID20 [10, 18, 51].

Действительные перемещения для нулевого сектора и s-й сектора можно представить в виде [51]

$$\{\bar{\delta}_0\} = \{\delta_0\}^{\text{Re}}; \quad (3.34)$$

$$\{\bar{\delta}_s\} = \{\delta_0\}^{\text{Re}} \cos\alpha - \{\delta_0\}^{\text{Im}} \sin\alpha, \quad (3.35)$$

Если лопатка имеет угол установки, отличный от нуля, перемещения узлов  $\delta_d$  (диска) и  $\delta_b$  (лопатки) независимы и могут быть соединены по гипотезе Кирхгофа-Лява (для треугольных конечных элементов) как [51]

$$\begin{cases} w_b = w_d \\ u_b = u_d + z \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_d \\ v_b = v_d + z \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_d \\ \varphi_{ib} = \varphi_{id}; \quad i = X, Y, Z \end{cases}. \quad (3.36)$$

Перемещение узлов одного сектора системы «диск-лопатка» обозначены вектором  $\{\delta\} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_{m_1} \ \delta_d \ \delta_b \ \delta_{m_1+3} \ \dots \ \delta_m]^T$ , где  $\delta_d$  - перемещение узла  $(m_1+1)$  на средней поверхности диска;  $\delta_b$  - перемещение узла  $(m_1+2)$  на средней поверхности лопатки. Из выражения (3.35) можно записать вектор перемещения узлов сектора в виде

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{m_1} \\ \delta_d \\ \delta_b \\ \delta_{m_2} \\ \vdots \\ \delta_m \end{bmatrix} = [T_C]_i \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{m_1} \\ \delta_d \\ \delta_{m_2} \\ \vdots \\ \delta_m \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

или  $\{\delta_i\} = [T_C]\{\delta_i'\}$ , где  $m$ - означает общее число узлов в секторе  $i$ ,  $\{\delta_i\}$  - имеет

размерность  $(6m \times 1)$ ,  $\{\delta_i'\}$  -  $(6m-6 \times 1)$ ,  $[T_C]$  -  $(6m, 6m-6)$  и  $[T_C] = \begin{bmatrix} [P] & 0 \\ & [Q] \\ 0 & [R] \end{bmatrix}$ ,

где  $[P]$  - единичная матрица размерности  $(6m_1 \times 6m_1)$ ;  $[R]$  - единичная матрица размерности  $(6(m-m_2+1) \times 6(m-m_2+1))$ ;  $[Q]$  - определена выражением (3.36).

С использованием схемы (3.19-3.33) и выражения (3.37) дан общий алгоритм для исследования характеристики собственных колебаний рабочих колес с углом установки лопатки. После расчета можно получить вектор перемещения в виде  $\{\delta_i\} = [T_C]\{\delta_i'\}$ .

Для трехмерного конечного элемента такая трансформация не требуется, потому что связь перемещений диска и лопатки достигается наличием большого числа общих узловых точек.

Для тестирования точности и сходимости метода МЦС исследованы собственные колебания модельного рабочего колеса турбомашин, содержащего 24 лопатки. Геометрические размеры и характеристики материала рассчитываемой конструкции: внутренний радиус - 0,0135 м, внешний радиус -

0,06 м, толщина диска и лопатки - 0,002 м, длина лопатки - 0,036 м, ширина лопатки - 0,012 м, модуль упругости - 210 ГПа, плотность - 7850 кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона - 0,3.

Рабочее колесо, если пренебречь неточностью изготовления отдельных его элементов, можно представить как циклически симметричные системы, их главный порядок симметрии равен числу лопаток диска.

Конечноэлементная модель сектора рабочего колеса на основе треугольных конечных элементов (STI218) [10, 18, 51] содержит 174 степени свободы и показана на рис. 3.6. Результаты расчета частот и форм собственных колебаний модельного рабочего колеса без расстройки в сравнении с данными эксперимента (Эксп.) приведены в таблице 3.2 и на рис. 3.7 и 3.8 в виде частотной диаграммы.

Таблица 3.2

Сопоставление расчетных и экспериментальных значений частот собственных колебаний модельного рабочего колеса без расстройки (Гц)

n	m=0			m=1			m=2		
	МЦС (STI218)	Эксп. [9]	$\Delta f(\%)$	МЦС (STI218)	Эксп. [9]	$\Delta f(\%)$	МЦС (STI218)	Эксп. [9]	$\Delta f(\%)$
0	260,1	265	-1,85	1461	1386	5,41	2697	-	-
1	251,1	210	21	1522	1362	11,75	4513	4281	5,42
2	320,7	340	-5,68	1737	1723	0,81	4966	4950	0,32
3	492	501	-1,80	2147	2109	1,80	5739	5820	-,39
4	669	681	-1,76	2714	2714	0,00	6811	6812	-0,01
5	808	803	0,62	3354	3452	-2,84	7661	7021	9,2
6	912	922	-1,08	4002	4102	-2,44	7675	-	-
7	987	938	5,22	4613	4738	-2,64	7664	-	-
8	1042	961	8,43	5155	5112	0,84	7599	-	-
9	1080	1008	7,14	5605	5513	1,67	7545	-	-
10	1105	1027	7,59	5947	5983	-0,60	7486	-	-
11	1119	1030	8,64	6166	6212	-0,74	7437	-	-
12	1124	1032	8,91	6243	6221	0,35	7416	-	-

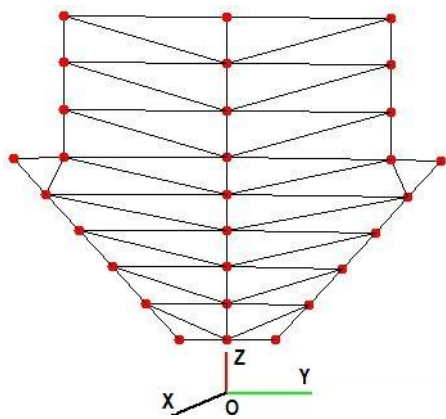


Рис. 3.6. Конечноэлементная модель одного сектора

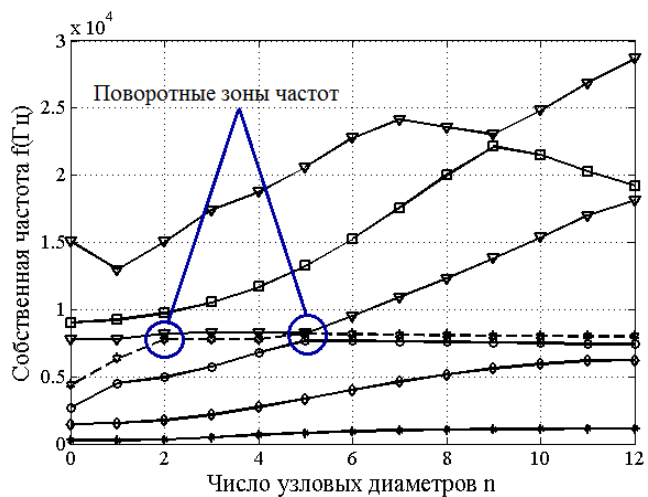


Рис. 3.7. График частот собственных колебаний для модельного рабочего колеса без расстройки

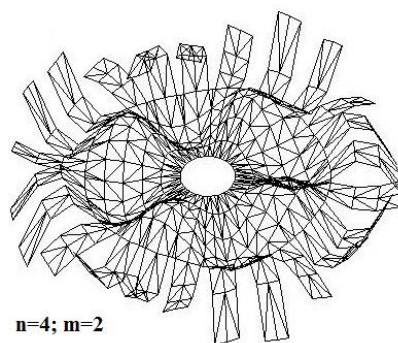
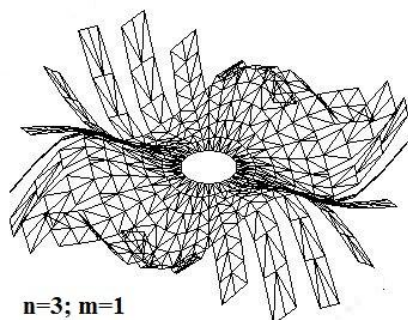
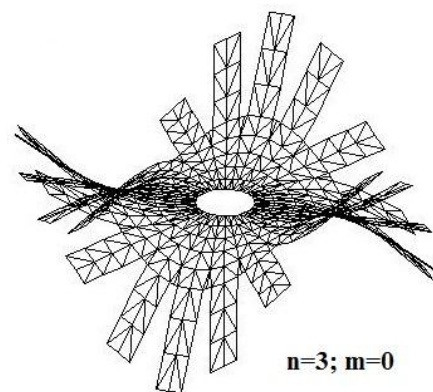
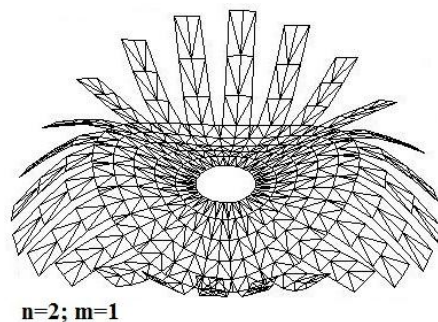
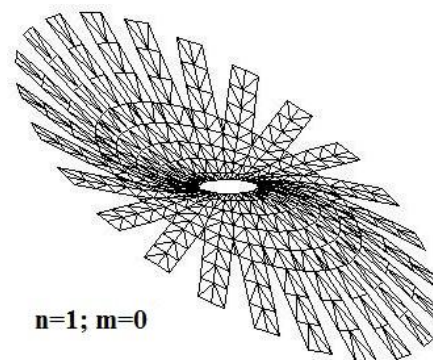
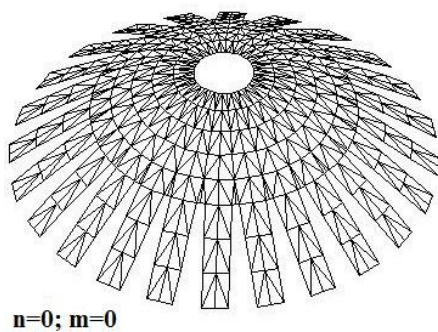


Рис. 3.8. График форм колебаний модельного рабочего колеса в зависимости от числа узловых диаметров « $n$ » и узловых окружностей « $m$ »

Из рис. 3.7 видно, что на графике частот собственных колебаний рабочих колес в зависимости от числа узловых диаметров и окружностей часто появляются поворотные зоны частот. Из таблицы 3.2 видно, что численные результаты МЦС на основе МКЭ при использовании элемента STI218 хорошо совпадают с данными эксперимента, а также обеспечивают сходимость решения. Однако использование треугольных конечных элементов STI218 позволяет учитывать модели со сложной геометрией сечения. Дополнительно при использовании свойства циклической поворотной симметрии количество степеней свободы расчета значительно уменьшается (из 3312 степеней свободы при использовании полной модели число степеней свободы уменьшено до 174), что снижает трудоемкость и численные затраты времени на ЭВМ.

При использовании свойства циклической поворотной симметрии характеристики собственных колебаний по аналогии с диском характеризуются числом узловых диаметров « $n$ » или числом волн в окружном направлении « $m$ ». При формах колебаний с  $n = 0$  или с  $n = N/2$  для нечетных  $N$  получены одинарные собственные значения. При этом все лопатки рабочего колеса колеблются в первом случае с одинаковой фазой, а во втором - в противофазе. Двойные кратные собственные значения имеют место при формах колебаний  $0 < n < N/2$ , а соответствующие им собственные векторы являются линейно независимыми. При наличии расстройки расчет всей системы дает две близкие собственные частоты, которым соответствуют практически ортогональные собственные векторы.

### **3.3. Метод моделирования рабочих колес на основе пружинно-массовой модели для исследования их вибрационных характеристик**

При изучении роторов осевых и радиальных турбомашин рабочие колеса обычно рассматриваются как системы с конструктивной поворотной симметрией. При этом можно использовать пружинно-массовую модель (ПММ), чтобы моделировать рабочие колеса для исследования их динамические характеристики, а также влияния расстройки на характеристики их колебания. В таких моделях каждая лопатка представлена одной сосредоточен-

ной массой в верхней части безмассовой пружины, прикрепленной к тележке. Тележками без трения, связанными друг с другом через упругие пружины, представлены секторы диска (рис. 3.9). Для этой модели легко построить математическое описание, но трудно определить эквивалентные физические величины модели, такие как масса, жесткость лопатки и диска.

### 3.3.1 Математическое моделирование рабочего колеса на основе пружинно-массовой модели

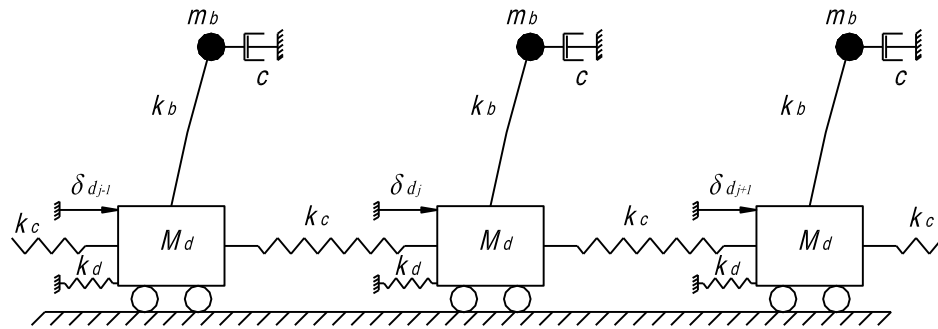


Рис. 3.9. Моделирование рабочего колеса на базе пружинно-массовой модели

На основе ПММ рабочее колесо турбомашин без расстройки может быть разделено на  $N$  одинаковых секторов и показано на рис. 3.9 [64, 98, 102], где  $N$  - порядок симметрии системы (или количество лопаток).

Уравнения движения  $j$ -ого сектора имеет вид

$$m_b \ddot{\delta}_{b_j} + c \dot{\delta}_{b_j} + k_b(1 + i\eta)(\delta_{b_j} - \delta_{d_j}) = f(t), \quad (3.38)$$

$$M_d \ddot{\delta}_{d_j} + k_b(1 + i\eta)(\delta_{d_j} - \delta_{b_j}) + k_d \delta_{d_j} + k_c(2\delta_{d_j} - \delta_{d_{j+1}} - \delta_{d_{j-1}}) = 0, \quad (3.39)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\delta_{d_j}, \delta_{b_j}$  - перемещения сосредоточенных масс  $j$ -ой лопатки и  $j$ -ого сектора диска;  $\eta, c$  - коэффициенты демпфирования;  $m_b, M_d$  - соответственно эквивалентные массы лопатки и одного сектора диска;  $k_b, k_d, k_c$  - соответственно жесткость лопатки, жесткость одного сектора диска и жесткость связи между секторами диска;  $f(t)$  - возбуждающая сила.

Уравнение движения рабочего колеса без расстройки на основе ПММ может быть записано в матричном виде

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{f(t)\}. \quad (3.40)$$



Предполагается, что решение  $\{\delta\}$  существует и имеет такую же формулу  $\{\delta\} = \{\delta_0\}e^{i\omega t}$  и  $\{\delta_0\} = \{\delta_{b0_1}, \delta_{d0_1}, \delta_{b0_2}, \delta_{d0_2}, \dots, \delta_{b0_N}, \delta_{d0_N}\}^T$  - вектор амплитуд перемещения сосредоточенных масс лопатки и секторов диска;  $i = \sqrt{-1}$ . Далее вектор возбуждающих сил представлен как  $\{f(t)\} = \{f_0\}e^{i\omega t}$ ;  $\{f_0\} = \{1, 0, e^{i\Phi}, 0, \dots, e^{i(n-1)\Phi}, 0, \dots, e^{i(N-1)\Phi}, 0\}F_0$ ;  $\Phi = \frac{2\pi C}{N}$ ;  $C$  - порядок возбуждений двигателя;  $F_0$  - коэффициент, не зависящий от времени. Тогда уравнение (3.40) может быть записано как

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{\delta_0\} = \{f_0\}, \quad (3.41)$$

$$\text{где } [K] = \begin{bmatrix} k_b^* & -k_b^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_b^* & k_d + 2k_c + k_b^* & 0 & -k_c & \dots & 0 & 0 & -k_c \\ 0 & 0 & k_b^* & -k_b^* & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_b^* & -k_b^* \\ 0 & -k_c & 0 & 0 & \dots & -k_c & -k_b^* & k_d + 2k_c + k_b^* \end{bmatrix} - \text{матрица}$$

жесткости рабочего колеса размером  $2N \times 2N$  и  $k_b^* = k_b(1 + i\eta)$ ,

$$M = \begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_d \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} - \text{соответственно}$$

матрицы масс и демпфирования системы размером  $2N \times 2N$ .

Из уравнения (3.41) можно получить уравнение равновесия для свободных колебаний рабочего колеса без демпфирования как

$$(-\omega^2[M] + [K])\{\delta_0\} = 0. \quad (3.42)$$

Зависимость (3.42) представляет собой задачу на собственные значения. Решение проблемы на собственные значения производится методом Якоби, итерации [9, 21, 25] и др.

### 3.3.2. Определение эквивалентных параметров модели

**Определение параметров  $k_b$ ,  $m_b$  лопатки.** Лопатка может изображаться в виде консольной балки и может рассматриваться, как одна степень свободы вибратора, которая показана на рис. 3.10 [102].

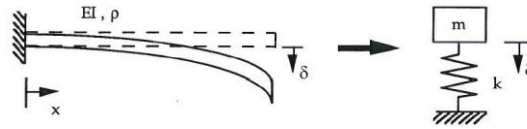


Рис. 3.10. Моделирование балки на основе пружинно-массовой модели

Уравнение движения изгиба непрерывной консольной балки может быть записано как [1, 27, 28]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right) = \rho A \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}, \quad (3.43)$$

где  $E$  - модуль упругости;  $A$  - площадь сечения балки;  $I$  - инерционный момент поперечного сечения балки.

Точное решение для собственных частот консольной балки из частного дифференциального уравнения определено в следующем виде

$$\omega_n = k_n \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}, \quad k_n = 3,515; 22,03, \dots \quad (3.44)$$

Собственная частота пружинно-массовой модели определена как

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (3.45)$$

где  $k$  и  $m$  - эквивалентная жесткость и масса балки.

С помощью анализа между непрерывной балкой и пружинно-массовой моделью находим следующее отношение

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = f_n' \frac{3EI}{\rho A l^4} = f_n' \frac{3EI}{\rho A l^3}. \quad (3.46)$$

Из уравнения (3.46) известно, что  $k_b = \frac{3EI}{l^3}$  - эквивалентная статическая жесткость консольной балки;  $m_b = \frac{\rho A l}{f_n'}$  - масса балки;  $f_n' = \frac{f_n^2}{3}$  - коэффициент, который зависит от формы колебаний и граничных условий.

**Определение параметров диска.** Аналогично можно идентифицировать параметры диска. Диск можно разделить на  $N$  одинаковых секторов как  $N$  тележек без трения, которые связаны друг с другом через упругие пружины. Каждый сектор состоит из одной лопатки (см. рис. 3.11) [102].

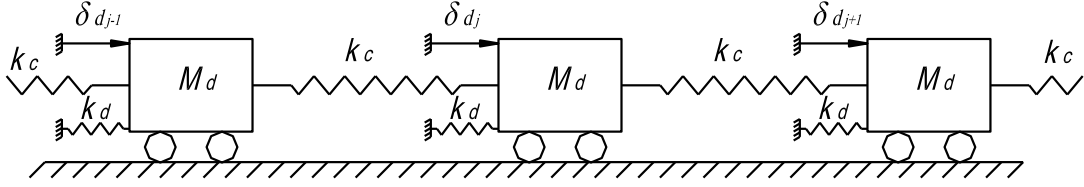


Рис. 3.11. Моделирование диска на основе пружинно-массовой модели

Уравнение движения ПММ для колебаний одного сектора диска может быть написано в следующем виде

$$k_d + 2k_c \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi n}{N} \right) \right) - \omega^2 M_d = 0, \quad (3.47)$$

где  $n$  - число узловых диаметров;  $N$  - число лопаток;  $k_d$  - эквивалентная статическая жесткость сектора и  $k_c$  - эквивалентная жесткость связи между секторами диска. Однако основное уравнение движения круглых и кольцевых пластин в полярных координатах может быть написано как [56]

$$D\Delta^4 \delta + \rho_d h \ddot{\delta} = p_d(x, y, t), \quad (3.48)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа в полярных координатах;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ :  $E$  - модуль

упругости пластины;  $h$  - толщина пластины;  $\mu$  - коэффициент Пуассона;  $\rho_d$  - плотность материала;  $\rho_d h$  - масса пластины, отнесенная к единице поверхности;  $\delta$  - перемещение круглых пластин;  $p_d(x, y, t)$  - внешняя сила.

Частота собственных колебаний круглых и кольцевых пластин имеет вид

$$f_n^2 = \frac{g_n^4}{(2\pi)^2 b^4} \frac{D}{\rho_d h} = \left( \frac{g_n}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{g_n^2}{b^4} \right) \frac{D}{\rho_d h} = \left( \frac{g_n}{2\pi} \right)^2 \frac{K_e}{M_d}, \quad (3.49)$$

где  $g_n$  - параметр частоты, который зависит от формы колебаний, граничных условий пластины и свойства материала.

Жесткость  $K_e$  является эквивалентной статической жесткостью сектора и имеет вид

$$K_e = k_d + 2k_c \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right). \quad (3.50)$$

Из уравнений (3.49) и (3.50) имеем

$$f_n^2 = \left( \frac{g_n}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{k_d + 2k_c(1 - \cos(2\pi n/N))}{M_d} \right). \quad (3.51)$$

При исследовании собственных колебаний круглых пластин, значения  $f_n$  и  $g_n$  в уравнении (3.51) получены с помощью проведения экспериментов или МКЭ с использованием кольцевых элементов (см. пункт 3.1) или программного комплекса ANSYS [2, 23]. Предполагается, что масса  $M_d$  известна, тогда мы используем два значения  $f_i$  и  $f_j$ , чтобы определить значения  $k_d$  и  $k_c$  в уравнении (3.51). Следует отметить, что жесткость  $k_d$  является маленьким значением, которое изображает движение твердого тела диска, поэтому для простоты  $k_d$  может не учитываться, когда вычисляем  $k_c$ . Это правильно, потому что жесткость  $k_d$  не влияет на динамические характеристики системы.

**Идентификация параметров диска с лопатками.** Параметры отдельной лопатки ( $m_b, k_b$ ) и отдельного диска ( $M_d, k_d, k_c$ ) определены выше, однако для рабочего колеса эти параметры должны идентифицироваться. Параметры системы идентифицируются с помощью нескольких экспериментальных собственных частот.

Из характеристик колебания рабочего колеса без расстройки известно, что когда число узловых диаметров увеличивается, то кривая частоты приближается к первой форме колебаний. Эта характеристика является характеристикой колебания диска, и изменение кривой частоты зависит от жесткости  $k_c$  диска, так как жесткость  $k_d$  маленькая и не влияет на динамические характеристики системы. С помощью изменения жесткости  $k_c$  другие параметры не изменяются и мы строим график частоты в зависимости от жесткости  $k_c$  (рис. 3.12) [19, 155]. На графике мы отметим точки  $P$  и  $Q$ , соответствующие экспериментальным значениям частоты колебаний. Из графика

выбираем кривую частоты, которая расположена ближе к точкам *P* и *Q*. Таким образом, мы получили параметры рабочего колеса на основе ПММ.

### 3.3.3. Результаты исследования

Для тестирования точности и сходимости при расчёте свободных колебаний на основе ПММ рассмотрим модельное рабочее колесо, содержащее 24 лопатки. Геометрические размеры и характеристики материала рассчитываемой конструкции: внутренний радиус - 0,0135 м; внешний радиус - 0,06 м; толщина диска и лопатки - 0,002 м; длина лопатки - 0,036 м; ширина лопатки - 0,012 м; модуль упругости материала - 210 ГПа; плотность - 7850 кг/м<sup>3</sup>; коэффициент Пуассона - 0,3.

Из формулы (3.46) получим массу и жесткость лопатки  $m_b = \frac{\rho A l}{f_2'} = 0,00165$ ;  $k_b = \frac{3EI}{l^3} = 108025$ . Значения частот собственных колебаний диска без узловых окружностей и параметр частоты  $g_n$  получены с помощью МКЭ на основе кольцевых конечных элементов (STI2R6) (см. пункт 3.1) и программного комплекса ANSYS и приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3

<b>n</b>		1	2	3	4	5	6
<b>f</b> <b>(Гц)</b>	ANSYS (SOLID45)	763	932	1751	3008	4597	6488
	МКЭ (STI2R6)	765	939.3	1762	3029	4637	6557
$g_n$		2.2	2.7	3.4	4.6	5.8	7.0

Из формулы (3.49) даны масса и жесткости диска  $M_d = \frac{\pi R^2}{N} \frac{\rho h}{g_2} = 0,007$ ;

$k_{c0} = 119683$ ;  $k_d = 320$ .

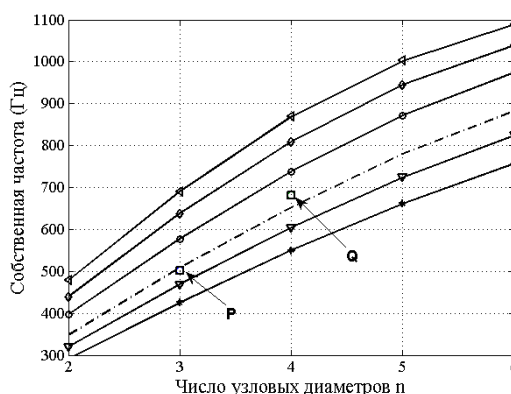


Рис. 3.12. График частоты первой формы колебаний рабочего колеса в зависимости от жесткости  $k_c$

Из рис. 3.12 выбираем жесткость связи диска  $k_c = 1,3 \cdot k_c = 155590$ . Таким образом, мы получили параметры диска с 24-мя лопатками:  $m_b = 0,00165$ ;  $k_b = 108025$ ;  $M_d = 0,007$ ;  $k_d = 320$ ;  $k_c = 155590$ . Подставив эти параметры конструкции в уравнение (3.42), исследуем характеристики собственных колебаний диска с 24-мя лопатками без расстройки. Результаты исследования частот и форм собственных колебаний модельного рабочего колеса без расстройки на основе ПММ приведены в таблице 3.4 и на рис. 3.13.

Таблица 3.4

Частоты Собственных колебаний модельного рабочего колеса без узловых окружностей при различном числе узловых диаметров

<b>n</b>		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>f</b> (Гц)	<b>ПММ</b>	347,7	508	653,7	779,6	882,5	961,3	1018	1056	1080	1094	1098
	<b>Эксп. [9]</b>	340	501	681	803	922	938	961	1008	1027	1030	1032
<b><math>\Delta f</math> (%)</b>		2,2	2,4	-4,0	-2,9	-4,2	2,5	5,9	4,8	5,2	6,2	6,4

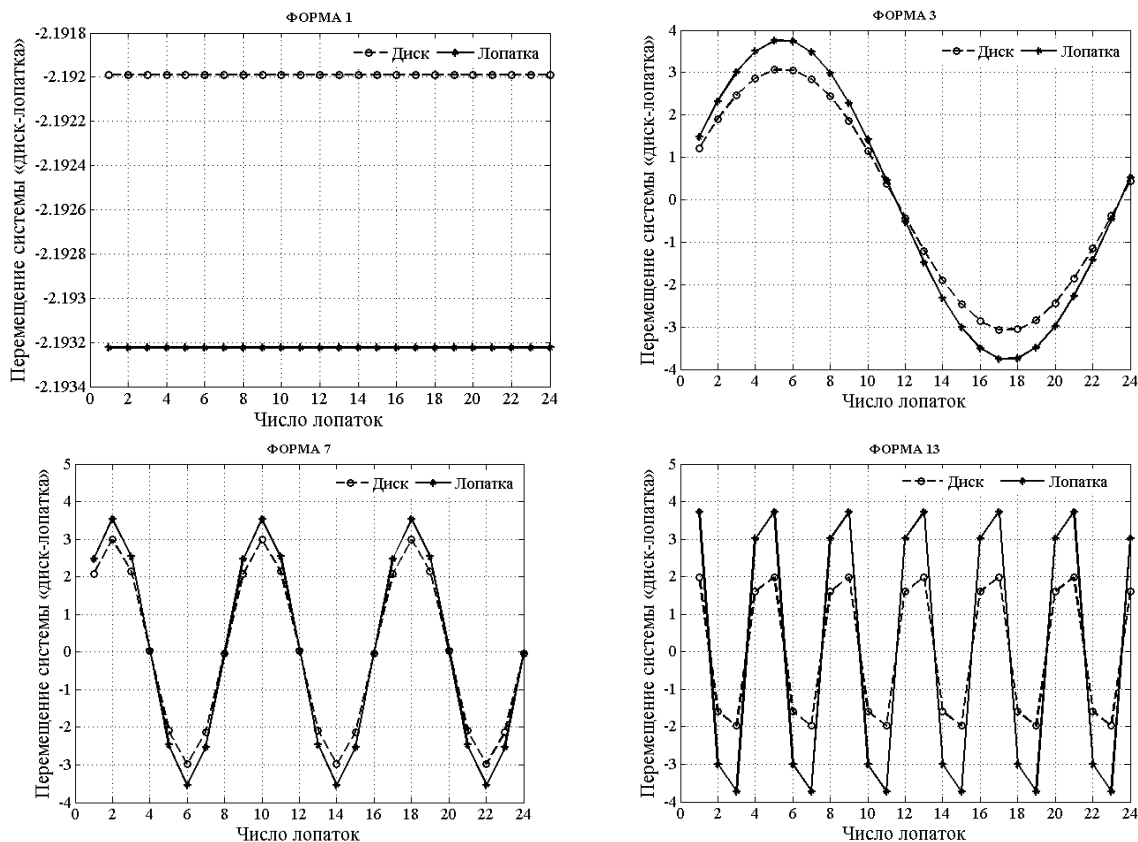


Рис. 3.13. График форм собственных колебаний модельного рабочего колеса без расстройки

Из таблицы 3.4 видно, что результаты расчета собственных частот колебаний для рабочего колеса на основе ПММ хорошо совпадают с экспериментальными данными.

### 3.4 Исследование влияния вращения на собственные колебания рабочих колес турбомашин

Задача расчета динамики и прочности механических систем на практике не является линейной при наличии большого разнообразия сложных факторов. Известно, что рабочие колеса турбомашин часто работают в сложных условиях не только переменных аэродинамических нагрузок, но и под действием большой скорости вращения, следовательно, рабочие элементы роторов подвержены действию сильных полей центробежных сил, которые существенно изменяют динамические характеристики рабочих колес. В данной работе рассматривается геометрически нелинейная задача, связанная с влиянием вращения на матрицу жесткости системы МКЭ на основе трехмерных конечных элементов (SOLID20) [51, 18, 179] и треугольных конечных элементов переменной толщины (STI218) [10, 18], которая является частью комплексного расчета на долговечность. Учет геометрической нелинейности позволяет повысить точность расчета до 20% (см. [46, 94, 126]).

Для определения влияния вращения на матрицу жесткости системы тонких оболочек типа рабочих лопаток рассмотрим конструкцию в общей системе координат, когда рабочее колесо вращается вокруг оси OX с угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 3.14).

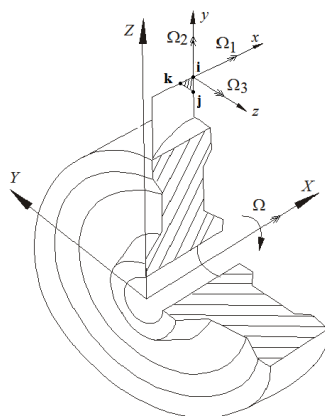


Рис. 3.14. Общая и местная системы координат в алгоритме учета вращения

Согласно принципу Даламбера, уравнение движения рабочих колес для линейного демпфирования при использовании МКЭ и учёте влияния центробежных сил может быть описано следующим уравнением [9, 11, 46, 51]

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + ([K] + [K_G])\{\delta\} = \{F_E\}, \quad (3.52)$$

где  $\{\delta\}$ ,  $\{\dot{\delta}\}$ ,  $\{\ddot{\delta}\}$  - соответственно векторы перемещений, скоростей и ускорений узловых точек,  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  - матрицы масс, матрица демпфирования и матрица жёсткости,  $[K_G]$  - матрица геометрической жёсткости,  $\{F_E\}$  - вектор внешних действующих сил.

Матрица геометрической жесткости  $[K_G]$ , учитывающая влияние изгибных перемещений на деформации срединной поверхности, определена как

$$[K_G] = \int_V [G]^T [S] [G] dV, \quad (3.53)$$

где матрицы  $[S]$ ,  $[G]$  определяются уравнениями (3.54) и (3.55) для трехмерных и треугольных конечных элементов, соответственно

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^0 [I_3] & \sigma_{yx}^0 [I_3] & \sigma_{zx}^0 [I_3] \\ \sigma_{xy}^0 [I_3] & \sigma_{yy}^0 [I_3] & \sigma_{zy}^0 [I_3] \\ \sigma_{xz}^0 [I_3] & \sigma_{yz}^0 [I_3] & \sigma_{zz}^0 [I_3] \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} [I_3] \frac{\partial}{\partial x} \\ [I_3] \frac{\partial}{\partial y} \\ [I_3] \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} [N], \quad [I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

$$\text{и} \quad [S] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^0 & \sigma_{yx}^0 \\ \sigma_{xy}^0 & \sigma_{yy}^0 \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} [N], \quad (3.55)$$

здесь  $[N]$  - матрица функций форм,  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{yy}^0$ ,  $\sigma_{zz}^0$ ,  $\sigma_{xy}^0$ ,  $\sigma_{yz}^0$ ,  $\sigma_{zx}^0$  - начальные напряжения, полученные с помощью статического уравнения (3.56) и известного уравнения напряжения (3.57) при учете всех действующих сил

$$[K]\{\delta\} = \{F_E\}, \quad (3.56)$$

$$[\sigma^0] = [D]([B]\{\delta\} - \{\varepsilon_0\}), \quad (3.57)$$

где  $[D]$ ,  $[B]$ ,  $\{\varepsilon_0\}$  - соответственно матрицы упругости, дифференцирования перемещений и вектор дополнительной деформации, которые детально опи-



саны в разделе 2.5 и работах [18, 51, 179].

Если рассматривается динамическая задача без демпфирования и без внешних возмущений, то уравнение (3.52) запишется как

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + ([K] + [K_G])\{\delta\} = \{F_\Omega\}, \quad (3.58)$$

где  $\{F_\Omega\}$  - вектор центробежных сил.

Для трехмерных конечных элементов центробежная сила определена как

$$\{F_\Omega\} = \int_V [N]^T \rho \{a_\Omega\} dV, \quad (3.59)$$

$$\text{где } \{a_\Omega\} = 2\Omega \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} - \Omega^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} = 2\Omega[E][N]\{\dot{\delta}\} - \Omega^2[\bar{E}][N]\{\delta\},$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\bar{E}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho - \text{плотность материала, } [N] - \text{матрица}$$

функций форм.

Тогда выражение  $\{F_\Omega\}$  примет вид

$$\{F_\Omega\} = 2\Omega\rho \int_V [N]^T [E][N]\{\dot{\delta}\} dV - \Omega^2\rho \int_V [N]^T [\bar{E}][N]\{\delta\} dV = [M_C]\{\dot{\delta}\} - [\bar{M}]\{\delta\}. \quad (3.60)$$

Для треугольных конечных элементов центробежная сила определена как [46, 51]

$$\{F_\Omega\} = \rho \int_V [N]^T [A_C][N]\{\dot{\delta}\} dV - \rho \int_V [N]^T [A_R][N]\{\delta\} dV = [M_C]\{\dot{\delta}\} - [\bar{M}]\{\delta\}, \quad (3.61)$$

$$\text{где } [A_R] = \begin{bmatrix} \Omega_2^2 + \Omega_3^2 & -\Omega_2\Omega_1 & -\Omega_3\Omega_1 \\ -\Omega_1\Omega_2 & \Omega_1^2 + \Omega_3^2 & -\Omega_3\Omega_2 \\ -\Omega_1\Omega_3 & -\Omega_2\Omega_3 & \Omega_1^2 + \Omega_2^2 \end{bmatrix}, \quad [A_C] = \begin{bmatrix} 0 & 2\Omega_3 & 2\Omega_2 \\ 2\Omega_3 & 0 & 2\Omega_1 \\ 2\Omega_2 & 2\Omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  - угловые скорости элемента вокруг осей местной системы координат (рис. 3.14).

Подставив уравнение (3.60) или (3.61) в (3.58), получим уравнение движения системы в виде

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [M_C]\{\dot{\delta}\} + ([K] + [K_G] - [\bar{M}])\{\delta\} = 0, \quad (3.62)$$

где  $[\bar{M}]$  и  $[M_C]$  - матрицы псевдомасс и Кориолиса, определенные в уравнении (3.60) или (3.61).

В соответствии с исследованиями, выполненными в работе [9], влияние Кориолисова ускорения на колебания, т.е. вторым членом в уравнении (3.62), можно пренебречь.

Выражения (3.52-3.62) являются общей схемой для расчета собственных колебаний тела вращения с учетом влияния вращения на матрицу жесткости системы МКЭ. В этой работе использованы эта схема расчета и свойство циклической поворотной симметрии, чтобы исследовать характеристики собственных колебаний рабочих колес турбомашин с учетом влияния вращения МКЭ на основе одного сектора. Алгоритм расчета собственных колебаний рабочих колес МКЭ при использовании свойства циклической поворотной симметрии описан детально в разделе 3.2. Решение задачи собственных колебаний турбомашин с применением МКЭ при расчёте влияния вращения состоит из следующих основных этапов:

- создание исходных данных. Основными исходными данными являются геометрия, свойства материала, граничные условия, угловая скорость, координаты и топология элементов рабочего колеса;
- описание элементов одного сектора в локальных координатах (трансформация глобальных координат узлов элементов в локальные координаты каждого элемента). Вычисление матриц жёсткости, псевдомасс, масс и векторов нагрузок от вращения для элементов;
- преобразование матриц жёсткости, псевдомасс, масс и векторов нагрузок для элементов в глобальных координатах для составления ансамбля элементов. Формирование матриц жёсткости, масс и вектора нагрузок от вращения для одного сектора;
- решение статической задачи под действием нагрузок от вращения из уравнения  $[K]\{\delta\} = [F_\Omega]$ ;

- вычисление матриц начальных напряжений для элементов от вращения из уравнения  $[\sigma^0] = [D]([B]\{\delta\} - \{\varepsilon_0\})$ ;
- формирование матрицы геометрической жёсткости от вращения для одного сектора  $[K_G]$ ;
- формирование суммарной матрицы жёсткости  $[K] + [K_G] + [K_R]$ ;
- построение матриц жесткости и масс рабочего колеса  $[K]^{Re}, [K]^{Im}, [M]^{Re}, [M]^{Im}$  при использовании свойства циклической поворотной симметрии.
- определение частот и форм собственных колебаний рабочего колеса из уравнения 
$$\left( \begin{bmatrix} [K]^{Re} & -[K]^{Im} \\ [K]^{Im} & [K]^{Re} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M]^{Re} & -[M]^{Im} \\ [M]^{Im} & [M]^{Re} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \{\delta\}^{Re} \\ \{\delta\}^{Im} \end{bmatrix} = 0;$$
- печать результатов и описание графиков результатов.

Блок-схема алгоритма расчёта приведена на рис. 3.17.



Рис. 3.15 Блок-схема алгоритма расчёта влияния вращения на характеристики собственных колебаний рабочих колес турбомашин

Для тестирования точности и сходимости алгоритма и созданной программы PISVRBD для расчета влияния вращения на характеристики собственных колебаний решена задача о собственных колебаниях диска с 8-ю лопатками: внутренний радиус - 0,035 м, внешний радиус - 0,095 м, толщина диска и лопатки - 0,003 м, радиус лопаток - 0,155 м, ширина лопатки - 0,02 м, модуль упругости материала - 2,1E+5 МПа, плотность - 7800 кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона - 0,3.

Конечноэлементная модель сектора рабочего колеса на основе треугольных конечных элементов переменной толщины (STI218) содержит 204 степени свободы, что меньше чем число степеней свободы полной модели (1344 степени свободы) и показана на рис. 3.16. Результаты расчета частот собственных колебаний без учета влияния вращения в зависимости от числа узловых диаметров «*n*» и узловых окружностей «*m*» приведены на рис. 3.17. Для сравнения полученных данных с учетом влияния вращения в таблице 3.5 и 3.6 приведены собственные частоты колебаний без узловых окружностей и с одной узловой окружностью, полученные другими исследователями.

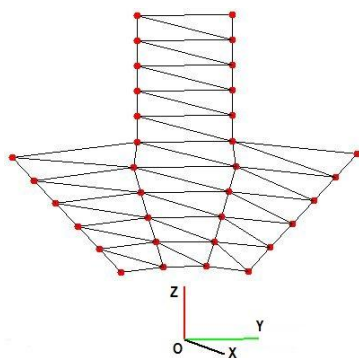


Рис. 3.16. Конечноэлементная модель сектора рабочего колеса

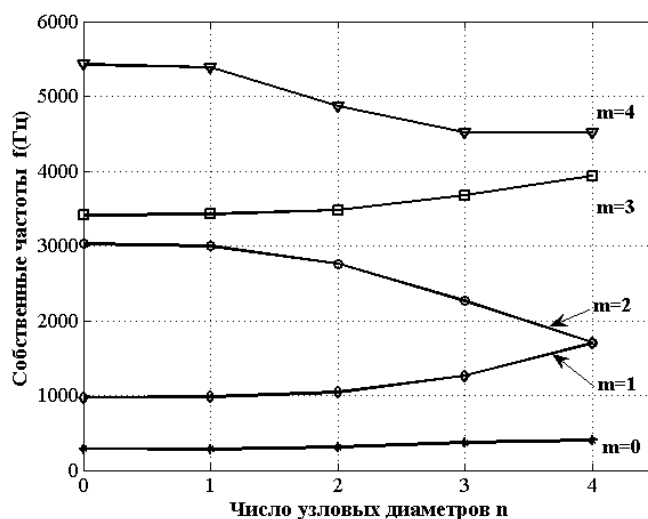


Рис. 3.17. График частот собственных колебаний рабочего колеса без учета влияния вращения

Таблица 3.5

Частоты собственных колебаний модельного рабочего колеса (Гц) без узловых окружностей и различном числе узловых диаметров « $n$ » при различных угловых скоростях

n	Источник	Частота вращения диска $\Omega$ (1/мин)						
		0	1000	2000	3000	4000	5000	6000
0	Ritz [103]	299	299	302	305	310	316	324
	FEARS/S [103]	286	287	289	293	298	305	313
	NISA [103]	287	288	290	294	299	306	314
	<b>PISVRBD (STI218)</b>	<b>288</b>	<b>288</b>	<b>289</b>	<b>290</b>	<b>291</b>	<b>293</b>	<b>296</b>
1	Ritz [103]	298	299	301	305	310	316	324
	FEARS/S [103]	285	286	288	292	298	304	312
	NISA [103]	286	287	290	293	299	306	313
	<b>PISVRBD (STI218)</b>	<b>286</b>	<b>287</b>	<b>288</b>	<b>291</b>	<b>294</b>	<b>298</b>	<b>302</b>
2	Ritz [103]	330	330	332	336	341	347	355
	FEARS/S [103]	309	310	312	316	322	329	338
	NISA [103]	311	312	314	318	324	331	340
	<b>PISVRBD (STI218)</b>	<b>311</b>	<b>312</b>	<b>314</b>	<b>319</b>	<b>324</b>	<b>331</b>	<b>338</b>
3	Ritz [103]	419	420	422	425	430	436	443
	FEARS/S [103]	368	368	371	375	381	388	396
	NISA [103]	372	373	375	379	385	392	400
	<b>PISVRBD (STI218)</b>	<b>375</b>	<b>377</b>	<b>381</b>	<b>387</b>	<b>396</b>	<b>406</b>	<b>418</b>
4	Ritz [103]	419	419	422	425	429	435	442
	FEARS/S [103]	396	396	399	403	409	416	424
	NISA [103]	401	402	404	408	414	421	429
	<b>PISVRBD (STI218)</b>	<b>408</b>	<b>409</b>	<b>415</b>	<b>423</b>	<b>434</b>	<b>448</b>	<b>464</b>

Таблица 3.6

Частоты собственных колебаний модельного рабочего колеса (Гц) с одной узловой окружностью и различном числе узловых диаметров « $n$ » при различных угловых скоростях

n	Источник	Частота вращения диска $\Omega$ (1/мин)						
		0	1000	2000	3000	4000	5000	6000
0	Ritz [103]	1057	1058	1061	1065	1070	1078	1086
	FEARS/S [103]	963	964	966	970	975	982	990
	NISA [103]	972	973	975	979	984	990	998
	<b>PISVRBD (STI218)</b>	<b>989</b>	<b>989</b>	<b>990</b>	<b>992</b>	<b>994</b>	<b>998</b>	<b>1002</b>

1	Ritz [103]	1067	1068	1071	1075	1080	1088	1097
	FEARS/S [103]	969	970	972	976	982	989	997
	NISA [103]	977	978	980	984	989	996	1005
	<b>PISVRBD (STI218)</b>	<b>995</b>	<b>996</b>	<b>998</b>	<b>1002</b>	<b>1007</b>	<b>1013</b>	<b>1021</b>
2	Ritz [103]	1133	1134	1136	1141	1146	1154	1163
	FEARS/S [103]	1033	1034	1037	1041	1047	1055	1064
	NISA [103]	1038	1039	1041	1045	1051	1059	1068
	<b>PISVRBD (STI218)</b>	<b>1057</b>	<b>1058</b>	<b>1062</b>	<b>1068</b>	<b>1076</b>	<b>1086</b>	<b>1098</b>
3	Ritz [103]	1334	1333	1335	1339	1345	1352	1360
	FEARS/S [103]	1265	1266	1268	1272	1278	1286	1295
	NISA [103]	1263	1263	1266	1270	1276	1283	1292
	<b>PISVRBD (STI218)</b>	<b>1286</b>	<b>1288</b>	<b>1293</b>	<b>1301</b>	<b>1312</b>	<b>1325</b>	<b>1342</b>
4	Ritz [103]	1673	1673	1676	1679	1684	1690	1698
	FEARS/S [103]	1698	1699	1701	1705	1711	1719	1728
	NISA [103]	1693	1694	1696	1699	1703	1709	1715
	<b>PISVRBD (STI218)</b>	<b>1746</b>	<b>1748</b>	<b>1756</b>	<b>1766</b>	<b>1779</b>	<b>1794</b>	<b>1812</b>

Подобные результаты исследований влияния больших скоростей вращения на собственные колебания рабочего колеса приведены на рис. 3.18.

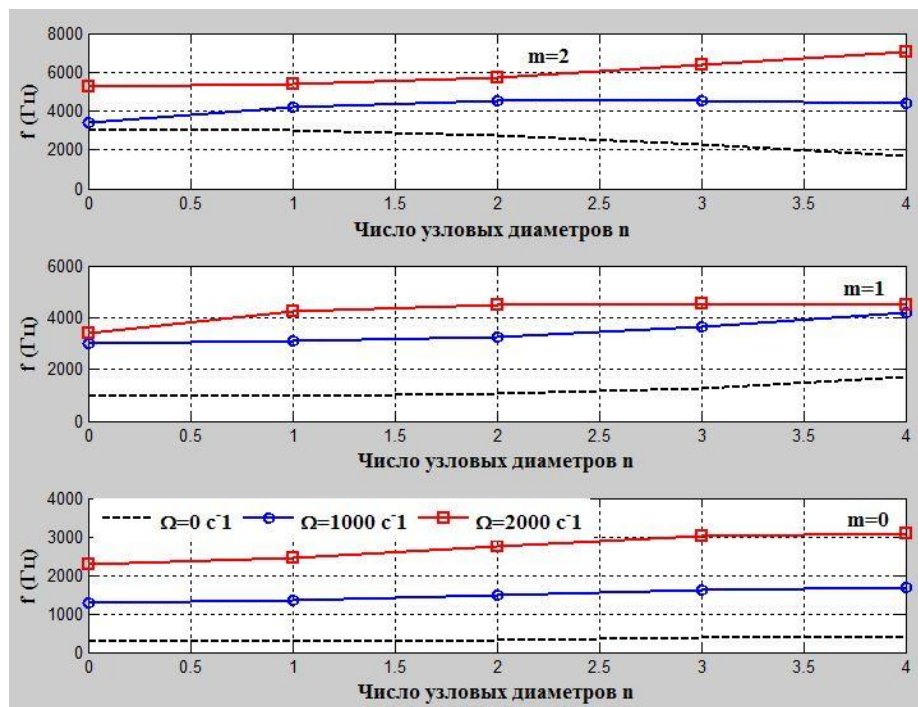


Рис. 3.18. График частот собственных колебаний рабочего колеса при числе окружностей  $m=0$ ,  $m=1$  и  $m=2$

Из таблиц 3.5 и 3.6 видно, что значения частот собственных колебаний, полученных с помощью вычислительной программы, хорошо согласуются с результатами других исследователей. При увеличении скорости вращения ротора все собственные частоты колебаний рабочего колеса увеличивается. Изменение жесткости конструкции рабочих колес турбомашин, обусловленное центробежными силами, оказывает значительное влияние на их динамические характеристики и прочность. Поэтому при проектировании рабочих колес турбомашин для обеспечения их надежной работы необходимо учитывать изменение жесткости конструкции рабочих колес от центробежных сил. Эти результаты позволяют решать задачи определения динамических напряжений, повышения прочности на основе собственных частот и форм колебаний, и также задачи вынужденных колебаний рабочего колеса с учетом геометрической нелинейности.

### **3.5. Программа для исследования собственных колебаний рабочих колес с учетом влияния вращения (PISVRBD)**

Для удобного решения широкого класса колебаний роторов турбомашин при их проектировании и эксплуатации авторы создали программное обеспечение для исследования собственных колебаний рабочих колес турбомашин с учетом влияния вращения. Программа запрограммирована с помощью высокоуровневого языка «MATLAB» по блок-схеме алгоритма расчета, описанной на рис. 3.17. Теория расчета, использованная в программе, построена с помощью МКЭ и детально описана в разделах 3.2, 3.4. Интерфейс программы просто и легко используется при расчете. Программа может работать на компьютере с версией системы Windows 98/2000/2003/XP/Vista/7/8. Кроме этого, программа предоставляет общую информацию о задаче и авторах. Созданные программы могут использоваться для любого рабочего колеса турбомашин и дают результаты с высокой точностью. Комплекс программы зарегистрирован в Федеральной службе по интеллектуальной собственности [59]. Результаты программы показана на рис. 3.19-3.22.



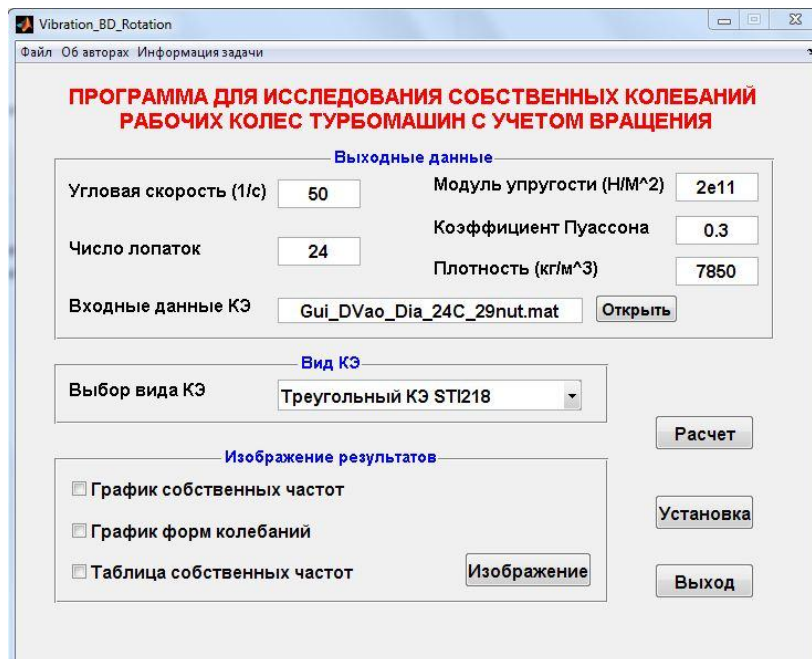


Рис. 3.19. Главное окно программы

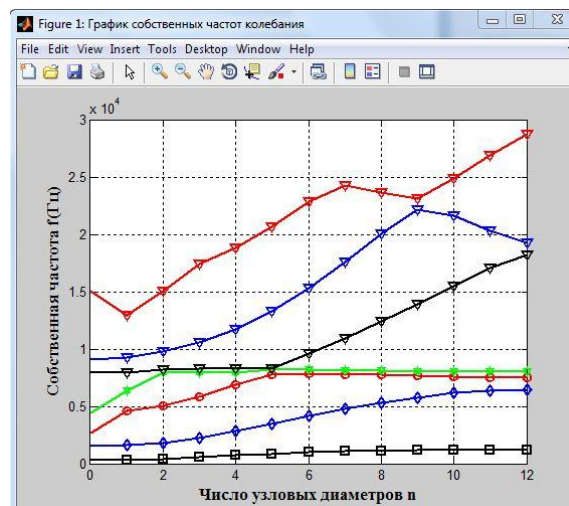
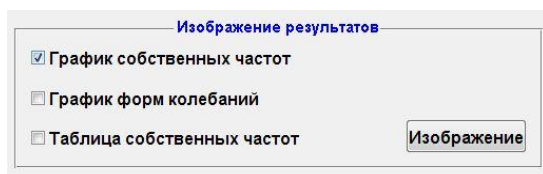


Рис. 3.20. График частот собственных колебаний рабочего колеса

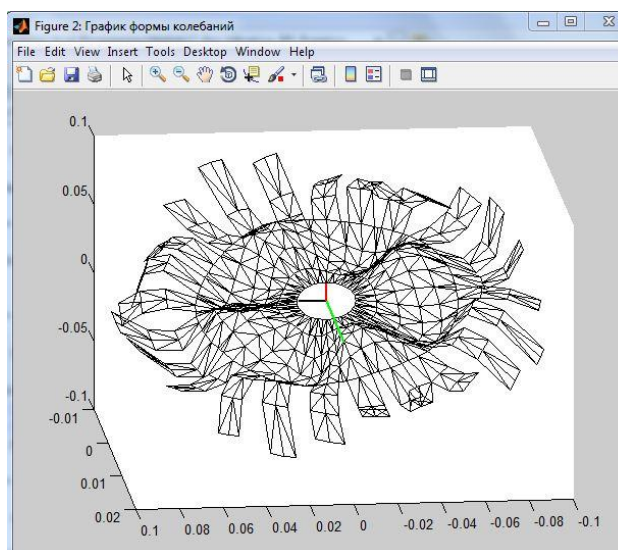
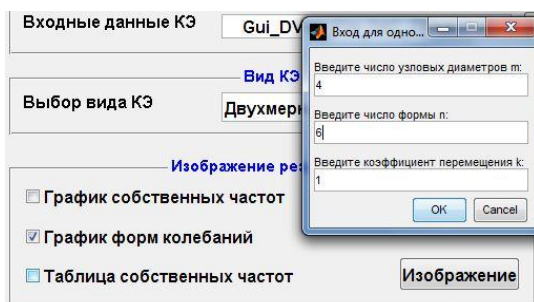


Рис. 3.21. График форм колебаний рабочего колеса

m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7
3.033E+002	3.069E+002	3.840E+002	5.564E+002	7.342E+002	8.763E+002	9.823E+002	1.060E+003
1.541E+003	1.606E+003	1.830E+003	2.248E+003	2.822E+003	3.471E+003	4.130E+003	4.755E+003
2.697E+003	4.576E+003	5.028E+003	5.800E+003	6.869E+003	7.801E+003	7.834E+003	7.795E+003
4.426E+003	6.333E+003	7.971E+003	7.961E+003	7.957E+003	8.223E+003	8.175E+003	8.127E+003
7.983E+003	7.979E+003	8.212E+003	8.285E+003	8.263E+003	8.293E+003	9.589E+003	1.096E+004
9.095E+003	9.269E+003	9.771E+003	1.058E+004	1.173E+004	1.330E+004	1.530E+004	1.761E+004
1.507E+004	1.297E+004	1.504E+004	1.743E+004	1.882E+004	2.063E+004	2.284E+004	2.421E+004
1.560E+004	1.581E+004	1.643E+004	1.948E+004	2.301E+004	2.507E+004	2.475E+004	2.540E+004
1.881E+004	2.294E+004	2.558E+004	2.547E+004	2.530E+004	2.552E+004	2.731E+004	2.859E+004
2.487E+004	2.509E+004	2.573E+004	2.673E+004	2.805E+004	2.972E+004	3.179E+004	3.430E+004
2.566E+004	2.564E+004	2.912E+004	3.434E+004	3.765E+004	3.877E+004	4.012E+004	4.046E+004
3.556E+004	3.569E+004	3.610E+004	3.676E+004	3.779E+004	3.991E+004	4.123E+004	4.207E+004
4.076E+004	4.048E+004	4.274E+004	4.706E+004	4.788E+004	4.653E+004	4.422E+004	4.309E+004
4.529E+004	4.549E+004	4.608E+004	4.784E+004	4.956E+004	5.128E+004	5.360E+004	5.212E+004
4.851E+004	5.081E+004	5.050E+004	4.993E+004	5.445E+004	5.559E+004	5.415E+004	5.764E+004
5.091E+004	5.173E+004	5.666E+004	6.167E+004	5.828E+004	6.156E+004	6.360E+004	6.373E+004
6.015E+004	6.334E+004	6.335E+004	6.323E+004	6.344E+004	6.351E+004	6.866E+004	6.734E+004
6.334E+004	6.432E+004	6.520E+004	6.340E+004	6.920E+004	6.911E+004	6.881E+004	7.336E+004
6.784E+004	6.737E+004	6.990E+004	6.937E+004	7.166E+004	7.344E+004	7.338E+004	7.507E+004
7.239E+004	7.149E+004	7.368E+004	7.355E+004	7.349E+004	8.074E+004	7.718E+004	7.543E+004
7.675E+004	7.434E+004	7.484E+004	8.471E+004	8.461E+004	8.098E+004	8.889E+004	8.937E+004
7.774E+004	8.128E+004	8.322E+004	8.625E+004	9.176E+004	9.302E+004	9.210E+004	9.472E+004
8.497E+004	8.201E+004	8.472E+004	9.014E+004	9.318E+004	9.811E+004	1.011E+005	9.844E+004
8.689E+004	9.438E+004	9.543E+004	9.375E+004	1.001E+005	1.047E+005	1.036E+005	1.088E+005
9.865E+004	9.724E+004	1.023E+005	1.051E+005	1.075E+005	1.083E+005	1.141E+005	1.141E+005
9.901E+004	1.004E+005	1.046E+005	1.124E+005	1.109E+005	1.131E+005	1.156E+005	1.162E+005
1.108E+005	1.108E+005	1.120E+005	1.139E+005	1.150E+005	1.160E+005	1.170E+005	1.233E+005
1.145E+005	1.145E+005	1.145E+005	1.147E+005	1.176E+005	1.247E+005	1.247E+005	1.290E+005
1.189E+005	1.217E+005	1.189E+005	1.168E+005	1.263E+005	1.256E+005	1.340E+005	1.388E+005
1.303E+005	1.249E+005	1.291E+005	1.311E+005	1.288E+005	1.381E+005	1.398E+005	1.432E+005
1.325E+005	1.324E+005	1.321E+005	1.323E+005	1.327E+005	1.388E+005	1.422E+005	1.445E+005

Рис. 3.22. Таблица частот собственных колебания рабочего колеса

### 3.6. Выводы

В данном разделе разработаны эффективные численные методы для исследования характеристик собственных колебаний кольцевых пластин и рабочих колес МКЭ. Эта глава показывает достоинства методов и сравнение численных результатов с данными эксперимента и результатами, полученными другими методами. Это позволяет привести к выбору наиболее оптимальных методов анализа собственных колебаний рабочих колес турбомашин в среде МКЭ.

В результате исследования собственных колебаний кольцевых пластин разработан и программно реализован алгоритм МКЭ на базе кольцевых элементов STI2R4, STI2R6. Предложенный алгоритм обеспечивает приемлемую точность расчета и снижение трудоемкости. Данный метод широко используется при анализе колебаний круглых пластин с переменной толщиной и сложными приложенными нагрузками.

Разработан метод циклической симметрии (МЦС) для исследования собственных колебаний циклически-симметрических систем, таких как рабочие колеса турбомашин без расстройки. Этот метод позволяет снизить размерность системы до анализа только одного типового сектора. Расчет МЦС проводится МКЭ на основе треугольных конечных элементов STI218 и дает высокую точность, а также обеспечивает сходимость решения. Однако ис-

пользование треугольных конечных элементов STI218 позволяет учитывать модели со сложной геометрией сечения.

В главе представлен метод моделирования ЦСС как рабочих колес на основе ПММ при исследовании их динамики, а также приведен обратный метод для определения параметров рабочих колес турбомашин (масса, жесткость, коэффициент демпфирования) на основе ПММ. Этот метод имеет простую математическую модель для исследования колебаний рабочих колес турбомашин без расстройки и с расстройкой. Использование этого метода при исследовании колебаний рабочих колес обеспечивает точность расчета и снижает трудоемкость и численные затраты времени на ЭВМ.

Разработана и реализована программа, позволяющая учитывать влияние вращения при расчете вращающихся систем. Использована эта схема расчета и свойство циклической поворотной симметрии для анализа собственных колебаний рабочих колес турбомашин МКЭ на базе треугольных конечных элементов (STI 218).

Кроме этого, в этой главе даны важные результаты о характеристиках собственных колебаний рабочих колес без расстройки. Эти результаты совпадают с выводами работ, которые опубликованы авторами Бабаков И. М. [1], Борискин О.Ф. [10], Иванов В.П. [19], Костюк А. Г. [32] и др., и позволяют решать задачи чувствительности колебаний и повышения прочности рабочих колес при проектировании новых и эксплуатации старых конструкций турбомашин. Данные исследования являются базовыми для дальнейшего прогноза долговечности рабочих колес турбомашин.

## ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ РАССТРОЙКИ ПАРАМЕТРОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ РАБОЧИХ КОЛЕС

### 4.1. Исследование колебаний рабочих колес с расстройкой на основе пружино-массовой модели

Как было отмечено в разделе 3.3, на практике можно использовать пружинно-массовую модель (ПММ), чтобы моделировать рабочие колеса турбомашин при исследовании их динамики. Также, используя эту модель, можно исследовать какие-либо определенные свойства расстройки с помощью относительно несложных математических зависимостей. Моделирование видов рабочих колес турбомашин показано на рис. 3.10 и 3.11. Расстройка на базе данной модели легко моделируется в расчете и обычно вносится путем изменения жесткости пружины лопаток, характеристик демпфера или массы лопаток. В данной работе использована эта модель для исследования влияния расстройки параметров на характеристики колебаний осевых рабочих колес без бандажа.

#### 4.1.1. Моделирование расстройки рабочих колес

Выражение (2.24) для определения значений расстройки лопаток в данной модели может быть упрощено в виде

$$\Delta f_j = \frac{\omega_{bj}^2 - \omega_b^2}{\omega_b^2}, \quad (4.1)$$

где  $\Delta f_j$  - значение расстройки  $j$ -ой лопатки;  $\omega_{bj}$  - угловая частота  $j$ -ой лопатки с расстройкой;  $\omega_b$  - угловая частота лопатки без расстройки.

В диссертации исследовано влияние расстройки жесткости лопаток на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин. Расстройка лопаток моделируется путем изменения эквивалентной жесткости лопаток  $k_b$ . Тогда выражение (4.1) запишется в виде

$$\Delta f_j = \frac{\omega_{bj}^2 - \omega_b^2}{\omega_b^2} = \frac{k_{bj} - k_b}{k_b}, \quad (4.2)$$

где  $\omega_{bj}$ ,  $k_{bj}$  - угловая частота и жесткость  $j$ -ой лопатки с расстройкой;  $\omega_b$ ,  $k_b$  - угловая частота и жесткость лопатки без расстройки (рис. 4.1).

#### 4.1.2. Математическое моделирование рабочих колес с расстройкой на базе пружинно-массовой модели

Моделирование рабочих колес без бандажа на базе ПММ показано на рис. 4.1 [102, 155, 159].

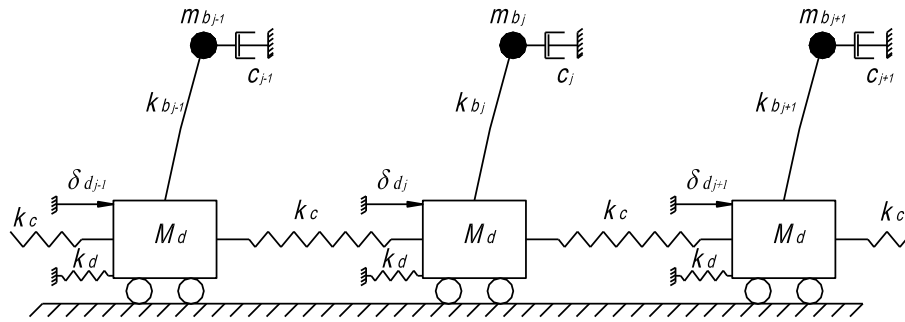


Рис. 4.1. Моделирование рабочих колес на основе ПММ

В соответствии с выражениями (3.38-3.42), уравнение движения рабочих колес с расстройкой на основе ПММ (рис. 4.1) может быть записано в матричном виде [43, 102]

$$[M^*]\{\ddot{\delta}\} + [C^*]\{\dot{\delta}\} + [K^*]\{\delta\} = \{f(t)\}, \quad (4.3)$$

где  $[M^*]$ ,  $[C^*]$ ,  $[K^*]$  - матрицы масс, демпфирования и жесткости расстроенной системы размером  $2N \times 2N$ ;  $\{\delta\}$  - вектор перемещений сосредоточенных масс лопатки и секторов диска;  $\{f(t)\}$  - вектор возбуждающих сил;  $N$  - порядок симметрии системы (или количество лопаток).

#### Определение вектора перемещений $\{\delta\}$ .

Вектор перемещений сосредоточенных масс лопатки и секторов диска имеет вид

$$\{\delta\} = \{\delta_0\}e^{i\omega t}, \quad (4.4)$$

где  $\{\delta_0\} = \{\delta_{b0_1}, \delta_{d0_1}, \delta_{b0_2}, \delta_{d0_2}, \dots, \delta_{b0_N}, \delta_{d0_N}\}^T$  - вектор амплитуд перемещений сосредоточенных масс лопатки и секторов диска,  $i = \sqrt{-1}$ .

#### Определение вектора возбуждающих сил $\{f(t)\}$ .

Вектор возбуждающих сил определен как

$$\{f(t)\} = \{f_0\}e^{i\omega t}, \quad \{f_0\} = \{1, 0, e^{i\Phi}, 0, \dots, e^{i(n-1)\Phi}, 0, \dots, e^{i(N-1)\Phi}, 0\}^T F_0, \quad (4.5)$$

где  $\Phi = 2\pi C/N$ ,  $C$  - порядок энергии возбуждений;  $F_0$  - коэффициент, не зависящий от времени.

Уравнение (4.3) с учетом (4.4) и (4.5) можно представить в виде [43, 102]

$$(-\omega^2[M^*] + i\omega[C^*] + [K^*])\{\delta_0\} = \{f_0\}, \quad (4.6)$$

$$\text{при } [K^*] = \begin{bmatrix} k_{b1}^* & -k_{b1}^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_{b1}^* & k_d + 2k_c + k_{b1}^* & 0 & -k_c & \dots & 0 & 0 & -k_c \\ 0 & 0 & k_{b2}^* & -k_{b2}^* & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{bN}^* & -k_{bN}^* \\ 0 & -k_c & 0 & 0 & \dots & -k_c & -k_{bN}^* & k_d + 2k_c + k_{bN}^* \end{bmatrix},$$

$$[M^*] = \begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_d \end{bmatrix}, \quad [C^*] = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где  $k_{bj}^* = k_{bj}(1 + i\eta)$ ,  $k_{bj} = k_b(1 + \Delta f_j)$ ;  $k_{bj}$  - жесткость  $j$ -ой лопатки с расстройкой;  $k_b$  - жесткость лопатки без расстройки;  $\eta$  - коэффициент вязкого демпфирования;  $\Delta f_j$  - значение расстройки  $j$ -ой лопатки;  $m_b, M_d$  - соответственно эквивалентные массы лопатки и сектора диска;  $c$  - коэффициент демпфера структуры.

Определение эквивалентных физических величин  $k_c, k_d, k_b, m_b, M_d, c$  подробно описано в разделе 3.3.

#### 4.1.3. Исследование влияния расстройки на характеристики колебаний рабочих колес на основе ПММ

Из уравнения (4.6) можно представить уравнение равновесия для свободных колебаний рабочих колес без демпфирования

$$(-\omega^2[M^*] + [K^*])\{\delta_0\} = 0. \quad (4.7)$$

Зависимость (4.7) представляет собой задачу на собственные значения. Решение проблемы на собственные значения производится методом Якоби, итерации [9, 21, 25] и др.

Аналогично из уравнения (4.6) можно представить уравнение движения для вынужденных колебаний рабочих колес без демпфирования

$$(-\omega^2[M^*]+[K^*])\{\delta_0\}=\{f_0\}. \quad (4.8)$$

Тогда вектор амплитуды перемещений сосредоточенных масс лопатки и секторов диска определен как

$$\{\delta_0\}=\left(-\omega^2[M]+[K]\right)^{-1}\{f_0\}. \quad (4.9)$$

**Тестовый пример.** В качестве примера рассмотрено модельное рабочее колесо, содержащее 24 лопатки. Геометрические размеры и характеристики материала рассчитываемой конструкции описаны в разделе 3.3.3.

В данной работе расстройка вносилась в расчет путем изменения модуля упругости лопаток. Параметры расстройки лопаток из равномерного распределения со средним значением 0 и стандартным отклонением 5% приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Параметры расстройки диска с 24-ю лопатками

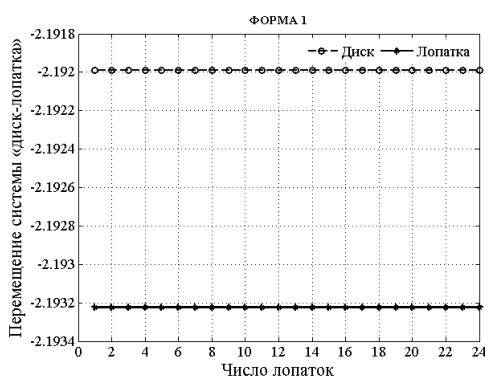
Лопатка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Delta f_i$ (%)	-0.52	-1.87	-1.82	-0.39	-5.01	-0.85	1.42	7.62	2.93	2.72	2.77	-4.92
Лопатка	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\Delta f_i$ (%)	-8.07	-4.91	5.93	-6.92	-0.41	0.43	1.84	-5.47	2.39	3.81	4.11	3.92

Используем пружинно-массовую модель, приведенную выше, чтобы исследовать характеристики колебаний этого рабочего колеса с расстройкой. Эквивалентные массы и жесткости одной лопатки и одного сектора диска определены в пункте 3.3.3:  $m_b=0,00165$ ;  $k_b=108025$ ;  $M_d=0,007$ ;  $k_d=320$ ;  $k_c=155590$ . Результаты расчета частот и перемещений сосредоточенных масс лопаток и секторов диска для собственных колебаний модельного рабочего колеса без расстройки и с расстройкой приведены в таблице 4.2 и на рис. 4.2.

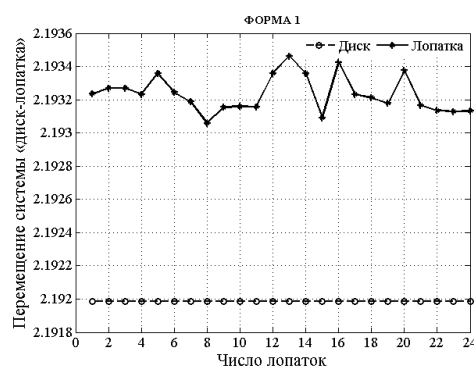
Таблица 4.2

Результаты расчета частот собственных колебаний модельного рабочего колеса с расстройкой при использовании ПММ

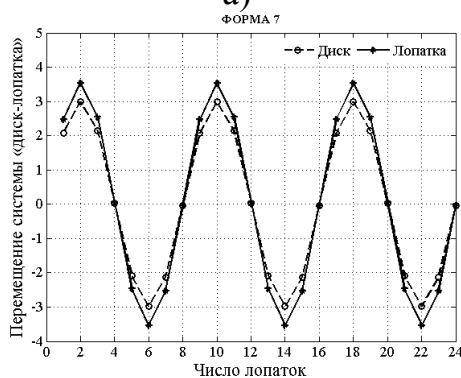
Форма		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f	Без р-ки	347,7		508		653,7		779,6		882,5		961,3	
(Гц)	С р-кой	347,7	347,8	507,7	508,2	653,1	653,7	778,7	779,2	880	882,2	958	959,5
Форма		16	17	18	19	20	21	22	23	24			
f	Без р-ки	1018		1056		1080		1094		1098			
(Гц)	С р-кой	1009,4	1017	1048,2	1056	1071	1077	1084,2	1104,8	1107			



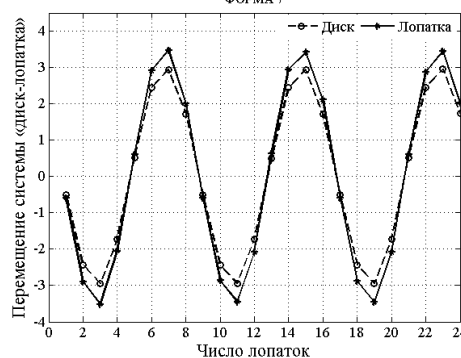
а)



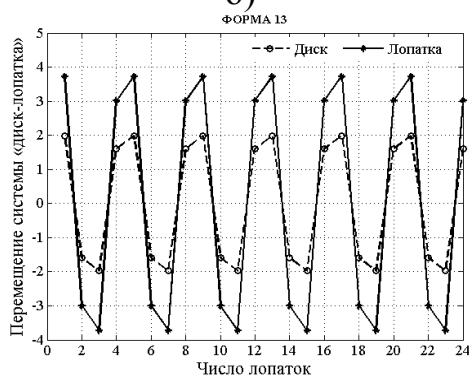
г)



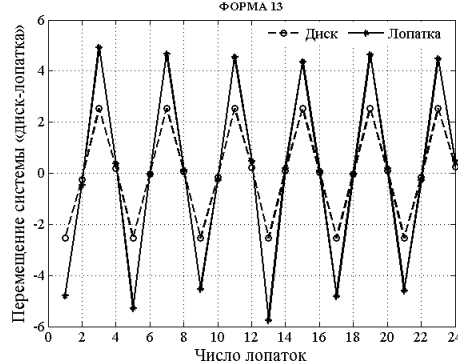
б)



д)



в)



е)

Рис. 4.2. Графики перемещений сосредоточенных масс лопаток и секторов диска рабочего колеса без расстройки (а, б, в) и с расстройкой (г, д, е)

Максимальные значения амплитуды перемещения лопаток для вынужденных колебаний модельного рабочего колеса без расстройки и с расстрой-



кой, соответствующих порядкам возмущения двигателя  $C=5$ , показаны на рис. 4.3.

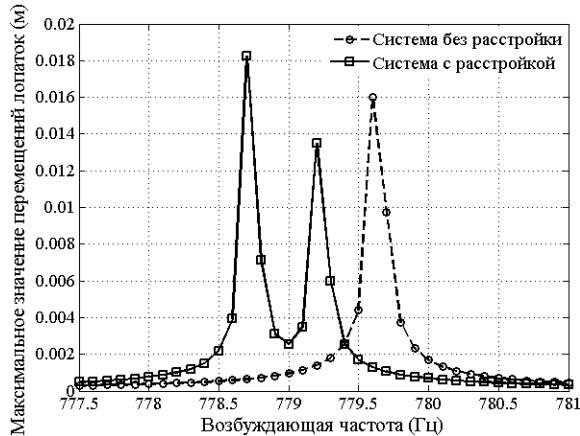


Рис. 4.3. График максимальных значений амплитуды для вынужденных колебаний рабочего колеса при  $C=5$

В таблице 4.2 и на рис. 4.2, 4.3 даны характеристики собственных и вынужденных колебаний модельного рабочего колеса турбомашин с расстройкой жесткости лопаток. Видно, что для собственных колебаний графики амплитуд колебаний лопаток рабочего колеса с расстройкой не обладают циклической симметрией, в отличие от рабочего колеса без расстройки.

При введении расстройки двукратные частоты настроенной системы становятся различными. В примере для вынужденных колебаний, максимальное значение амплитуды перемещения лопаток серьезно изменяется и повышается на 15%, в отличие от отклика рабочего колеса без расстройки. Данные исследования хорошо совпадают с работами, которые опубликованы авторами Ewins D.J. [90-92], Yiu H. [102], Sanliturk K.Y. [155], Alejandro J. [65] и др. и позволяют решать задачи повышения прочности рабочих колес с расстройкой при проектировании.

## 4.2. Исследование колебаний рабочих колес с расстройкой на основе моделирования уменьшенного порядка

### 4.2.1. Метод моделирования уменьшенного порядка

Моделирование динамических систем является важной задачей в технике. Если моделирование основывается на основе МКЭ, то математическая модель зачастую слишком сложна и имеет большие вычислительные затраты,

и таким образом не всегда применима на практике. Поэтому использование метода моделирования уменьшенного порядка при анализе характеристик колебаний рабочих колес с расстройкой является актуальной проблемой [75, 76, 138].

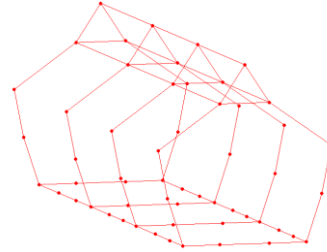
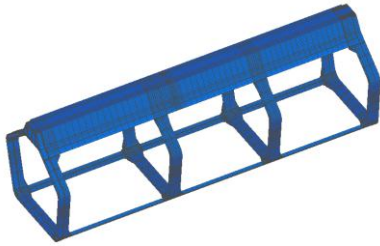


Рис. 4.4. Полная модель    Рис 4.5 Модель с основными степенями свободы

Рассмотрим типичную конечноэлементную модель: полную модель (ПМ) (рис. 4.4) и модель уменьшенного порядка (рис. 4.5). При использовании МКЭ для моделирования задач в ПМ всегда возникают основные степени свободы  $a$  и уменьшенные степени свободы  $b$ . Их соотношение определяется в виде [75, 76]

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_a\} \\ \{\delta_b\} \end{Bmatrix} = [T]\{\delta_a\}, \quad (4.10)$$

где  $\{\delta\}$  - вектор перемещения всех степеней свободы конструкции размером  $nx1$ ,  $n$  - число степеней свободы системы;  $\{\delta_a\}$  - вектор перемещения основных степеней свободы конструкции размером  $mx1$ ;  $\{\delta_b\}$  - вектор перемещения уменьшенных степеней свободы конструкции размером  $(n-m)x1$ ;  $[T]$  - преобразованная матрица размером  $nxt$  и  $n \gg t$ .

Динамическое уравнение полной исходной системы написано как [76]

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{f\}, \quad (4.11)$$

где  $[M], [K], [C]$  – соответственно матрицы масс, жесткости и демпфирования размером  $n \times n$ ,  $n$  - число степеней свободы системы;  $\{\delta\}$ ,  $\{f\}$  - векторы перемещения узлов и возбуждающей силы размером  $nx1$ .

Подставив уравнение (4.10) в (4.11), получим [75, 76]

$$[M_r]\{\ddot{\delta}_a\} + [C_r]\{\dot{\delta}_a\} + [K_r]\{\delta_a\} = \{f_r\}, \quad (4.12)$$

где  $[M_r] = [T]^T [M] [T]$ ,  $[C_r] = [T]^T [C] [T]$ ,  $[K_r] = [T]^T [K] [T]$  и  $\{f_r\} = [T]^T \{f\}$ .

Таким образом, с помощью преобразования (4.10-4.12) размер задачи значительно уменьшается, что снижает трудоемкость и затраты времени расчета на ЭВМ. Преобразованная матрица  $[T]$  может использоваться на разных формах и зависит от модели уменьшенного порядка через формулу (4.10).

#### **4.2.2. Математическая модель рабочих колес на основе моделирования уменьшенного порядка**

При изучении колебаний реальных рабочих колес турбомашин часто используется преимущество конечноэлементных моделей. Конечноэлементная модель обычно создается для одного сектора рабочего колеса (рис. 4.6 б). Предполагается, что все секторы идентичны, свойство циклической симметрии может быть использовано для расчета колебаний более эффективно, чем моделирование всей системы. Тем не менее, в реальных рабочих колесах часто возникает расстройка параметров лопаток. Эта расстройка нарушает свойство циклической симметрии конструкции. Тогда для изучения динамических характеристик рабочего колеса с расстройкой, моделирование только одного сектора является недостаточным и нужно моделировать полное рабочее колесо (рис. 4.6а). Конечноэлементные модели часто состоят из многих миллионов степеней свободы. Кроме этого, значения расстройки являются случайными величинами и можно применять статистический анализ с использованием метода Монте-Карло, чтобы учитывать характеристики колебаний рабочих колес. Но этот метод сложно использовать для полной модели рабочих колес турбомашин (рис. 4.6а). В данном разделе рассматривается метод моделирования уменьшенного порядка (МУП) для анализа влияния расстройки лопаток на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин. МУП используется для создания моделей уменьшенного порядка из исходной конечноэлементной модели, теоретическое описание приведено в разделе 4.2.1. В большинстве опубликованных работ МУП строится с помощью двух методов [79]: метод синтеза форм колебаний [86, 105] и метод номинальных форм колебаний [176]. В данной работе разработан и развит метод МУП на основе МКЭ и метода синтеза форм колебаний.

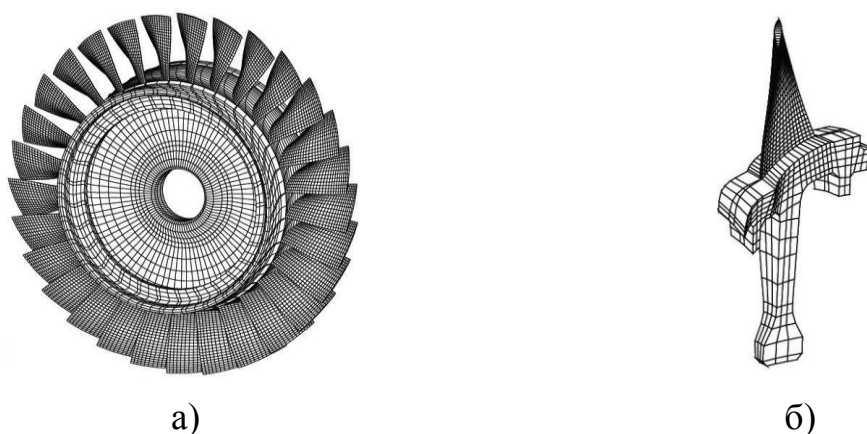


Рис. 4.6. Модель рабочего колеса на основе конечных элементов  
(а- полный диск; б - один типичный сектор)

**Метод синтеза форм колебаний [86, 105].** Один сектор рабочего колеса разделен на две части. Это диск с безмассовыми лопатками, жестко заземленный на внутреннем радиусе и консольная лопатка, жестко заземленная на поверхности между диском и лопаткой. Перемещения рабочего колеса отражаются двумя перемещениями: перемещение диска с безмассовыми лопатками и перемещение консольных лопаток. Таким образом, перемещение одной лопатки рабочего колеса может быть синтезировано двумя перемещениями: перемещение консольной лопатки и перемещение, соответствующее деформации лопатки, которые созданы перемещением диска с безмассовыми лопатками. Таким образом, консольная лопатка отдельно моделируется в расчете и расстройка реализована путем прямого манипулирования модальными свойствами консольных лопаток. Поэтому расстройка жесткости лопатки легко моделируется в расчете.

#### Общая схема моделирования уменьшенного порядка

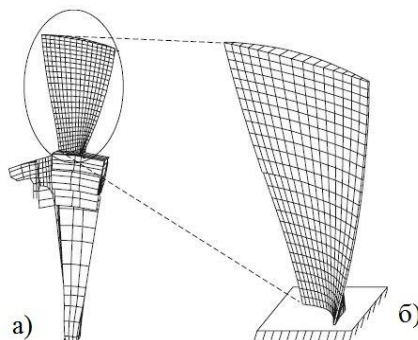


Рис. 4.7. График синтеза форм колебаний одного сектора  
(а- циклические формы для одного сектора диска с безмассовой лопаткой рабочего колеса; б- нормальные формы для консольной лопатки)

Предполагается, что степени свободы упорядочены так, чтобы дать блочно-диагональные формы при сборке матриц масс и жесткости всей конструкции. Они представлены в виде [70-73, 143]

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_d] & 0 \\ 0 & [M_b] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] \otimes [\tilde{M}_d] & 0 \\ 0 & [I] \otimes [\tilde{M}_b] \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_d] & 0 \\ 0 & [K_b] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] \otimes [\tilde{K}_d] & 0 \\ 0 & [I] \otimes [\tilde{K}_b] \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

где  $[I]$  - единичная матрица размера  $N$ ,  $N$  - число секторов;  $[\tilde{M}_d], [\tilde{K}_d]$  - матрицы масс и жесткости одного сектора диска;  $[\tilde{M}_b], [\tilde{K}_b]$  - матрицы масс и жесткости одной консольной лопатки; символ  $\otimes$  обозначает оператор Кронекера, определенный в приложении А.

На рис. 4.7 изображены две основные формы колебаний для модели конечных элементов одного сектора рабочего колеса. Первая часть включает в себя формы колебаний одной консольной лопатки, защемленной на поверхности между диском и лопаткой (рис. 4.7б). Матрица форм колебаний  $N$  идентичных консольных лопаток обозначает  $[\delta^b]$ . Вторая часть представляет собой формы колебаний диска с безмассовыми лопатками, которые обладают циклическими формами полной сборки (рис. 4.7а). Часть форм колебаний диска с лопатками, принадлежащая степеням свободы лопаток, обозначается  $[\delta^d]$ , а часть диска -  $[\mathcal{G}^d]$ . После совмещения двух частей компонентов форм колебаний получим вектор перемещения всей структуры в виде [86, 96, 105]

$$\{x\} = \begin{bmatrix} [\mathcal{G}^d] \\ [\delta^d] \end{bmatrix} \{a\} + \begin{bmatrix} 0 \\ [\delta^b] \end{bmatrix} \{b\}, \quad (4.15)$$

где  $\{a\}$  - вектор перемещения основных степеней свободы диска для всех форм и  $\{a\} = [\{a_0\}^T \{a_1\}^T \dots \{a_P\}^T]^T$ ;  $\{a_n\}$  - вектор обобщенных координат, соответствующих  $n$  узловым диаметрам диска;  $P$  - максимальное возможное число узловых диаметров;  $\{b\}$  - вектор перемещения основных степеней сво-

боды  $N$  лопаток для всех форм и  $\{b\} = [\{b_0\}^T \{b_1\}^T \dots \{b_N\}^T]^T$ ;  $\{b_i\}$  - вектор обобщенных координат  $i$ -ой лопатки.

Кинетическая энергия системы без демпфирования и без внешних сил может быть записана в виде [143]

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P (\{\dot{a}_n\}^T [\mathcal{G}_n^d]^T) [M_d] \sum_{m=0}^P ([\mathcal{G}_m^d] \{\dot{a}_m\}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^P [\delta_n^d] \{\dot{a}_n\} + [\delta^b] [\dot{b}] \right]^T [M_b] \left[ \sum_{m=0}^P [\delta_m^d] \{\dot{a}_m\} + [\delta^b] [\dot{b}] \right] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P \{\dot{a}_n\}^T \{\dot{a}_n\} + \frac{1}{2} [\dot{b}]^T [\dot{b}] + [\dot{b}]^T [\delta^b]^T [M_b] \sum_{n=0}^P [\delta_n^d] \{\dot{a}_n\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P (\{\dot{a}_n\}^T [\delta_n^d]^T) [M_b] [\delta^b] [\dot{b}] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P (\{\dot{a}_n\}^T [\delta_n^d]^T) [M_b] \sum_{m=0}^P ([\delta_m^d] \{\dot{a}_m\}) . \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Её первый дифференциал представлен в виде

$$\begin{aligned}
dT &= \sum_{n=0}^P d(\{\dot{a}_n\}^T \{\dot{a}_n\}) + d([\dot{b}]^T [\dot{b}]) + \sum_{n=0}^P d([\dot{b}]^T [\delta^b]^T [M_b] [\delta_n^d] \{\dot{a}_n\}) \\
&\quad + \sum_{n=0}^P d(\{\dot{a}_n\}^T [\delta_n^d]^T [M_b] [\delta^b] [\dot{b}]) + \sum_{n=0}^P \sum_{m=0}^P d(\{\dot{a}_n\}^T [\delta_n^d]^T [M_b] [\delta_m^d] \{\dot{a}_m\}) . \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Аналогично энергия деформации системы без демпфирования и без внешних сил может быть записана как

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P (\{a_n\}^T [\mathcal{K}_n^d]^T) [K_d] \sum_{m=0}^P ([\mathcal{K}_m^d] \{a_m\}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=0}^P [\delta_n^d] \{a_n\} + [\delta^b] [b] \right]^T [K_b] \left[ \sum_{m=0}^P [\delta_m^d] \{a_m\} + [\delta^b] [b] \right] = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P (\{a_n\}^T [\hat{K}_{dn}] \{a_n\}) + \frac{1}{2} \{b\}^T [\delta^b]^T [K_b] [\delta^b] \{b\} + \frac{1}{2} \{b\}^T [\delta^b]^T [K_b] \sum_{n=0}^P [\delta_n^d] \{a_n\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P (\{a_n\}^T [\delta_n^d]^T) [K_b] [\delta^b] \{b\} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P (\{a_n\}^T [\delta_n^d]^T) [K_b] \sum_{m=0}^P ([\delta_m^d] \{a_m\}) , \quad (4.18)
\end{aligned}$$

и первый дифференциал представлен как

$$\begin{aligned}
dU &= \sum_{n=0}^P d(\{a_n\}^T [\hat{K}_{dn}] \{a_n\}) + d(\{b\}^T [\delta^b]^T [K_b] [\delta^b] \{b\}) + \sum_{n=0}^P d(\{b\}^T [\delta^b]^T [K_b] [\delta_n^d] \{a_n\}) + \\
&\quad + \sum_{n=0}^P d(\{a_n\}^T [\delta_n^d]^T [K_b] [\delta^b] \{b\}) + \sum_{n=0}^P \sum_{m=0}^P d(\{a_n\}^T [\delta_n^d]^T [K_b] [\delta_m^d] \{a_m\}) . \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Если применяем принцип Гамильтона

$$\int_{t_1}^{t_2} [dU - dT] dt = 0, \quad (4.20)$$

то найдем величины дифференциала

для  $\delta a_n$  имеем

$$\begin{aligned} \{\ddot{a}_n\} + [\delta_n^d]^T [M_b] \sum_{m=0}^P [\delta_m^d] \{\ddot{a}_m\} + [\delta_n^d]^T [M_b] [\delta^b] \{\ddot{b}\} \\ + [\hat{K}_{dn}] \{a_n\} + [\delta_n^d]^T [K_b] [\delta^b] \{b\} + [\delta_n^d]^T [K_b] \sum_{m=0}^P [\delta_m^d] \{a_m\} = 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

для  $\delta b$  имеем

$$\begin{aligned} \{\ddot{b}\} + \sum_{n=0}^P [\delta^b]^T [M_b] [\delta_n^d] \{\ddot{a}_n\} + \sum_{n=0}^P [\delta^b]^T [K_b] [\delta_n^d] \{a_n\} \\ + \text{Bdiag}_{n=1, \dots, N} \left[ \text{diag}_{k=1, \dots, m_b} (1 + \Delta f_n^k) \right] [\hat{K}_b] \{b\} = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где  $m_b$  - число форм колебаний консольной лопатки.

Из уравнений (4.21) и (4.22) можно написать уравнение движения в виде матрицы

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [I_d] + [\delta^d]^T [M_b] [\delta^d] & [\delta^d]^T [M_b] [\delta^b] \\ [\delta^b]^T [M_b] [\delta^d] & [I_b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{a}\} \\ \{\ddot{b}\} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} [\hat{K}_d] + [\delta^d]^T [K_b] [\delta^d] & [\delta^d]^T [K_b] [\delta^b] \\ [\delta^b]^T [K_b] [\delta^d] & \text{Bdiag}_{n=1, \dots, N} \left[ \text{diag}_{k=1, \dots, m_b} (1 + \Delta f_n^k) \right] [\hat{K}_b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где  $\text{Bdiag}[\bullet]$ - блочно-диагональная матрица;  $\text{diag}[\bullet]$ - диагональная матрица;  $[I_d] = [\mathcal{G}^d]^T [M_d] [\mathcal{G}^d]$ ,  $[\hat{K}_d] = [\mathcal{G}^d]^T [K_d] [\mathcal{G}^d]$ - соответственно матрицы масс и жесткости диска размерностью  $Nm_d \times Nm_d$ , когда все формы колебаний с матрицей масс нормированы,  $m_d$ - число форм колебаний диска;  $[I_b] = [\delta^b]^T [M_b] [\delta^b]$ ,  $[\hat{K}_b] = [\delta^b]^T [K_b] [\delta^b]$ - соответственно матрицы масс и жесткости  $N$  лопаток размерности  $Nm_b \times Nm_b$ , когда все формы колебаний с матрицей масс нормированы.

Если к рабочему колесу приложена возбуждающая сила  $\{F\}$ , то выражение (4.20) имеет вид

$$\int_{t_1}^{t_2} [dU - dT] dt = \int_{t_1}^{t_2} dW_{Внеу} dt, \quad (4.24)$$

где внешняя работа определена как

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dW_{Внеу} dt &= \int_{t_1}^{t_2} d\left([\delta^d]\{a\} + [\delta^b]\{b\}\right)^T \{F\} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d\left(\{a\}^T [\delta^d]^T \{F\}\right) dt + \int_{t_1}^{t_2} d\left(\{b\}^T [\delta^b]^T \{F\}\right) dt \end{aligned}, \quad (4.25)$$

здесь  $\{F\}$  - вектор возбуждающих сил степеней свобод всех лопаток.

Из выражений (4.21), (4.22) и (4.25) имеем уравнение движения рабочего колеса в виде матрицы

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} [I_d] + [\delta^d]^T [M_b] [\delta^d] & [\delta^d]^T [M_b] [\delta^b] \\ [\delta^b]^T [M_b] [\delta^d] & [I_b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{a}\} \\ \{\ddot{b}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}[2\xi^k] \otimes \sqrt{[\hat{K}_b]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\dot{a}\} \\ \{\dot{b}\} \end{bmatrix} + \\ &+ (1 + \gamma i) \begin{bmatrix} [\hat{K}_d] & [\delta^d]^T [K_b] [\delta^b] \\ [\delta^b]^T [K_b] [\delta^d] & B \text{diag} \begin{bmatrix} \text{diag} (1 + \Delta f_n^k) \\ [\hat{K}_b] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\delta^d]^T \{F\} \\ [\delta^b]^T \{F\} \end{bmatrix} \end{aligned}, \quad (4.26)$$

где  $\xi^k$  - коэффициент вязкого демпфирования;  $\gamma$  - коэффициент демпфирования структуры,  $i = \sqrt{-1}$ .

### Определение циклических форм колебаний

При изучении колебаний рабочих колес с помощью МУП формы колебаний диска с безмассовыми лопатками  $([\mathcal{G}^d], [\delta^d])$  имеют свойство циклической симметрии и определяются следующим видом

$$[\mathcal{G}^d] = ([\bar{F}] \otimes [I]) [\tilde{\mathcal{G}}^d], \quad (4.27)$$

где  $[\bar{F}]$  - реальная матрица Фурье (см. приложение Б);  $[I]$  - единичная матрица размера  $N$ ;  $[\tilde{\mathcal{G}}^d]$  - матрица форм колебаний одного сектора диска в циклических координатах, имеющая блочно-диагональную структуру, определенная в виде

$$[\tilde{\mathcal{G}}^d] = B \text{diag} [\tilde{\mathcal{G}}_k^d], \quad (4.28)$$

$k=0, \dots, P$



где  $[\tilde{\mathcal{G}}_k^d] = [\tilde{\mathcal{G}}_{k,c}^d] + i[\tilde{\mathcal{G}}_{k,s}^d]$  - матрица перемещений формы колебаний одного сектора диска, соответствующей  $k$  узловых диаметров;  $[\tilde{\mathcal{G}}_{k,c}^d], [\tilde{\mathcal{G}}_{k,s}^d]$  - соответственно реальная и мнимая часть  $[\tilde{\mathcal{G}}_k^d]$ .

Из выражений (4.27) и (4.28) можно получить матрицу форм колебаний диска в циклических координатах как

$$[\mathcal{G}^d] = [\bar{f}_0 \otimes [\tilde{\mathcal{G}}_0^d] \bar{f}_1^c \otimes [\tilde{\mathcal{G}}_{1,c}^d] + \bar{f}_1^s \otimes [\tilde{\mathcal{G}}_{1,s}^d], \dots, \bar{f}_k^c \otimes [\tilde{\mathcal{G}}_{k,c}^d] + \bar{f}_k^s \otimes [\tilde{\mathcal{G}}_{k,s}^d], \dots, \bar{f}_{N/2} \otimes [\tilde{\mathcal{G}}_{N/2}^d]], \quad (4.29)$$

где  $\bar{f}_0, \bar{f}_1^c, \dots, \bar{f}_{N/2}$  - столбцы реальной матрицы Фурье  $[\bar{F}]$  (см. приложение Б). Последний блок матрицы существует только для четных  $N$ .

Аналогично матрица форм колебаний  $N$  идентичных лопаток  $[\delta^d]$  определена как формы колебаний диска

$$[\delta^d] = ([\bar{F}] \otimes [I])[\tilde{\delta}^d]. \quad (4.30)$$

### **Определение форм колебаний $N$ консольных лопаток**

Для рабочих колес без бандаж матрица форм колебаний  $N$  идентичных лопаток является блочно-диагональной и имеет вид

$$[\delta^b] = [I] \otimes [\tilde{\delta}^b], \quad (4.31)$$

где  $[\tilde{\delta}^b]$  - матрица форм колебаний одной консольной лопатки;  $[I]$  - единичная матрица размера  $N$ .

Для рабочих колес с бандажом модальная матрица форм колебаний  $[\delta^b]$  определяется с помощью свойства циклической симметрии как формы колебаний диска.

Формы колебаний одного сектора диска с безмассовой лопаткой  $[\tilde{\mathcal{G}}_k^d], [\tilde{\delta}_k^d]$  определены методом циклической симметрии, который описан детально в разделе 3.2.

Матрица форм колебаний одной консольной лопатки  $[\tilde{\delta}^b]$  определена МКЭ, алгоритм которого детально описан в главе 2.

### **Определение вектора возбуждающих сил [72]**

Возбуждающие силы лопаток - гармонические функции по времени, отличающиеся фазой между секторами. Фаза  $i$ -ой лопатки определена как

$$\Phi_i = \frac{2\pi C(i-1)}{N}, \quad (i=1, \dots, N), \quad (4.32)$$

где  $C$  - порядок возбуждения двигателя.

Вектор внешних возбуждающих сил определен в виде

$$\{F\} = \left[ \{f\}^T e^{j\Phi_1} \quad \{f\}^T e^{j\Phi_2} \quad \dots \quad \{f\}^T e^{j\Phi_N} \right]^T = \sqrt{N} e_{C+1} \otimes \{f\}, \quad (4.33)$$

где  $e_{C+1}$  -  $(C+1)$ -й столбец матрицы Фурье в приложении Б,  $\{f\}$  - вектор возбуждающих сил одной лопатки. Возбуждающие газодинамические силы на рабочие колеса детально описаны в главе 2.

Из выражений (4.26) и (4.33) имеем

$$\{F\} = \left[ \{F_d\}^T \vdots \{F_b\}^T \right]^T = \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad \{F_d^C\}^T \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad \{F_b\}^T \right]^T, \quad (4.34)$$

$$[F_d^C] = [\delta^d]^T \{F\} = \sqrt{N} \left\{ \begin{array}{l} (\bar{f}_0 \otimes [\tilde{g}_0^d]) (e_{C+1} \otimes \{f\}) \\ (\bar{f}_1^c \otimes [\tilde{g}_{1,c}^d] + \bar{f}_1^s \otimes [\tilde{g}_{1,s}^d]) (e_{C+1} \otimes \{f\}) \\ \vdots \\ (\bar{f}_k^c \otimes [\tilde{g}_{k,c}^d] + \bar{f}_k^s \otimes [\tilde{g}_{k,s}^d]) (e_{C+1} \otimes \{f\}) \\ \vdots \\ (\bar{f}_{N/2} \otimes [\tilde{g}_{N/2}^d]) (e_{C+1} \otimes \{f\}) \end{array} \right\}, \quad (4.35)$$

$$[F_b] = [\delta^b]^T \{F\} = \sqrt{N} e_{C+1} \otimes ([\tilde{\delta}^b]^T \{f\}). \quad (4.36)$$

### 4.2.3. Исследование колебаний рабочих колес на основе метода моделирования уменьшенного порядка

Видно, что при использовании МУП матрица форм колебаний диска с безмассовыми лопатками  $[\mathcal{G}^d], [\delta^d]$  (см. выражение (4.16)) синтезируется из форм колебаний  $N$  секторов рабочего колеса, которые получены с помощью МЦС, и матрицы форм колебаний лопаток, которые синтезируются из форм колебаний  $N$  идентичных консольных лопаток. Таким образом, уравнение равновесия (4.23) или (4.26) МУП является общим уравнением для исследования колебаний полного рабочего колеса, которое построено на основе одного сектора с помощью МЦС, но размер уравнения (4.23) или (4.26) меньше чем сумма степеней свободы рабочего колеса из-за использования МУП.

### Исследование характеристик собственных колебаний рабочих колес

Уравнение равновесия для свободных колебаний рабочих колес с по-

мощью МУП описано уравнением (4.23). Решение этого уравнения проводится методом Якоби, итерации и др. [9, 21] и дает всех возможные значения частот и форм колебаний рабочего колеса. Значения собственных частот составлены по последовательным порядкам на одном столбце (рис. 4.17).

Для оценки влияния расстройки параметров на формы собственных колебаний рабочих колес использована Еклидова норма перемещений лопаток. Форма собственных колебаний выражается скалярными величинами  $\bar{\delta}_i^r$ , которые являются относительными перемещениями лопаток. Перемещение  $i$ -ой лопатки по Еклидовой норме для собственных колебаний системы определена следующим образом [72]:

$$\bar{\delta}_i^r = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{N_b} \delta_{j,i}^2}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{N_b} \delta_{j,n}^2}}, \quad (i=1, \dots, N), \quad (4.37)$$

где  $\delta_{j,i}$  - перемещение  $j$ -ой степени свободы  $i$ -ой лопатки,  $N_b$  - число степеней свободы одной лопатки и  $N$  - число лопаток в системе.

Для настроенных форм колебаний, признаки отклонений лопаток идентичны и более похожи на синусоидальные выражения при присутствии узловых диаметров (рис. 4.10а, 4.10в). Также Евклидова норма описывает число узловых диаметров, например, на рис. 4.10а, 4.10в соответственно описаны настроенные формы колебаний, которые имеют 8 и 2 узловых диаметра.

Для проверки точности созданной программы PVROMBD (см. раздел 4.2.4) результаты метода МУП при расчете колебаний рабочих колес сравнены с данными эксперимента и с результатами, которые получены с использованием МКЭ для полной модели (ПМ) (рис. 4.9) и с использованием программного комплекса ANSYS. Погрешности результатов методов в сравнении с результатами, полученными с использованием метода МКЭ для ПМ и программного комплекса ANSYS, определены как

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{f_{МУП}^{pacc} - f_{ПМ}^{pacc}}{f_{ПМ}^{pacc}} \right| \cdot 100\% , \quad \varepsilon_2 = \left| \frac{f_{МУП}^{pacc} - f_{ANSYS}^{pacc}}{f_{ANSYS}^{pacc}} \right| \cdot 100\% , \quad (4.38)$$

где  $f_{МУП}^{расс}$  - собственная частота колебаний рабочего колеса с расстройкой, полученная с использованием МУП;  $f_{ПМ}^{расс}$ ,  $f_{ANSYS}^{расс}$  - соответственно собственные частоты колебаний рабочего колеса с расстройкой, полученные с использования МКЭ для ПМ и программного комплекса ANSYS.

### **Исследование характеристик вынужденных колебаний рабочих колес**

Уравнение равновесия для вынужденных колебаний рабочих колес с помощью МУП описано выражением (4.26). Для оценки влияния расстройки на формы вынужденных колебаний использована Евклидова норма перемещений лопаток, которая позволяет определять максимальные значения перемещений лопаток рабочих колес без расстройки и с расстройкой. Для настроенных рабочих колес максимальное значение перемещений всех лопаток по Евклидовой норме одинаково, в отличие от расстроенных. Для вынужденных колебаний перемещение лопатки по Евклидовой норме тоже является скалярной величиной и определено как [72]

$$\bar{\delta}_n = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_b} \delta_{j,n}^2}, \quad (n = 1, \dots, N), \quad (4.39)$$

где  $\bar{\delta}_n$  - перемещение  $n$ -ой лопатки по Евклидовой норме;  $N_b$  - число степеней одной лопатки;  $\delta_{j,n}$  - перемещение  $j$ -ой степени  $n$ -ой лопатки.

Для тестирования точности и сходимости алгоритмов и программ при оценке влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес решена задача об исследовании колебаний модельного рабочего колеса, содержащего 24 лопатки. Геометрические размеры и характеристики материала рассчитываемой конструкции: внутренний радиус - 0,0135 м, внешний радиус - 0,06 м, толщина диска и лопатки - 0,002 м, длина лопатки - 0,036 м, ширина лопатки - 0,012 м, модуль упругости материала - 210 ГПа, плотность - 7850 кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона - 0,3 и коэффициент демпфирования структуры  $\gamma = 0.6\%$ , коэффициент вязкого демпфирования  $\xi^k = 0$ .

В данной работе возбуждающие силы приложены на все узлы вершины каждой лопатки:  $\{f_i\} = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ . Расстройка жесткости лопаток

вносится путем изменения их модуля упругости. Тогда модуль упругости  $i$ -ой лопатки  $E_i$  определен как

$$E_i = (1 + \Delta f_i)E_0, \quad (4.40)$$

где  $E_0$  - модуль упругости лопатки без расстройки;  $\Delta f_i$ - значение расстройки  $i$ -ой лопатки. Параметры расстройки лопаток приведены в таблице 4.1.

Расчеты метода МУП и МКЭ для ПМ проводятся на основе треугольных конечных элементов переменной толщины (STI218). Конечноэлементная модель одного сектора для МУП (рис. 3.6) и всех секторов при использовании МКЭ для ПМ соответственно содержит 174 и 3312 степени свободы.

Результаты расчета частот собственных модельного рабочего колеса без расстройки при использовании МУП, ПМ и программного комплекса ANSYS в сравнении с данными эксперимента [9] (Эксп.) приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

Сопоставление расчетных и экспериментальных значений частот собственных колебаний рабочего колеса без расстройки (Гц)

<b>Форма</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>Эксп. [9]</b>	210		265	340		501		681		803		922
<b>МУП</b>	255,1		260,1	320,7		492		668,6		808,2		911,9
<b>ПМ</b>	255,1		260,1	321		492		669		808		911,9
<b>ANSYS</b>	265		284	318		491		655		778		865
<b>Форма</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>
<b>Эксп. [9]</b>	922	938		961		1008		1027		1030		1032
<b>МУП</b>	911,9	987,4		1041,7		1079,7		1104,8		1119		1123,7
<b>ПМ</b>	911,9	987		1041		1079		1104		1119		1123
<b>ANSYS</b>	865	929		973		1006		1026		1039		1043
<b>Форма</b>	<b>25</b>	<b>26</b>	<b>27</b>	<b>28</b>	<b>29</b>	<b>30</b>	<b>31</b>	<b>32</b>	<b>33</b>	<b>34</b>	<b>35</b>	<b>36</b>
<b>Эксп. [9]</b>	1386	1362		1723		2109		2714		3452		4102
<b>МУП</b>	1461	1521,5		1737		2147		2713,8		3354		4001,6
<b>ПМ</b>	1461	1521		1737		2147		2713		3354		4002
<b>ANSYS</b>	1481	1524		1743		2208		2815		3447		4040

Результаты характеристик собственных колебаний рабочего колеса без расстройки (Без р-ки) и с расстройкой параметров (С р-кой) по собственным частотам, погрешностям результатов с использованием метода МУП, ПМ и

программного комплекса ANSYS приведены в таблице 4.4 и на рис. 4.8, 4.9.

Таблица 4.4

Частоты собственных колебаний рабочего колеса без расстройки и с расстройкой, полученных с помощью МУП (Гц)

<b>Форма</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
<b>Без р-ки</b>	255,1		260,1	320,7		492		668,6		808,2		911,9
<b>С р –кой</b>	255	255,2	260	320,5	320,9	491,6	492,4	667,8	669	807,3	808,1	909,9
<b>Форма</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>
<b>Без р-ки</b>	911,9	987,4		1041,7		1079,7		1104,8		1119		1123,7
<b>С р –кой</b>	912,4	985,8	986,9	1037,3	1042,4	1075,3	1082	1100	1104	1113	1127	1129
<b>Форма</b>	<b>25</b>	<b>26</b>	<b>27</b>	<b>28</b>	<b>29</b>	<b>30</b>	<b>31</b>	<b>32</b>	<b>33</b>	<b>34</b>	<b>35</b>	<b>36</b>
<b>Без р-ки</b>	1461	1521,5		1737		2147		2713,8		3354		4001,6
<b>С р –кой</b>	1460	1517	1525	1735	1739	2141	2151	2709	2716	3351	3355	3996

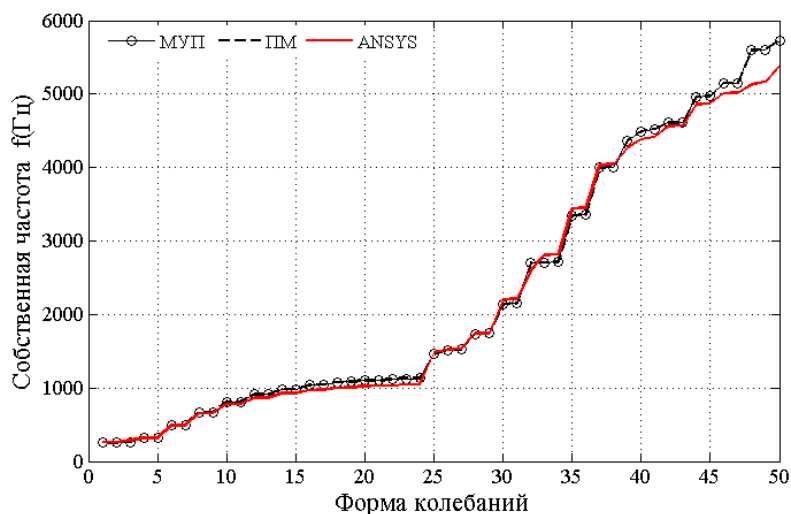
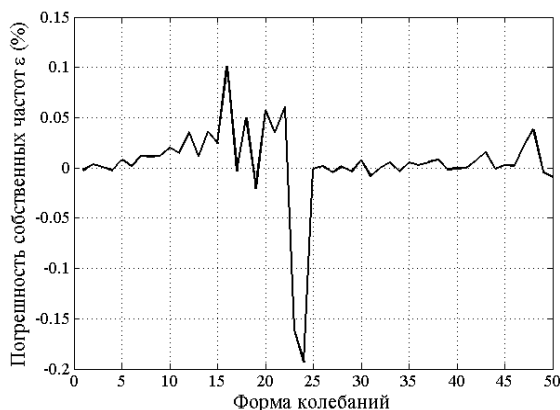
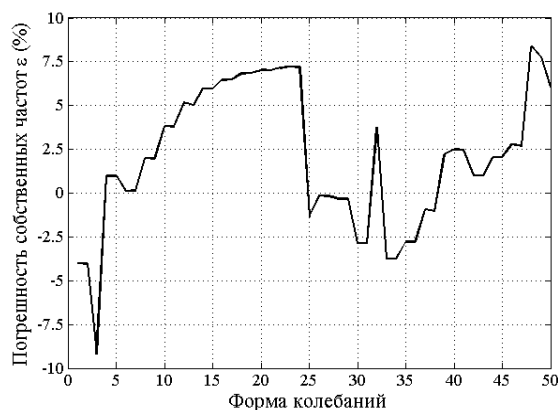


Рис. 4.8. График частот собственных рабочего колеса с расстройкой



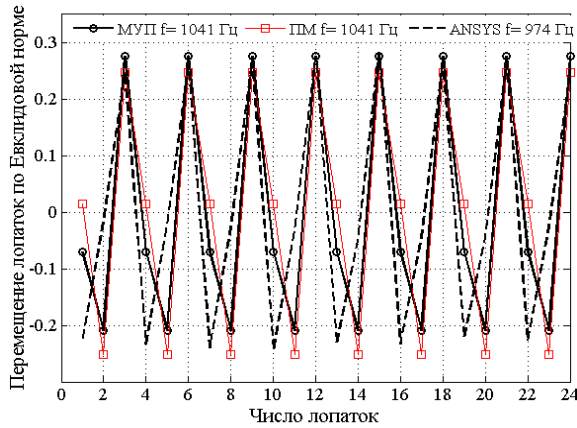
а)



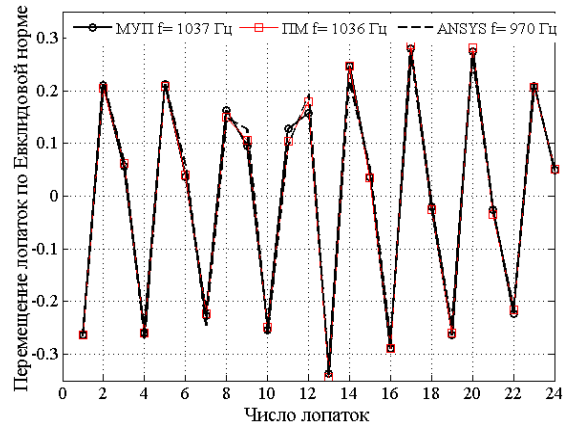
б)

Рис. 4.9. Погрешность результатов расчета частот собственных колебаний рабочего колеса с расстройкой (а- при использовании МУП и ПМ; б- при использовании МУП и программы ANSYS)

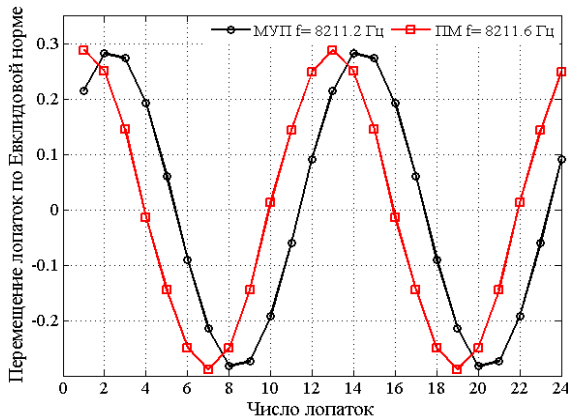
Подобные результаты характеристик собственных колебаний рабочего колеса без расстройки и с расстройкой параметров по Евклидовым нормам перемещения лопаток, соответствующего формам колебаний 16 (рис. 4.10а и 4.10в) и 100 (рис. 4.10б и 4.10г), приведены на рис. 4.10. Расчеты проводятся с помощью метода МУП, ПМ и программного комплекса ANSYS.



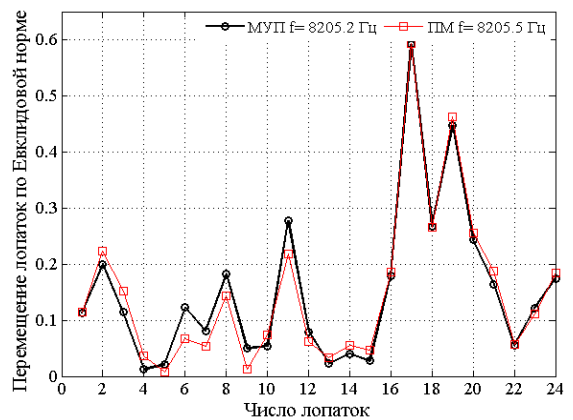
а) Форма 16



в) Форма 16



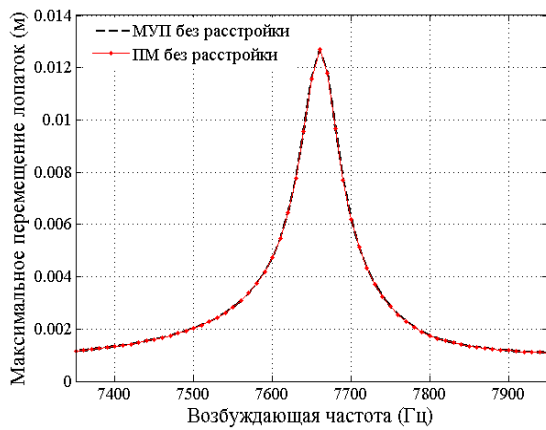
б) Форма 100



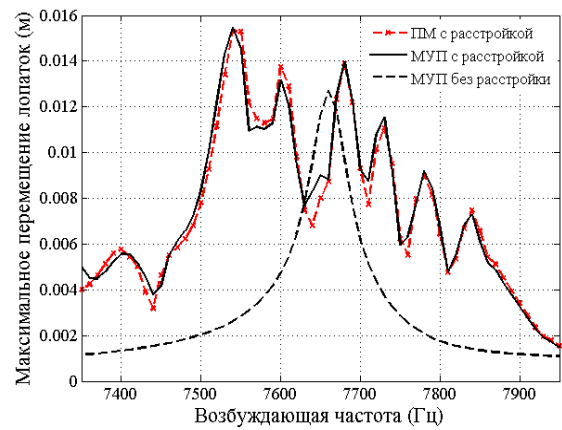
г) Форма 100

Рис. 4.10. График перемещения лопаток по Евклидовой норме (а, б- для рабочего колеса без расстройки; в, г - для рабочего колеса с расстройкой)

Результаты характеристик вынужденных колебаний рабочего колеса без расстройки и с расстройкой параметров по Евклидовым нормам перемещения лопаток, соответствующего порядку возмущения двигателя  $C = 5$ , отражена на рис. 4.11.



а)



б)

Рис. 4.11. График максимальных значений амплитуды лопаток для вынужденных колебаний рабочего колеса по Евклидовой норме

Из таблицы 4.3 и рис. 4.9 видно, что численные результаты МУП при исследовании собственных колебаний модельного рабочего колеса без расстройки и с расстройкой МКЭ на основе треугольных конечных элементов STI218 хорошо совпадают с данными эксперимента и результатами анализа в программном комплексе ANSYS. Полученные результаты МУП и МКЭ для ПМ очень близки. Кроме этого, здесь представлены результаты влияния расстройки жесткости лопаток на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин.

Известно, что в спектре собственных частот колебаний рабочего колеса без расстройки содержатся двукратные частоты, которые при введении малой расстройкой становятся разными. Поэтому при рассмотрении перемещений лопаток вынужденных колебаний, по одному порядку возмущения двигателя возникает одно критическое значение амплитуды колебаний для рабочего колеса без расстройки и несколько критических значений амплитуды для рабочего колеса с расстройкой (рис. 4.11).

Из рис. 4.10 и 4.11 видно, что для собственных колебаний расстройка нарушает гармоническое свойство Евклидовой нормы перемещений лопаток (рис. 4.10в, 4.10г). Особенно, в поворотных зонах частот (рис. 3.6), амплитуды перемещения лопаток для собственных колебаний и максимальное значение амплитуды перемещения лопаток для вынужденных колебаний рабочих колес даже с маленькой расстройкой жесткости сильно изменяются как каче-



ственно, так и количественно (рис. 4.10г, 4.11б). На примере вынужденных колебаний максимальное перемещение расстроенной системы увеличивается на 22% в сравнении с настроенной системой.

Данные исследования совпадают с выводами работ, опубликованных авторами Bladh J.R. [72] и Gisli Ottarsson [143], и позволяют решать задачи чувствительности колебаний и повышения прочности рабочих колес с расстройкой при проектировании новых и эксплуатации старых конструкций турбомашин.

#### **4.2.4. Программный комплекс для анализа влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес (PVROMBД)**

Для удобного решения широкого класса задач колебаний роторов турбомашин при их проектировании и эксплуатации авторы создали программное обеспечение для анализа влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин. Программный комплекс создан при помощи высокоуровневого языка «MATLAB», его алгоритм приведен на рис. 4.12. Математическим обеспечением комплекса являются метод МУП и МКЭ, которые подробно описаны в разделе 4.2. Программный комплекс состоит из трех подпрограмм. Первая программа - программа определения значений расстройки лопаток, алгоритм которой подробно описан в разделе 2.5. Вторая программа является программой анализа влияния расстройки параметров на характеристики собственных колебаний рабочих колес (рис. 4.13) и третья служит для анализа влияния расстройки параметров на характеристики вынужденных колебаний рабочих колес (рис. 4.14). Интерфейс программ прост и легко используется при расчете. Однако программный комплекс может работать на компьютере, оснащенный операционной системой «Microsoft Windows» 98/2000/2003/XP/Vista/7/8. Созданный программный комплекс может использоваться для любого рабочего колеса турбомашин и даёт результаты с высокой точностью. Он зарегистрирован в Федеральной службе по интеллектуальной собственности [60]. Решение задачи для анализа

влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин с применением МУП и МКЭ состоит из нескольких этапов:

1. Создание исходных данных одного сектора рабочего колеса. Основными системами исходных данных являются координаты и толщина, топология элементов, значения расстройки параметров, свойства материала каждого элемента, граничные условия и возбуждающие силы.

2. Описание элементов одного сектора в локальных координатах (трансформация глобальных координат узлов элементов в локальные координаты каждого элемента). Вычисление матриц жёсткости, масс и векторов возбуждающих сил для элементов одного сектора диска с безмассовыми лопатками и одной консольной лопатки.

3. Преобразование матриц жёсткости, масс и векторов возбуждающих сил для элементов в глобальных координатах для составления ансамбля элементов. Формирование матриц жёсткости, масс и вектора возбуждающих сил для одного сектора диска с безмассовыми лопатками и одной консольной лопатки.

4. Решение задачи собственных колебаний консольной лопатки, нахождение матрицы форм колебаний  $[\tilde{\delta}^b]$ . Вычисление матрицы форм колебаний  $N$  консольных лопаток  $[\delta^b]$ .

5. Решение задачи собственных колебаний диска с безмассовыми лопатками с помощью МЦС, нахождение матриц форм одного сектора диска с безмассовыми лопатками  $[\tilde{\mathcal{G}}^d]$ ,  $[\tilde{\delta}^d]$ . Вычисление матрицы форм колебаний диска с безмассовыми лопатками  $[\mathcal{G}^d]$ ,  $[\delta^d]$ .

6. Вычисление матриц жесткости и масс для всей конструкции  $[\hat{K}_d]$ ,  $[\hat{K}_b]$ ,  $[I_d]$ ,  $[I_b]$ ,  $[\delta^d]^T[K_b][\delta^d]$ ,  $[\delta^d]^T[K_b][\delta^b]$ ,  $[\delta^b]^T[K_b][\delta^d]$ ,  $[\delta^d]^T[M_b][\delta^d]$ ,  $[\delta^d]^T[M_b][\delta^b]$ ,  $[\delta^b]^T[M_b][\delta^d]$ .

7. Составление матриц  $\mathbf{Bdiag} \left[ \begin{array}{c} \text{diag} \left( 1 + \Delta f_n^k \right) \\ k=1, \dots, m_b \end{array} \right], \text{diag}[2\xi^k]$ .

Для задачи собственных колебаний:

- определение частот и форм собственных колебаний рабочего колеса с расстройкой из уравнения

$$\begin{bmatrix} [I_d] + [\delta^d]^T [M_b] [\delta^d] & [\delta^d]^T [M_b] [\delta^b] \\ [\delta^b]^T [M_b] [\delta^d] & [I_b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{a}\} \\ \{\ddot{b}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\hat{K}_d] + [\delta^d]^T [K_b] [\delta^d] & [\delta^d]^T [K_b] [\delta^b] \\ [\delta^b]^T [K_b] [\delta^d] & B \text{diag} \begin{bmatrix} \text{diag} (1 + \Delta f_n^k) \\ [\hat{K}_b] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{bmatrix} = 0;$$

- определение перемещений лопток по Еклидовой норме;
- печать и графическая визуализация результатов.

Для задачи вынужденных колебаний:

- определение вектора возбуждающих сил  $\{F\} = [\{F_d\}^T : \{F_b\}^T]^T$ ;
- определение перемещений лопаток по собственным частотам из уравнения

$$\begin{bmatrix} [I_d] + [\delta^d]^T [M_b] [\delta^d] & [\delta^d]^T [M_b] [\delta^b] \\ [\delta^b]^T [M_b] [\delta^d] & [I_b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{a}\} \\ \{\ddot{b}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}[2\xi^k] \otimes \sqrt{[\hat{K}_b]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\dot{a}\} \\ \{\dot{b}\} \end{bmatrix} + (1 + \gamma) \begin{bmatrix} [\hat{K}_d] & [\delta^d]^T [K_b] [\delta^b] \\ [\delta^b]^T [K_b] [\delta^d] & B \text{diag} \begin{bmatrix} \text{diag} (1 + \Delta f_n^k) \\ [\hat{K}_b] \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\delta^d]^T \{F\} \\ [\delta^b]^T \{F\} \end{bmatrix};$$

- определение максимальных значений амплитуды колебаний лопаток по Евклидовой норме;
- печать и графическая визуализация результатов.

Алгоритм расчёта приведен на рис. 4.12-4.14.

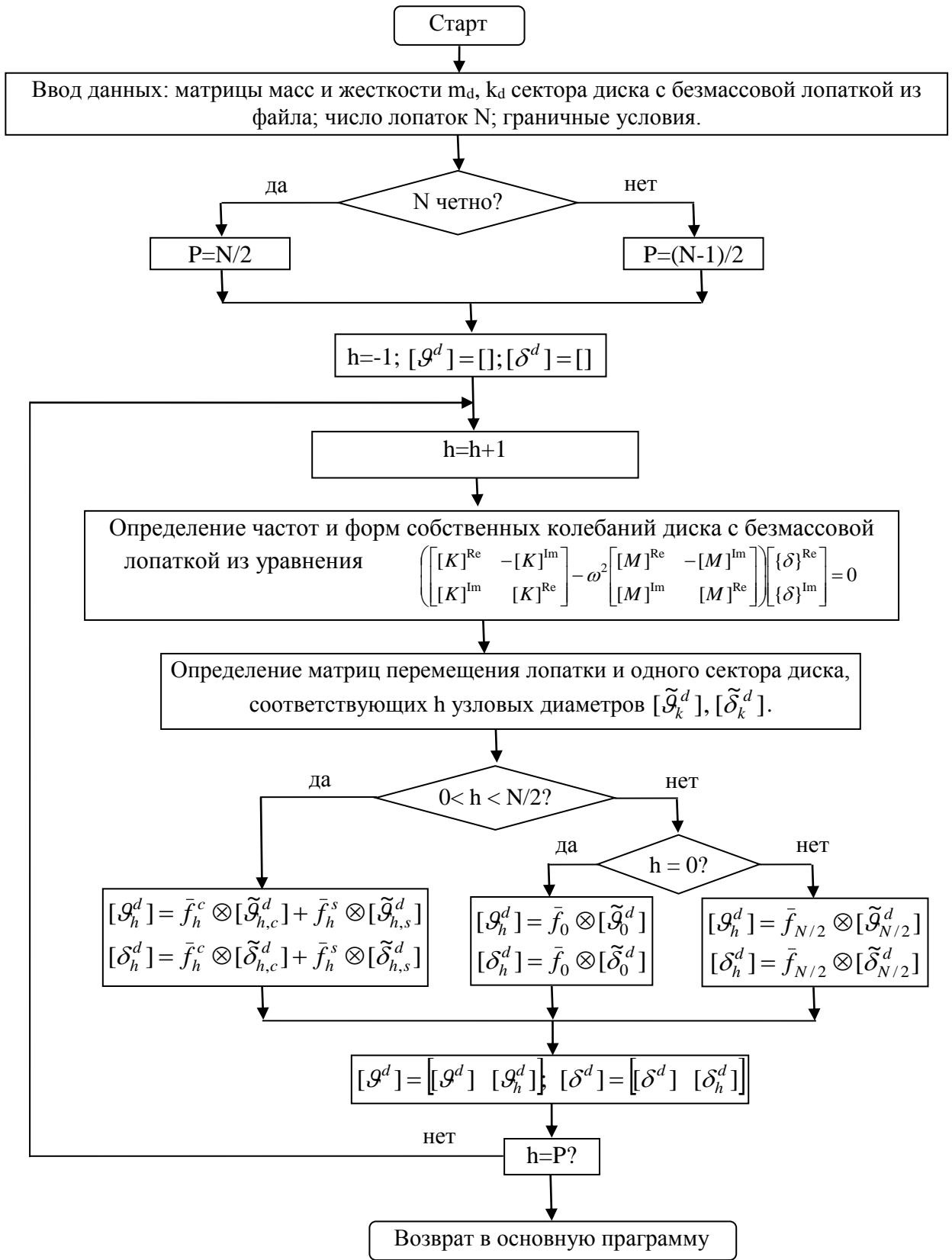


Рис. 4.12. Алгоритм расчёта матриц форм колебаний диска с безмассовыми лопатками  $[g^d]; [\delta^d]$



Рис. 4.13. Блок-схема алгоритма расчёта влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин

Алгоритм А расчета приведен как

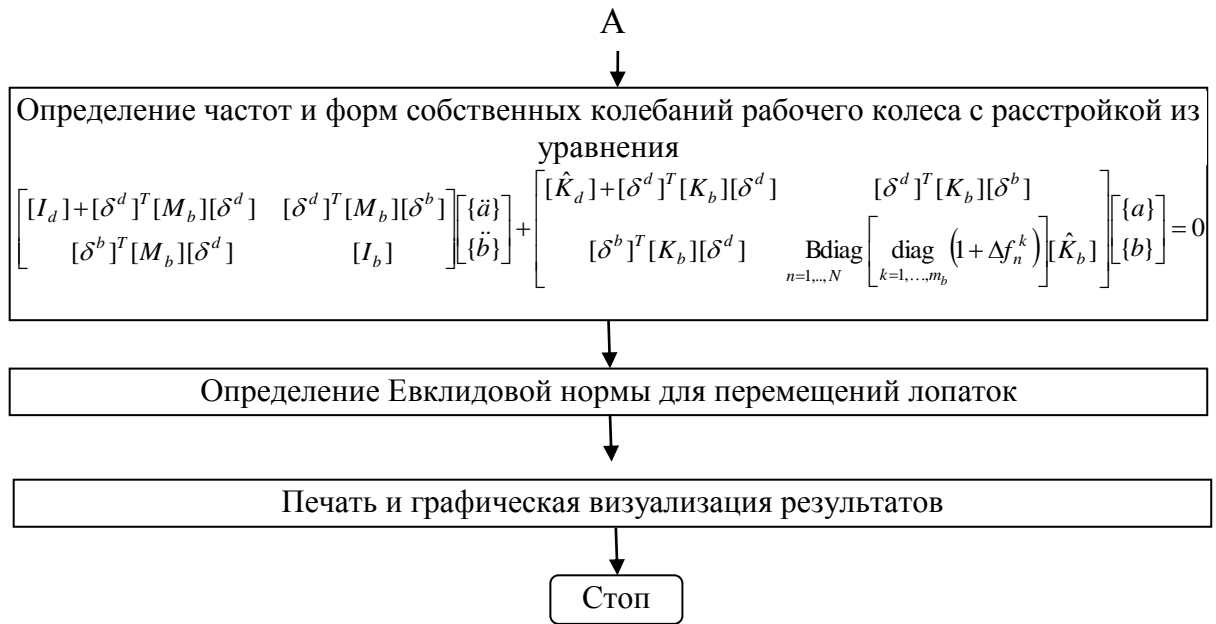


Рис. 4.14. А. Блок-схема алгоритма решения задачи о собственных колебаниях рабочих колес турбомашин

Алгоритм *Б* расчета приведён как

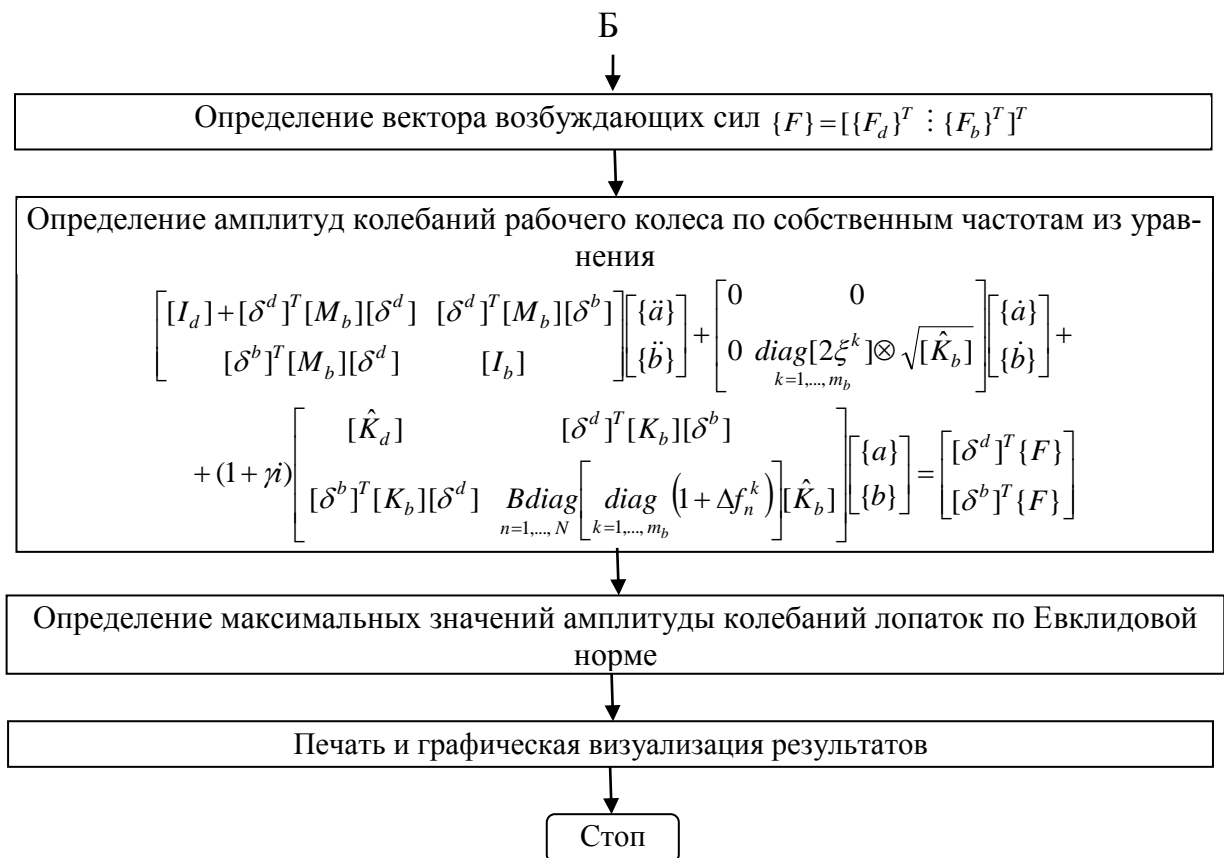


Рис. 4.14. Б. Блок-схема алгоритма решения задачи о вынужденных колебаниях рабочих колес турбомашин

Созданное программное обеспечение использовано для проектирования рабочих колес турбомашин. Результаты программы показаны на рис. 4.15-4.21.

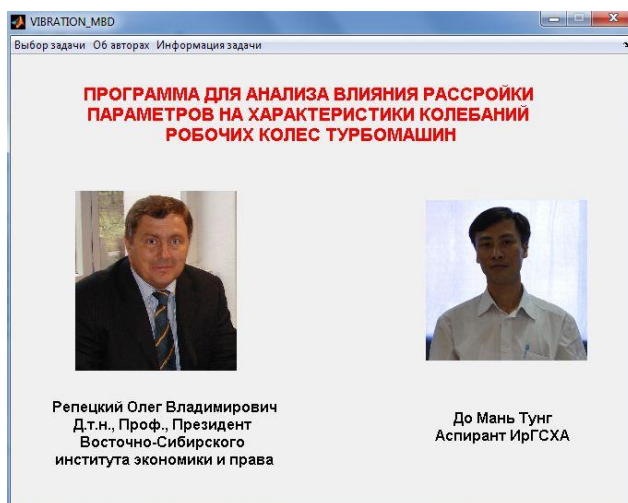


Рис. 4.15. Главное окно программного комплекса

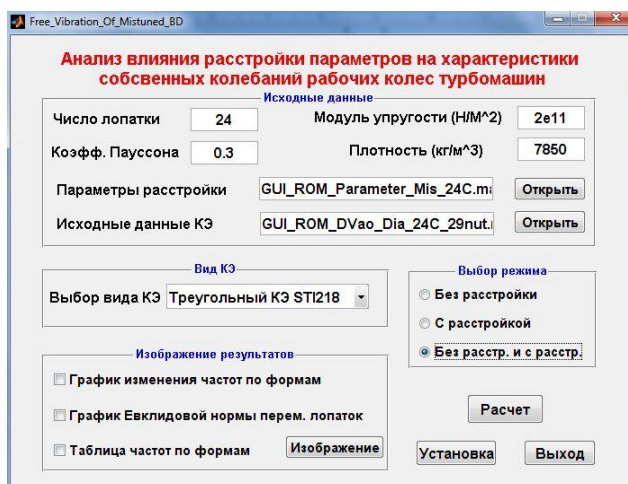


Рис. 4.16. Главное окно программы анализа влияния расстройки на характеристики собственных колебаний рабочих колес

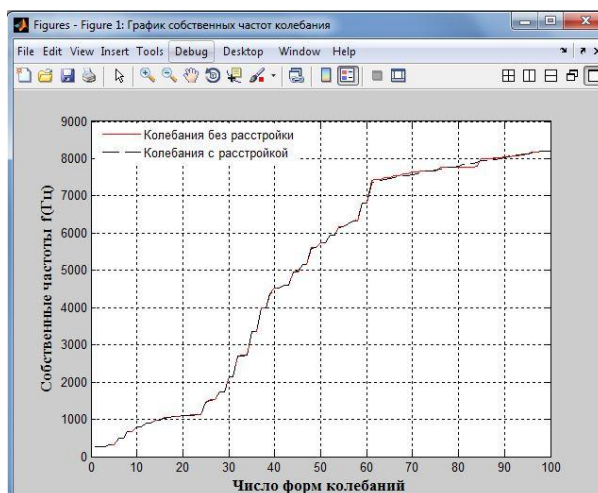
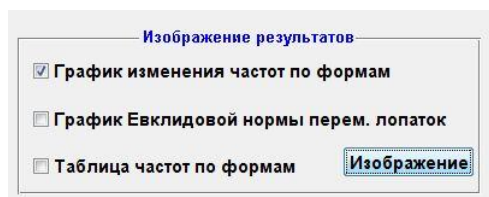


Рис. 4.17. График частот собственных колебаний рабочего колеса

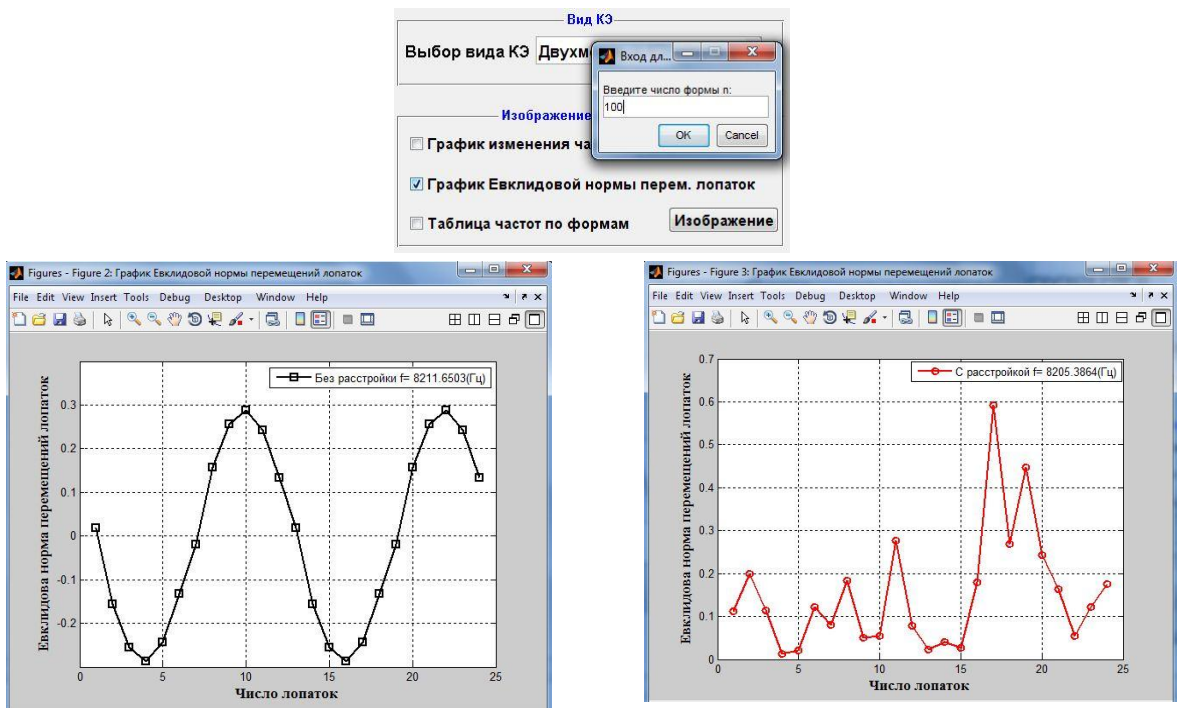


Рис. 4.18. График перемещения лопаток системы по Евклидовой норме

форма	f без расстр.	f с расстр.
01	2.5512e+002	2.5507e+002
02	2.5512e+002	2.5516e+002
03	2.6012e+002	2.6011e+002
04	3.2074e+002	3.2068e+002
05	3.2074e+002	3.2076e+002
06	4.9205e+002	4.9168e+002
07	4.9205e+002	4.9227e+002
08	6.6855e+002	6.6790e+002
09	6.6855e+002	6.6878e+002
10	8.0822e+002	8.0737e+002
11	8.0822e+002	8.0812e+002
12	9.1187e+002	9.0993e+002
13	9.1187e+002	9.1227e+002
14	9.8742e+002	9.8583e+002
15	9.8742e+002	9.8689e+002
16	1.0417e+003	1.0373e+003
17	1.0417e+003	1.0424e+003
18	1.0797e+003	1.0753e+003
19	1.0797e+003	1.0820e+003
20	1.1048e+003	1.1004e+003
21	1.1048e+003	1.1040e+003
22	1.1191e+003	1.1134e+003
23	1.1191e+003	1.1271e+003
24	1.1237e+003	1.1290e+003
25	1.4612e+003	1.4607e+003

Рис. 4.19. Таблица частот собственных колебаний рабочего колеса

**Анализ влияния расстройки параметров на характеристики вынужденных колебаний рабочих колес турбомашин**

**Исходные данные**

Число лопатки: 24      Модуль упругости (Н/М<sup>2</sup>): 2e11  
 Коэфф. Пуассона: 0.3      Плотность (кг/м<sup>3</sup>): 7850

Параметры расстройки: GUI\_ROM\_Parameter\_Mis\_24c.m: Открыть  
 Исходные данные КЭ: GUI\_ROM\_DVao\_Dia\_24c\_29nut.i: Открыть

**Вид КЭ**

Выбор вида КЭ: Треугольный КЭ ST1218

С: 5       $\xi$ : 0.006       $\gamma$ : 0

Закон возб. силы: GUI\_ROM\_Luc\_Mis\_24c\_29nut

$f_{мин}$  (Гц): 7350       $f_{дел}$ : 10       $f_{мак}$  (Гц): 7950

График Евклидовой нормы перем.: Изображение

**Выбор режима**

Без расстройки  
 С расстройкой  
 Без расстр. и с расстр.

Расчет

Установка      Выход

Рис. 4.20. Главное окно программы анализа влияния расстройки на характеристики вынужденных колебаний рабочих колес



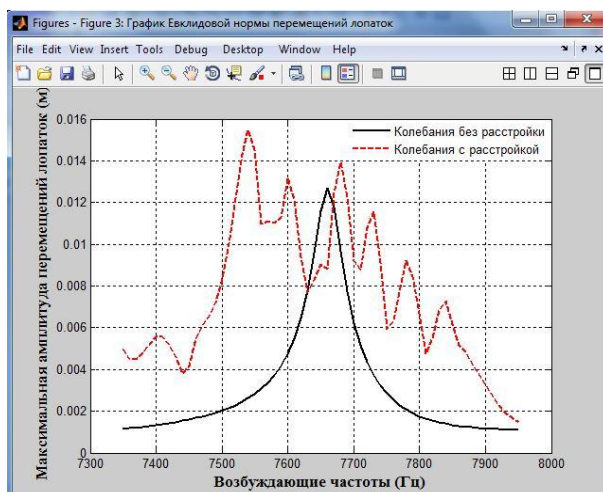


Рис. 4.21. График максимальных значений амплитуды перемещения лопаток для вынужденных колебаний рабочего колеса

### 4.3. Экспериментальное и численное исследование для оценки влияния расстройки масс лопаток на колебания рабочих колес турбомашин

Как указано выше, присоединение масс к лопаткам является обычным походом при эксперименте для создания данных вариантов расстройки рабочих колес турбомашин. В данном разделе рассмотрена схема исследования эксперимента характеристик колебаний рабочих колес с расстройкой масс, проведенная авторами Репецкий О.В., Рыжиков И.Н. и др. [58]. в лаборатории Института механики твердого тела Дрезденского технического университета.

#### 4.3.1. Оборудование и подготовка эксперимента

Для измерения вибрационных характеристик использовался лазерный сканирующий виброметр PSV – 400, принцип работы которого основан на эффекте Доплера. Прибор измеряет сдвиг частоты отраженного от вибрирующей поверхности лазерного луча и вычисляет мгновенные значения виброскорости и виброперемещения. Основное преимущество такого виброметра в том, что он позволяет быстро и точно измерять механические вибрации конструкции. Виброметр обладает возможностями измерений как мелких ( $\text{мм}^2$ ), так и крупногабаритных конструкции ( $\text{м}^2$ ) в диапазоне частот до 20 МГц и в диапазоне виброскоростей до 20 м/с. В состав оборудования входят: высокочувствительная моторизованная лазерная головка и цветная видеокамера с автоматической фокусировкой. Схема измерения параметров вибрации показана на рис. 4.22.

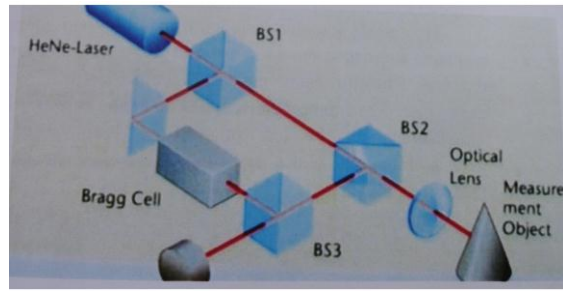


Рис. 4.22. Схема измерения параметров вибрации

Лазерная головка виброметра фиксировала виброскорости и виброперемещения точек колеблющейся модели рабочего колеса (рис. 4.28). При помощи специального программного обеспечения на мониторе компьютера можно наблюдать формы колебаний модели, соответствующие определенным собственным частотам (рис. 4.29).

Модели рабочих колес представляли собой плоские крыльчатки с центральным отверстием, вырезанные на высокоточной лазерной установке из листа стали толщиной 2 мм. Модели имели четное (6) и нечетное (7) количество лопаток (рис. 4.23, 4.24).

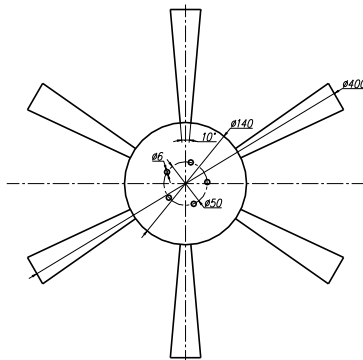


Рис. 4.23. Модель с 6-ю лопатками

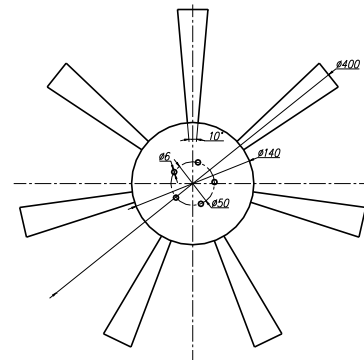


Рис. 4.24. Модель с 7-ю лопатками

Возбуждение колебаний модели выполнено двумя способами: с помощью электромагнитного шейкера и однократным выведением модели из равновесия (легким ударом) с помощью специального молотка (modal hammer).

При возбуждении колебаний с помощью электромагнитного шейкера модель крепилась по внутреннему отверстию с использованием толстых алюминиевых шайб на шейкере (рис. 4.25). Электронный блок (рис. 4.26) генерировал сигнал в диапазоне 0-100 Гц, сигнал передавался на шейкер, подвижная часть которого оказывала воздействие на модель с переменной силой, возбуждая ее колебаний с частотой сигнала.

При возбуждении колебаний с использованием молотка (рис. 4.27) модель закреплена по внутреннему отверстию на жестком основании.

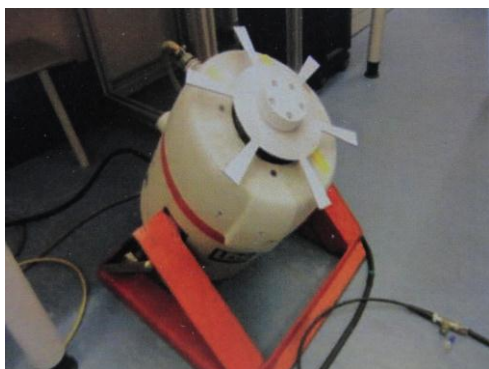


Рис. 4.25



Рис. 4.26



Рис. 4.27



Рис. 4.28

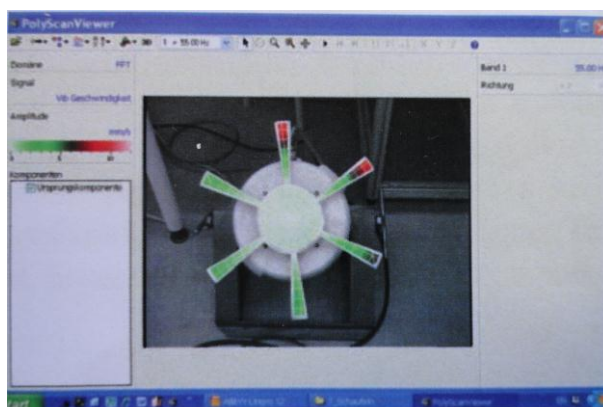


Рис. 4.29. График, полученный с помощью специального программного обеспечения

#### 4.3.2. Результаты экспериментальных и численных исследований

В данном разделе приведены результаты характеристик собственных колебаний для настроенной модели диска с 6-ю лопатками (рис. 4.23) и расстроенной модели диска с 7-ю лопатками (рис. 4.24) с помощью проведения эксперимента и анализа в программе VLADIS+. Также представлен метод моделирования рабочего колеса с расстройки масс на основе МУП, даны результаты характеристик собственных колебаний этих моделей с использованием программы PVROMBD.

**Первый случай:** измерены характеристики собственных колебаний настроенной модели диска с 6-ю лопатками. Результаты частот собственных колебаний модели в сравнении с данными анализа в программах BLADIS+ [51] и PVROMBD приведены в таблице 4.5 и на рис. 4.30.

Таблица 4.5

Собственные частоты колебаний модели диска с 6-ю лопатками (Гц)

Форма	Эксперимент	BLADIS+	PVROMBD (STI 218)
$f_1$	85,219	87,710	83,5
$f_2$	86,975	86,726	83,2
$f_3$	87,250	86,726	83,2
$f_4$	92,375	89,007	84,1
$f_5$	92,094	89,007	84,1

Результат первой формы собственных колебаний приведен на рис. 4.30

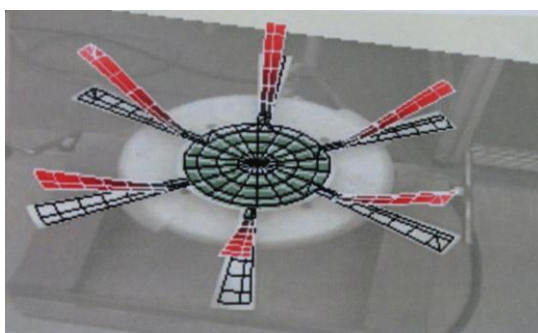


Рис. 4.30 График первой формы собственных колебаний модели

Из таблицы 4.5 и рис. 4.30 очевидно, что результаты эксперимента хорошо согласуются с результатами расчетов в программах BLADIS+ и PVROMBD, погрешности изготовления и закрепления модели повлияли на их колебания незначительно и модель практически симметрична.

**Второй случай:** измерены характеристики собственных колебаний рабочего колеса с расстройкой масс. При проведении эксперимента расстройка вводилась путем присоединения отрезка с разной массой к периферийной части лопаток (рис. 4.31). Масса каждого отрезка измерялась на электронных весах с точностью до 0,001 г.

При использовании программы PVROMBD для расчета характеристики колебаний рабочего колеса с расстройкой масс, нужно проводить два шага. Первый шаг: определение значений расстройки лопаток. При этом расстрой-

ка массы лопатки моделируется путем увеличения плотности периферийной части лопаток (рис. 4.32), соответствующего дополнительным массам. Второй шаг: расчет характеристик колебаний.



Рис. 4.31. Присоединение дополнительных масс к периферийной части лопаток при эксперименте

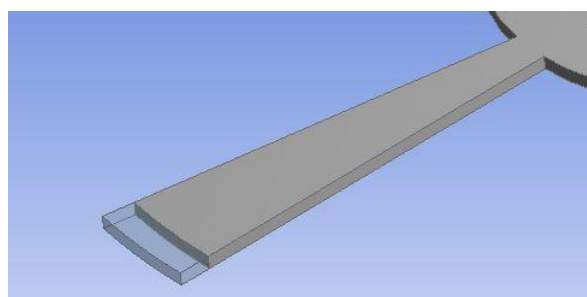


Рис. 4.32. Моделирование лопатки с дополнительной массой при расчете с помощью программы PVROMBD

В качестве объекта исследования рассмотрена модель диска с 7-ю лопатками (рис. 4.24). Дополнительная масса присоединялась ко всем лопаткам модели по двум законам размещения расстройки: Величина дополнительной массы равномерно увеличивалась от 0 до 1,2 г. в окружном направлении от лопатки к лопатке (0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2) и масса в окружном направлении менялась «пилообразно» (0; 0,2; 1,0; 0,6; 1,2; 0,4; 0,8). Результаты частот собственных колебаний приведены в таблице 4.6.

Таблица 4.6

Частоты собственных колебаний модель «диск-лопатка» с расстройкой (Гц)

Форма	Вариант 1		Вариант 2	
	Эксперимент	PVROMBD	Эксперимент	PVROMBD
$f_1$	79,844	80,30	80,031	80,40
$f_2$	81,75	80,88	82,032	80,80
$f_2'$	83,0625	81,67	82,344	81,44
$f_3$	88,7188	82,22	89,219	82,41
$f_3'$	90,313	82,66	90,094	82,66

Из таблицы 1.2 видно, что в первом варианте наблюдается значительная локализация колебаний в отличие от второго варианта. Также для первого варианта различие в частоте для парных форм колебаний более значительное, чем для второго.

#### 4.4. Исследование влияния расстройки на собственные колебания рабочих колес с использованием свойств циклической симметрии

При изучении колебаний роторов турбомашин рабочие колеса обычно рассматриваются как ЦСС. При этом все лопатки колеса представляются абсолютно идентичными. Однако на практике у реальных рабочих колес всегда возникают малые технологические отклонения между лопатками (по массе, геометрии, частоте и т.д.), вызванные расстройкой параметров. Как правило, известно, что в какой-то степени эти технологические отклонения влияют на частотную характеристику конструкции. Если расстройка параметров на рабочем колесе подчиняется циклическим причинам (например, расстройка четных лопаток для диска с четным числом лопатки или расстройка 1-ой, 3-ой, 6-ой, 9-ой лопатки для диска с 9-ью лопатками, ... одинакова), то изучение влияния расстройки такого рабочего колеса может быть приведено к одному сектору. Тогда хотя рабочее колесо имеет расстройку параметров, но оно тоже рассматривается как ЦСС с порядком симметрии  $N/2$ ,  $N/3$ , ... В этом разделе исследовано влияние расстройки геометрии лопаток на частотную характеристику собственных колебаний рабочих колес с использованием свойства циклической симметрии.

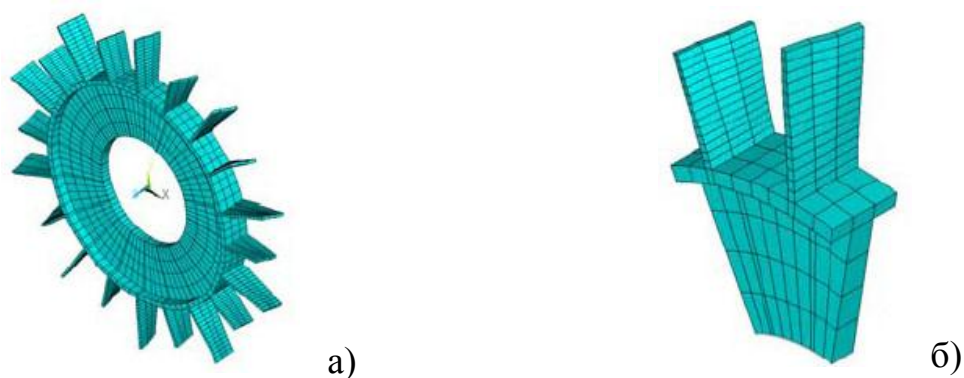


Рис. 4.33. Конечноэлементная модель для рабочих колес (а- полная модель; б- один периодический сектор, имеющий две лопатки)

Идеальные рабочие колеса турбомашин обладают порядком симметрии  $N$ ,  $N$  - количество лопаток. Математическое моделирование для ЦСС с порядком симметрии  $N/2$ ,  $N/3$ , ... при расчете собственных колебаний строится как ЦСС с порядком симметрии  $N$ , которое рассмотрено в разделе 3.2. В дан-

ном разделе представлен метод анализа собственных колебаний диска с  $N$  лопаток,  $N$ - четное число, как ЦСС с порядком симметрии  $N/2$ . При этом циклический сектор рабочего колеса ЦСС с порядком симметрии  $N/2$  содержит две лопатки (рис. 4.33 б), что позволяет изменить толщину одной из них и внести регулярную расстройку в рабочее колесо.

#### 4.4.1. Исследование собственных колебаний рабочих колес без расстройки как ЦСС с порядком симметрии $N/2$

Рассмотрим колебания рабочих колес без расстройки, которые имеют  $N$  лопаток и  $N$  - четное число. Расчет собственных колебаний рабочих колес без расстройки как ЦСС с порядком симметрии  $N$  при использовании МЦС дает результаты с высокой точностью и его алгоритм описан в разделе 3.2.

Кроме этого, такое колесо может рассматриваться как ЦСС с порядком симметрии  $N/2$ , при этом периодический сектор имеет две лопатки. Математическая модель, уравнение равновесия и решение задачи проводятся с помощью МЦС и МКЭ на основе треугольных конечных элементов STI218 по формулам (3.19-3.37). Для проверки точности алгоритма и программы результаты расчета сравнены с данными, полученными при расчете собственных колебаний рабочих колес без расстройки как ЦСС с порядком симметрии  $N$ .

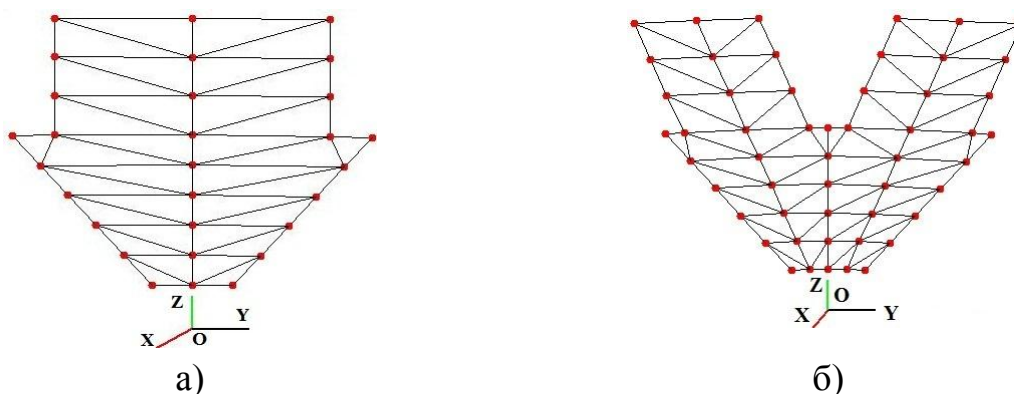


Рис. 4.34. Конечноэлементная модель одного сектора рабочего колеса с порядком симметрии 24 (а) и 12 (б)

В качестве примера рассмотрено модельное рабочее колесо, содержащее 24 лопатки. Геометрические размеры и характеристики материала рассчитываемой конструкции: внутренний радиус - 0,0135 м, внешний радиус -

0,06 м, толщина диска и лопатки - 0,002 м, длина лопатки -0,036 м, ширина лопатки - 0,012 м, модуль упругости материала - 210 ГПа, плотность - 7850 кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона - 0,3.

Конечноэлементная модель периодического сектора содержит 174 степени свободы для модели рабочего колеса с порядком симметрии 24 и 312 степеней свободы для модели рабочего колеса с порядком симметрии 12 (рис. 4.34). Результаты расчета частот собственных колебаний рабочего колеса без расстройки с порядком симметрии 24 и 12 в зависимости от числа узловых диаметров «*n*» и узловых окружностей «*m*» приведены на рис. 4.35 и в таблице 4.7.

Таблица 4.7

Сопоставление расчетных значений частот собственных колебаний рабочего колеса с порядком симметрии 24 и 12 при использовании МЦС

Порядок симметрии	<i>n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
24-й	<i>m</i> =0	260	255	321	492	669	808	912	987	1042	1080	1105	1119	1124
	<i>m</i> =1	1461	1522	1737	2147	2714	3354	4002	4613	5155	5605	5947	6166	6243
12-й	<i>m</i> =0	269	258	318	492	668	807	909						
	<i>m</i> =1	1122	1118	1103	1078	1040	986	911						
	<i>m</i> =2	1472	1522	1731	2153	2727	3633	3990						
	<i>m</i> =3	2697	4517	4959	5592	5145	4608	4016						

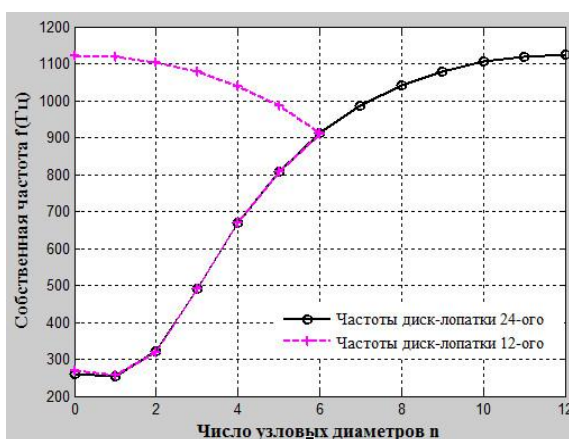


Рис. 4.35. Взаимосвязь между результатами собственных колебаний при моделировании рабочего колеса с порядком симметрии 24 и 12

На рис. 4.35 показаны собственные частоты, полученные с помощью расчета колебаний рабочего колеса с порядком симметрии 24 при числе узловых окружностей *m*=0 и с порядком симметрии 12 при *m*=0 и *m*=1. Из ри-



сунка видно, что первая часть графика собственных частот (при  $m=0$ ,  $n=0-6$ ) рабочего колеса с порядком симметрии 24 совпадает с графиком собственных частот (при  $m=0$ ,  $n=0-6$ ) рабочего колеса с порядком симметрии 12, а последняя часть графика собственных частот (при  $m=0$ ,  $n=6-12$ ) рабочего колеса с порядком симметрии 24 не что иное, как зеркальное отображение графика собственных частот (при  $m=1$ ,  $n=0-6$ ) рабочего колеса с порядком симметрии 12. Таким образом, два семейства собственных частот, полученных при расчете модели с порядком симметрии 12, соответствуют одному семейству, полученному при расчете с порядком симметрии 24, при этом мы имеем одну парную частоту при  $n=12$ .

#### **4.4.2. Исследование собственных колебаний рабочих колес с расстройкой как ЦСС с порядком симметрии $N/2$**

**Реализация расстройки.** Рассмотрено рабочее колесо, имеющее  $N$  лопаток,  $N$  - четное число. Если это колесо рассматривается как ЦСС с порядком  $N/2$ , тогда периодический сектор имеет две лопатки. Расстройка геометрии вносится в расчет путем изменения толщины одной лопатки этого сектора ЦСС.

Известно, что при введении расстройки толщины лопаток рабочее колесо становится ЦСС с порядком симметрии  $N/2$ . Расчет собственных колебаний рабочих колес с расстройкой, которые являются ЦСС с порядком симметрии  $N/2$ , тоже проводится МЦС и МКЭ на основе треугольных конечных элементов STI218. Для проверки точности расчета полученные результаты сравнивают с данными анализа в программном комплексе ANSYS.

Для тестирования точности алгоритма расчета решена задача собственных колебаний модельного рабочего колеса, содержащего 24 лопатки. Геометрические размеры, характеристики материала конструкции и конечноэлементная модель показаны выше.

В данной работе приведены 2 варианта расстройки толщины лопаток: жесткий диск с упругими лопатками (для чего толщина диска увеличивается намного больше, чем толщина лопаток) и упругое рабочее колесо.

**Первый вариант:** жесткий диск с упругими лопатками:  $h_d=15, h_1=2, h_2=1,5$ .

**Второй вариант:** упругое рабочего колеса:  $h_d=2, h_1=2, h_2=1,7$ .

Для исследования влияния толщины диска на частотные характеристики рассмотрены 2 варианта рабочего колеса без расстройки лопаток, но с изменяемой толщиной диска.

**Третий вариант:** жесткий диск с упругими лопатками, толщина двух лопаток сектора одинакова:  $h_d=10, h_1=1, h_2=1$ .

**Четвёртый вариант:** упругое рабочего колеса, толщина двух лопаток сектора одинакова:  $h_d=2, h_1=2, h_2=2$ ,

где  $h_d$  – толщина диска,  $h_1, h_2$  – толщины первой и второй лопатки сектора.

Результаты расчета МЦС для модели с порядком симметрии 12 и с помощью программного комплекса ANSYS приведены в таблице 4.8 и на рис. 4.36.

Таблица 4.8

Частоты собственных колебаний рабочего колеса при различной толщине диска и лопаток (мм)

$m$	$n$	$h_d=10, h_1=1, h_2=1$		$h_d=15, h_1=2, h_2=1,5$		$h_d=2, h_1=2, h_2=2$		$h_d=2, h_1=2, h_2=1,7$	
		МЦС	ANSYS	МЦС	ANSYS	МЦС	ANSYS	МЦС	ANSYS
0	0	646	643	649	642	269	284	277	290
	1	646	645	649	639	259	266	266	272
	2	648	646	650	640	318	319	326	324
	3	651	647	651	644	492	493	497	495
	4	651	649	651	646	668	656	662	650
	5	651	649	651	660	807	778	783	760
	6	651	650	651	662	909	866	849	817
1	0	651	660	963	951	1122	1041	1036	977
	1	651	658	962	950	1118	1037	1033	975
	2	651	653	967	950	1103	1025	1024	966
	3	651	653	972	946	1078	1004	1006	951
	4	651	651	974	941	1040	973	979	928
	5	651	650	974	940	986	929	938	893
	6	651	650	974	940	911	867	900	858
2	0	3349	3281	3362	3269	1472	1485	1444	1441
	1	3265	3013	3278	2996	1522	1528	1488	1478
	2	3885	3634	3915	3657	1731	1748	1679	1678

	<b>3</b>	3934	4013	3936	4007	2153	2214	2080	2120
	<b>4</b>	3937	4030	3937	4009	2727	2825	2641	2712
	<b>5</b>	3937	4033	3937	4025	3363	3463	3266	3333
	<b>6</b>	3937	4033	3937	4120	3990	4065	3803	3820

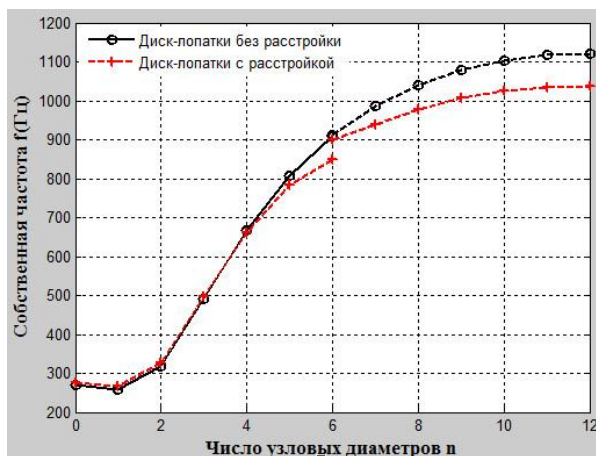


Рис. 4.36. Влияние расстройки толщины лопаток на первое семейство собственных частот колебаний рабочего колеса ( $h_d=2$ ;  $h_1=2$ ;  $h_2=1,7$ )

Из таблицы 4.8 и рис. 4.36 видно, что

Результаты МЦС при расчете собственных колебаний рабочего колеса как ЦСС с порядком симметрии 12 хорошо согласуются с результатами анализа в программном комплексе ANSYS.

В первом и втором случае моделируются колебания жесткого диска с упругими лопатками. При незначительном изменении толщины второй лопатки (второй случай) появляется расщепление парных частот, потому что собственные частоты колебаний лопаток теперь отличаются. Диск тоже незначительно влияет на собственные колебания рабочего колеса.

В третьем и четвертом случае моделируются колебания системы упругого рабочего колеса. При уменьшении толщины одной лопатки собственные частоты нижнего семейства повышаются для маленьких узловых диаметров ( $n=0-4$ ). Это объясняется тем, что для упругого рабочего колеса лопатки играют роль присоединенной массы и с ее уменьшением частота колебаний увеличивается. Особенно при  $m=6$  появляется расщепление парных собственных частот (рис. 4.36).

Кроме этого, известно, что первый и третий вариант являются настроенными. Можно использовать МЦС для расчета собственных колебаний ра-

бочего колеса как ЦСС с порядком симметрии 24. Собственные частоты в зависимости от числа узловых диаметров и узловых окружностей приведены на рис. 4.37.

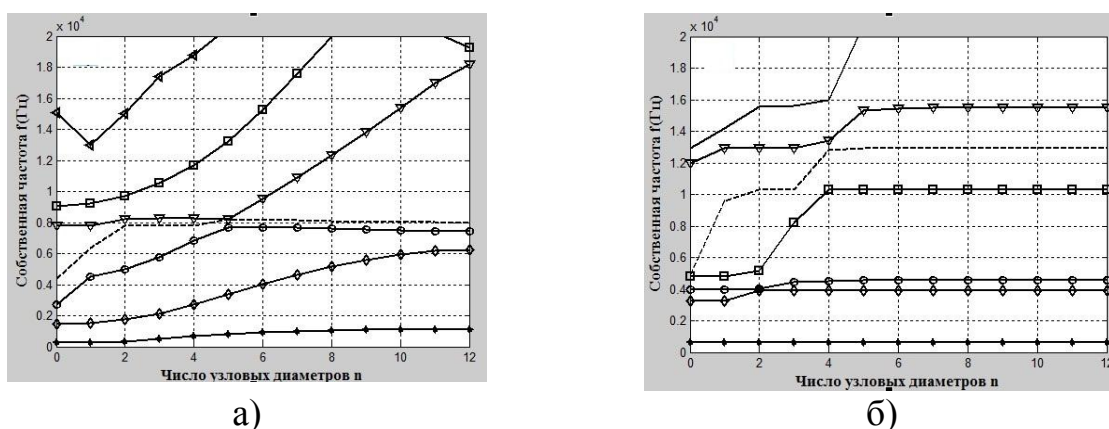


Рис. 4.37. График частот собственных колебаний рабочего колеса  
 а) упругое рабочее колесо ( $h_d=2, h_1=2, h_2=2$ )  
 б) жесткий диск с упругими лопатками ( $h_d=10, h_1=1, h_2=1$ )

Из таблицы 4.8 и рис. 4.37 видно, что в первом случае (система жесткого диска с одинаковыми упругими лопатками) для первой пары семейства частот ( $m=0; m=1$ ) диск не оказывает влияния на колебания отдельных лопаток, т.е. диск не колеблется. Тогда мы получаем два семейства одинаковых парных частот колебаний лопатки. Для высоких пар семейств частот, при маленьких узловых диаметрах ( $n=0, 1, 2$ ), диск колеблется, но оказывает небольшое влияние на колебания отдельных лопаток. При высоких узловых диаметрах диск не оказывает влияния на колебания отдельных лопаток (рис. 4.37).

#### 4.5. Выводы

В данной главе приведено математическое моделирование и решение задач при анализе колебаний рабочих колес турбомашин с расстройкой параметров на основе ПММ. Использование этого метода дает простую математическую модель и динамическое уравнение с незначительным размером, расстройка легко вносится в расчет путем изменения эквивалентных физических величин лопаток (жесткость, масса, демпфер). Использование этого метода позволяет исследовать влияния расстройки массы и демпфера лопаток на динамические характеристики рабочих колес, а также снижать трудоемкость и численные затраты времени в расчете.

Представлен метод МУП и экспериментальный метод для исследования колебаний рабочих колес турбомашин без расстройки и с расстройкой параметров лопаток. В методе МУП использован метод синтеза форм колебаний, при котором один периодический сектор рабочего колеса разделен на две части. Это диск с безмассовыми лопатками, жестко защемленный на внутреннем радиусе и консольная лопатка, жестко защемленная на поверхности между диском и лопаткой (см. [86, 105]). При этом используются матрицы масс и жесткости конечных элементов одиночной лопатки. Поэтому расстройка жесткости лопатки легко моделируется в расчете.

При использовании МУП исходные данные и математическое моделирование строятся из одного сектора, чтобы снизить используемый объем памяти компьютера и вычислительные затраты. Кроме этого, результаты расчета МУП хорошо согласуются с данными эксперимента и результатами, которые получены с помощью МКЭ для полной модели рабочего колеса и программного комплекса ANSYS. Метод МУП используется для исследования характеристик колебаний и долговечности рабочих колес с расстройкой в промышленных роторах турбомашин.

Представлен метод для исследования влияния расстройки геометрии лопаток на характеристики собственных колебаний рабочих колес с использованием свойств циклической симметрии. Также на примере модельного рабочего колеса рассмотрено влияние расстройки толщины лопаток и диска на спектр частот собственных колебаний системы. Результаты расчета согласуются с результатами анализа в системе ANSYS. Использование этого метода позволяет исследовать влияние расстройки масс, модуля упругости и других геометрических параметров лопаток на частотную характеристику собственных колебаний рабочих колес турбомашин.

В данной главе даны методы и важные результаты для оценки влияния расстройки параметров лопаток на характеристики колебаний рабочего колеса. Получаемые данные позволяют рассчитать прочность и надежность конструкции с учетом расстройки и разработать рекомендации по повышению ресурса эксплуатируемых конструкций. Данные исследования являются базовыми для дальнейшего анализа влияния расстройки параметров на долговечность рабочих колес турбомашин.

## **ГЛАВА 5. АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКОНОВ РАССТРОЙКИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЕБАНИЙ РЕАЛЬНЫХ РАБОЧИХ КОЛЕС ТУРБОМАШИН**

Как отмечалось во втором разделе, расстройка параметров рабочих колес состоит из небольших отличий лопаток в геометрии, характеристиках материала и условиях закрепления лопаток в замках и бандаже. Причины расстройки параметров могут быть разные. Расстройка может играть положительную и отрицательную роль [20, 80, 91, 92, 112, 135, 162]. В случае флаттера расстройка лопаточного венца рабочего колеса турбомашин всегда приводит к стабилизации лопаточной решетки. А в случае вынужденных колебаний расстройка может приводить к увеличению амплитуды колебаний отдельных лопаток, что соответственно приводит к их быстрому усталостному разрушению. Уровень влияния расстройки параметров рабочих колес на их характеристики колебаний во многом зависит от законов и/или видов расстройки. На практике известно много работ, которые посвящены использованию методов оптимизации для нахождения наилучших и наихудших вариантов расстройки по пределу прочности или увеличению вынужденного отклика рабочих колес. Также разработаны лучшие сборки лопаток на диске, когда варианты расстройки уже известны. Однако поиск наихудших вариантов расстройки является полезным, потому что оно включает в себя нахождение максимума вынужденного отклика лопатки расстроенных рабочих колес. Дополнительно исследование видов и вариантов расстройки лопаток, приведенных к максимальному отклику системы, и их влияние на характеристики колебаний системы могут дать важную информацию при проектировании деталей турбомашин.

Кроме этого, реальные рабочие колеса турбомашин имеют разные типы и их конструкция очень сложна. Это рабочие колеса без бандажа, рабочие колеса с бандажом и др. [17]. Они часто работают в высоких температурных условиях, сложных условиях возбуждения и при больших скоростях вращения. Определение динамических характеристик рабочих колес является

очень важным для предотвращения вредных эффектов резонанса и обеспечения надёжной работы двигателей. На практике использование метода конечных элементов (МКЭ) для определения динамических характеристик реальных рабочих колес дает результаты с высокой точностью и позволяет учитывать модели со сложной геометрией сечения, но требует создания соответствующих конечноэлементных моделей и дополнительные условия. В этом разделе исследуем характеристики колебаний реальных рабочих колес без расстройки и с расстройкой жесткости лопаток с помощью метода циклической симметрии (МЦС) и метода уменьшенного порядка (МУП). Матрицы масс, жесткости и др. конструкции создаются с использованием МКЭ на основе треугольных конечных элементов (STI218).

### 5.1. Общая схема анализа влияния расстройки параметров на характеристики колебаний реальных рабочих колес

При исследовании собственных колебаний с помощью МЦС, предполагается, что рабочие колеса можно разделить на  $N$  одинаковых секторов, где  $N$  - число лопаток. Уравнение равновесия системы имеет вид (см. ур. (3.32))

$$\left( \begin{bmatrix} [K]^{Re} & -[K]^{Im} \\ [K]^{Im} & [K]^{Re} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M]^{Re} & -[M]^{Im} \\ [M]^{Im} & [M]^{Re} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} [\delta]^{Re} \\ [\delta]^{Im} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.1)$$

где  $[K]^{Re}$ ,  $[K]^{Im}$ ,  $[M]^{Re}$ ,  $[M]^{Im}$  - эквивалентные матрицы жесткости и масс системы. Структура этих матрицы детально описана в разделе 3.2.

При анализе влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес с использованием МУП предполагается, что степени свободы упорядочены так, чтобы получить блочно-диагональные формы при сборке матриц масс и жесткости всей конструкции. Они представлены как [70-73, 143]

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_d] & 0 \\ 0 & [M_b] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] \otimes [\tilde{M}_d] & 0 \\ 0 & [I] \otimes [\tilde{M}_b] \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_d] & 0 \\ 0 & [K_b] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] \otimes [\tilde{K}_d] & 0 \\ 0 & [I] \otimes [\tilde{K}_b] \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

где  $[I]$  - единичная матрица размера  $N$ ,  $N$  - число секторов;  $[\tilde{M}_d], [\tilde{K}_d]$  - матрицы масс и жесткости одного сектора диска;  $[\tilde{M}_b], [\tilde{K}_b]$  - матрицы масс и жесткости одной консольной лопатки; символ  $\otimes$  обозначает оператор Кронекера, определенный в приложении А.

Уравнение движения системы с учетом расстройки параметров лопаток имеет вид (см. уравнения (4.24) и (4.27))

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [I_d] + [\delta^d]^T [M_b] [\delta^d] & [\delta^d]^T [M_b] [\delta^b] \\ [\delta^b]^T [M_b] [\delta^d] & [I_b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{a}\} \\ \{\ddot{b}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}[2\xi^k] \otimes \sqrt{[\hat{K}_b]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\dot{a}\} \\ \{\dot{b}\} \end{bmatrix} + \\ & + (1 + \gamma i) \begin{bmatrix} [\hat{K}_d] & [\delta^d]^T [K_b] [\delta^b] \\ [\delta^b]^T [K_b] [\delta^d] & B \text{diag} \begin{bmatrix} \text{diag} (1 + \Delta f_n^k) \\ k=1, \dots, m_b \end{bmatrix} [\hat{K}_b] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\delta^d]^T \{F\} \\ [\delta^b]^T \{F\} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $B \text{diag}[\bullet]$  - блочно-диагональная матрица;  $\text{diag}[\bullet]$  - диагональная матрица;  $[I_d] = [\mathcal{G}^d]^T [M_d] [\mathcal{G}^d]$ ,  $[\hat{K}_d] = [\mathcal{G}^d]^T [K_d] [\mathcal{G}^d]$  - соответственно матрицы масс и жесткости диска;  $[I_b] = [\delta^b]^T [M_b] [\delta^b]$ ,  $[\hat{K}_b] = [\delta^b]^T [K_b] [\delta^b]$  - соответственно матрицы масс и жесткости  $N$  лопаток;  $\xi^k$ ,  $\gamma$  - коэффициент вязкого демпфирования и демпфирования структуры;  $i = \sqrt{-1}$ . Определение матриц  $[\mathcal{G}^d]$ ,  $[\delta^d]$ ,  $[\delta^b]$ ,  $[M_d]$ ,  $[K_d]$ ,  $[M_b]$ ,  $[K_b]$  подробно описано в разделе 4.2.

Для анализа влияния расстройки параметров на формы колебаний рабочих колес использована Евклидова норма для перемещений лопаток. Относительное перемещение лопаток по Евклидовой норме для собственных и вынужденных колебаний описаны в выражений (4.37) и (4.39).

Известно, что при использовании МКЭ число степеней свободы каждого узла, число узлов каждого элемента и алгоритм решения зависят от выбора типа конечного элемента. При использовании треугольных конечных элементов STI218 элементы отражаются на срединной поверхности конструкции. Для реальных рабочих колес срединная поверхность диска и лопатки обычно не лежат на одной плоской поверхности (рис. 5.1). Тогда перемещения одного узла диска  $\delta_d$  на поверхности соединения между диском и лопат-



кой и одного соответственного узла лопатки  $\delta_b$  могут быть соединены по гипотезе Кирхгофа-Лява как

$$\begin{cases} w_b = w_d , \\ u_b = u_d + z \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_d , \\ v_b = v_d + z \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_d , \\ \varphi_{ib} = \varphi_{id}; \quad i = X, Y, Z , \end{cases} \quad (5.5)$$

где  $w_b, w_d$  - изгибные перемещения лопатки и диска,  $u_b, v_b, u_d, v_d$  - мембранные перемещения лопатки и диска;  $\varphi_{ib} = \varphi_{id}, i = X, Y, Z$  - перемещения угла лопатки и диска.

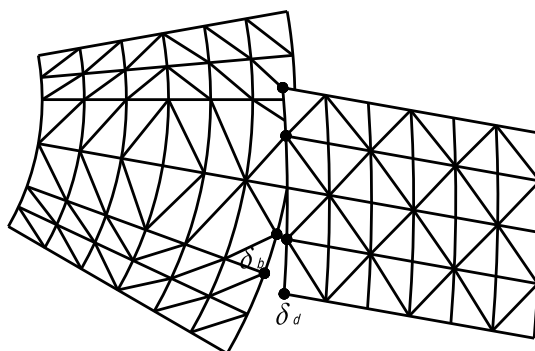


Рис. 5.1. Конечноэлементная модель одного сектора рабочего колеса

## 5. 2. Результаты исследования

В качестве объекта исследования рассмотрено реальное рабочее колесо турбины с 30-ю лопатками, жестко закрепленное по внутреннему радиусу. Механические и геометрические характеристики рабочего колеса: внутренний радиус диска - 0,0508 м, наружный радиус диска - 0,3168 м, угол установки лопаток на диск - 85,7°, угол закрутки лопаток - 43,8°, радиус периферии лопаток - 0,5455 м, модуль упругости - 2,16E+5 МПа, коэффициент Пуассона - 0,28, плотность - 7850 кг/м<sup>3</sup>. Величины коэффициентов демпфирования – 0,001. Конечноэлементная модель одного сектора на основе треугольных конечных элементов с 6-ю степенями свободы в узле (STI218) представлена на рис. 5.2

Расчет выполнен для двух случаев: собственные колебания и вынужденные колебания рабочего колеса без расстройки и с расстройкой. Для слу-

чая вынужденных колебаний лопатки рабочего колеса возбуждаются через 20 сопловых лопаток с двумя гармониками возбуждения, которые возникают с увеличением скорости вращения ротора от состояния ноль до скорости 100 1/с за определенное время.

Для проверки точности созданной программы PVROMBD, полученные результаты при расчете характеристик колебаний рабочих колес сравнены с результатами, которые получены с использованием программы «BLADIS+» [51]. Результаты расчета частот и форм собственных колебаний рабочего колеса без расстройки при использовании метода МУП, МЦС и программного пакета «BLADIS+» приведены в таблице 5.1.

Таблице 5.1

Значения частот собственных колебаний рабочего колеса без расстройки при использовании МЦС и программ PVROMBD и «BLADIS+» (Гц)

n	m=0			m=1			m=2		
	МЦС	PVROMBD	BLADIS	МЦС	PVROMBD	BLADIS	МЦС	PVROMBD	BLADIS
0	138,9	139	131	354,7	355	261,2	488,4	488	450,2
1	139,0	139,1	131,5	353,6	353,8	405,4	491,3	491,4	519,1
2	140,5	140,6	131,6	449,7	449,8	434,4	548,7	584,8	827
3	141,1	141,3	131,7	473,2	473,4	438,1	911,6	912,2	951
4	141,3	141,5	131,7	475,3	475,3	439,5	919,7	920,4	945,4
5	141,3	141,5	131,7	475,7	475,8	440,2	920,3	921	942,7
6	141,4	141,6	131,7	475,9	476	440,5	920,6	921,3	942,1
7	141,3	141,6	131,7	476,0	476,1	440,8	920,7	921,4	942,1
8	141,4	141,6	131,7	476,1	476,2	440,9	920,8	921,4	942,2
9	141,4	141,6	131,7	476,1	476,2	441,1	920,8	921,5	942,3
10	141,4	141,6	131,7	476,1	476,2	441,2	920,9	921,5	942,4
11	141,4	141,6	131,7	476,1	476,3	441,2	920,9	921,5	942,5
12	141,4	141,6	131,7	476,1	476,3	441,2	920,9	921,5	942,6
13	141,4	141,6	131,7	476,1	476,3	441,2	920,9	921,5	942,7
14	141,4	141,6	131,7	476,1	476,3	441,2	920,8	921,5	942,7
15	141,4	141,7	131,7	476,1	476,3	441,2	920,9	921,5	942,7

Частоты и форм собственных колебаний в зависимости от числа узловых диаметров «n» и окружностей «m» приведены на рис. 5.3 и 5.4.

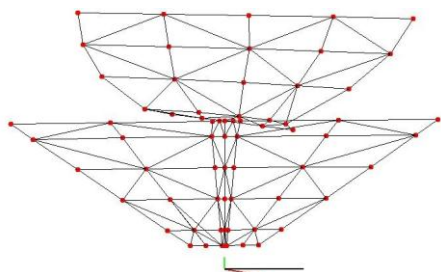


Рис. 5.2. Конечноэлементная модель одного сектора

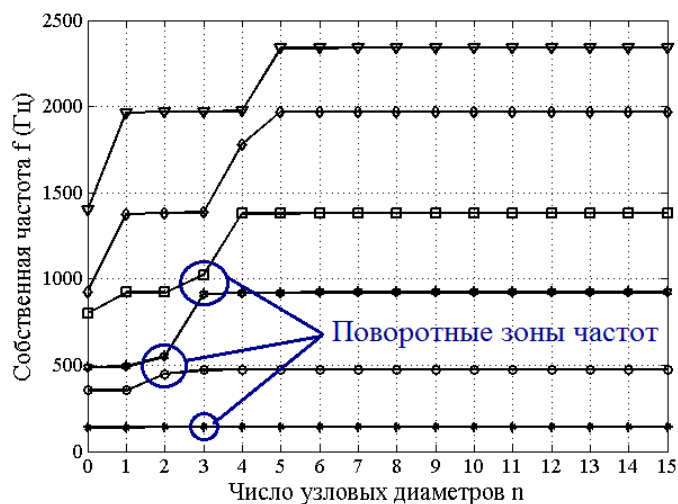
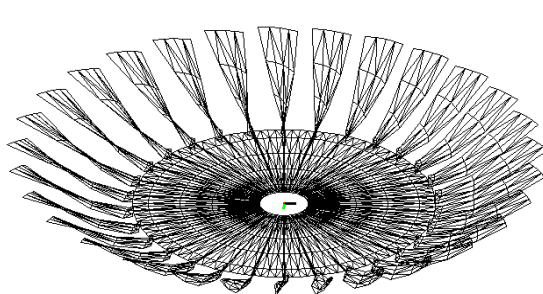
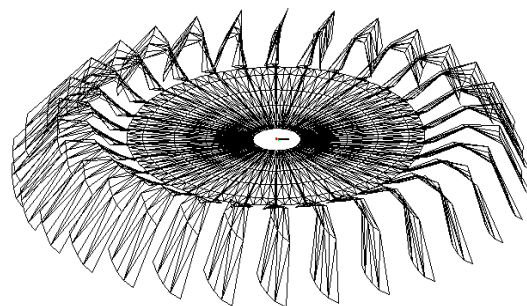


Рис. 5.3. График частот собственных колебаний для рабочего колеса без расстройки



а)



б)

Рис. 5.4. График форм собственных колебаний рабочего колеса (а- при  $n=0, m=0$ ; б- при  $n=0, m=1$ )

На практике изготовления и эксплуатации деталей турбомашин, параметры расстройки являются случайными величинами и причины расстройки параметров могут быть разные. В этом разделе рассмотрим влияние двух законов расстройки жесткости лопаток на характеристики колебаний рабочих колес с помощью метода моделирования уменьшенного порядка (МУП):

- расстройка жесткости одной лопатки из-за усталостной трещины лопатки при эксплуатации.
- расстройки жесткости всех лопаток, значения расстройки которых подчиняются закону нормального распределения Гаусса. Эта расстройка часто возникает при изготовлении лопаток.

Расстройка жесткости лопаток вносится путем изменения их модуля упругости. Тогда модуль упругости  $i$ -ой лопатки  $E_i$  определен как

$$E_i = (1 + \Delta f_i) E_0, \quad (5.6)$$

где  $E_0$ , – модуль упругости лопатки без расстройки,  $\Delta f_i$ - значение расстройки жесткости  $i$ -ой лопатки.

### 5.2.1. Расстройки жесткости одной лопатки

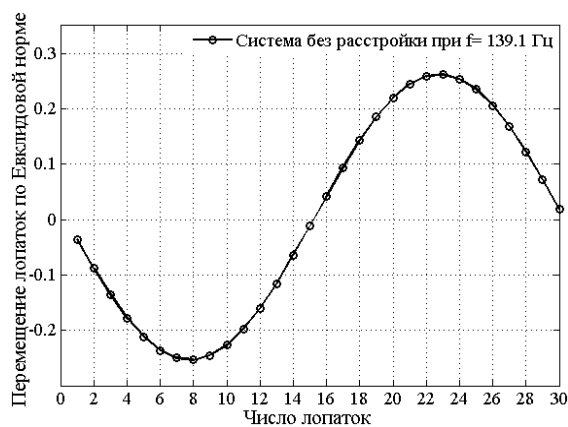
В данном разделе рассмотрено влияние расстройки жесткости одной лопатки  $\Delta f_i=10\%$  на характеристики колебаний рабочего колеса. Результаты исследования частот собственных колебаний рабочего колеса без расстройки (Без р-ки) и с расстройкой (С р-кой) приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2

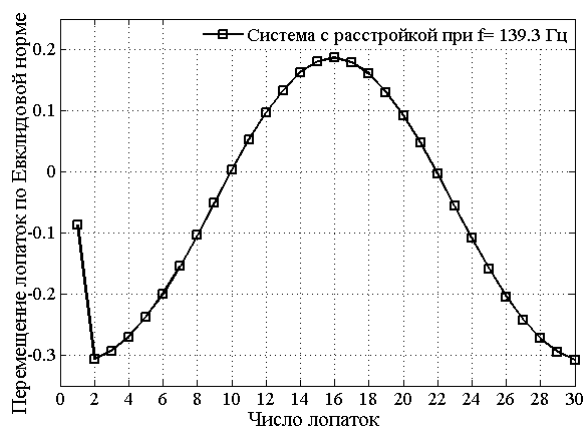
Частоты собственных колебаний рабочего колеса без расстройки и с расстройкой, полученные с помощью программы PVROMBD

Форма	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Без р-ки	139	139,1		140,7		141,3		141,5		141,5	
С р-кой	139	139,1	139,3	140,7	140,9	141,3	141,5	141,5	141,5	141,5	141,6
Форма	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Без р-ки	141,6		141,6		141,6		141,6		141,6		141,6
С р-кой	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6
Форма	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
Без р-ки	141,6	141,6		141,6		141,6		141,7	189		190,6
С р-кой	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,8	148	189	189,3	190,9
Форма	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Без р-ки	206		215,6		217,8		218,6		218,9		219,1
С р-кой	206	206,5	215,6	215,9	217,8	218	218,6	218,8	218,9	219	219,1

Результаты исследования форм собственных колебаний рабочего колеса без расстройки и с расстройкой параметров по Евклидовым нормам перемещений лопаток приведены на рис. 5.5. Расчет выполнен в поворотной зоне частот (рис. 5.3), соответствующей форме колебаний 3.



а) форма 3



б) форма 3

Рис. 5.5. График перемещения лопаток по Евклидовой норме (а- для рабочего колеса без расстройки; б- для рабочего колеса с расстройкой)

Результаты характеристик вынужденных колебаний рабочего колеса без расстройки и с расстройкой параметров по Евклидовым нормам перемещений лопаток, соответствующим порядку возмущения двигателя  $C = 3$ , отражены на рис. 5.6.

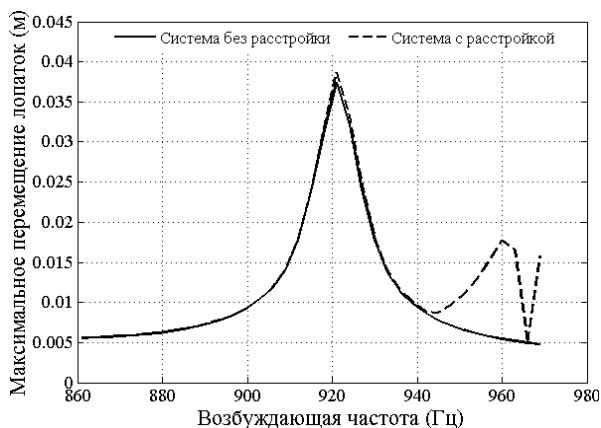


Рис. 5.6. График максимальных значений амплитуды перемещений лопаток для вынужденных колебаний рабочего колеса по Евклидовой норме

Из таблицы 5.2 и рис. 5.5, 5.6 видно, что в спектре собственных частот рабочего колеса без расстройки содержатся двукратные частоты, которые при введении малой расстройки одной лопатки в расчет расщепляются: первая частота колебаний расстроенной системы равна частоте настроенной системы и вторая частота выше, чем частота настроенной системы, также формы колебаний расстроенной системы ближе к формам колебаний настроенной системы. В вынужденных колебаниях расстроенной системы возникает несколько критических значений амплитуды и максимальные значения ам-

плитуды лопаток по Евклидовой норме выше, чем максимальные значения амплитуды лопаток настроенной системы.

### 5.2.2. Расстройки жесткости всех лопаток, значения расстройки которых подчиняются закону нормального распределения Гаусса

Значения расстройки - случайные величины, которые подчиняются закону нормального распределения Гаусса. Функция плотности вероятности определена как

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.8)$$

где  $\mu$  - математическое ожидание,  $\sigma$  - стандартное отклонение.

В этом разделе рассмотрено влияние расстройки модуля упругости всех лопаток по закону нормального распределения Гаусса. Параметры функции плотности вероятности: средний (номинальный) модуль упругости отдельной лопатки (математическое ожидание  $\mu$ )  $E_{ном} = 197 \text{ ГПа}$ . Максимальное отклонение частоты от номинальной (стандартное отклонение  $\sigma$ )  $\Delta E = \pm 15,8 \text{ ГПа}$  (7,9% от номинального модуля упругости).

Функция плотности вероятности Гаусса и значения модуля лопаток приведены на рис. 5.7 и 5.8.

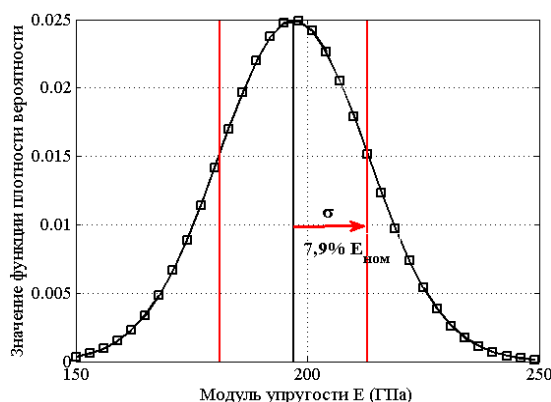


Рис. 5.7. Функция плотности вероятности Гаусса

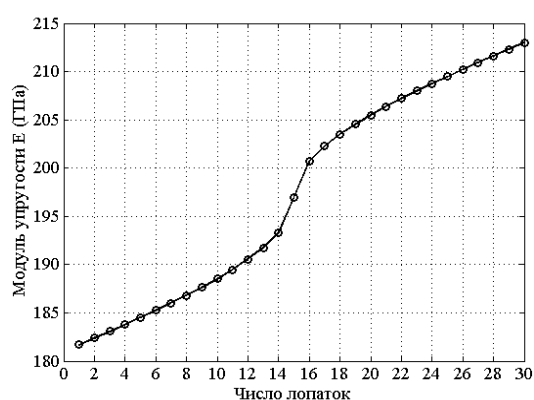


Рис. 5.8. Значения модуля упругости лопаток

Параметры расстройки системы получены от значений модуля упругости лопаток (рис. 5.8) с помощью выражения (5.7) и приведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3

### Параметры расстройки

Лопатка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\Delta f_i$ (%)	-9,1	-8,8	-8,5	-8,1	-7,7	-7,4	-7,0	-6,6	-6,2	-5,7	-5,3	-4,7	-4,1	-3,3	-1,5
Лопатка	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\Delta f_i$ (%)	0,3	1,1	1,7	2,3	2,7	3,2	3,6	4,0	4,4	4,7	5,1	5,5	5,8	6,2	6,5

Для анализа влияния размещения расстройки лопаток на диске в этом разделе рассмотрено влияние двух закономерностей размещения расстройки на характеристики колебаний рабочих колес: 1) параметры расстройки составлены по последовательной закономерности (ПЗ) как в таблице 5.4; 2) параметры расстройки составлены по зигзагообразной закономерности (ЗЗ). Эти два закона размещения расстройки представлены на рис. 5.9 и 5.10.

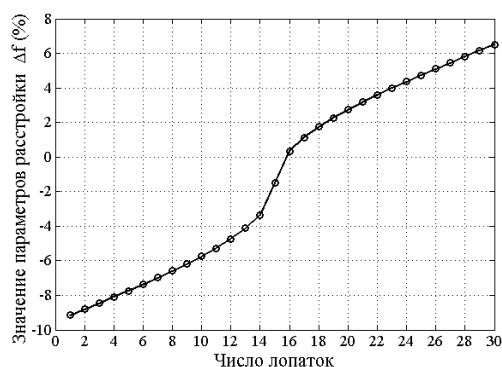


Рис. 5.9. График параметров расстройки по ПЗ

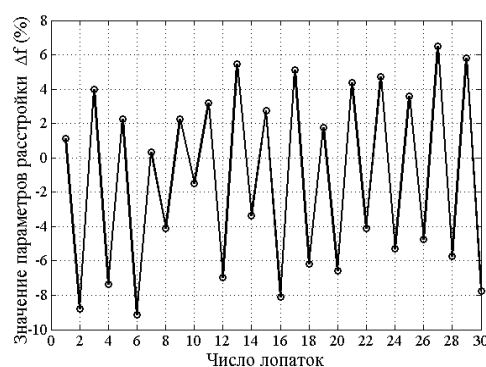


Рис. 5.10. График параметров расстройки по ЗЗ

Результаты расчета частот собственных колебаний рабочего колеса без расстройки (Без р-ки) и с расстройкой параметров (С р-кой) приведены в таблице 5.4 и рис. 5.11.

Таблица 5.4

Значения частот собственных колебаний рабочего колеса с расстройкой по ПЗ и ЗЗ, полученных с помощью программы PVROMBD

Форма	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Без р-ки	139	139,1	140,7	141,3	141,5	141,5						
С р-кой	ПЗ	134,3	134,5	135,2	135,4	135,9	136,2	136,3	136,3	136,7	137	137,6
	ЗЗ	134,4	134,9	135,3	135,7	136	136,3	136,3	137	137,1	137,5	138,1
Форма	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
Без р-ки	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	
С р-кой	ПЗ	138	139,1	139,1	139,9	141	142	142,7	143,3	143,3	143,9	143,9
	ЗЗ	138,3	138,5	139	140,2	141,5	142	142,4	142,8	143	143,2	143,5

Форма		23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
Без р-ки		141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,6	141,7	189	189	190,6
С р-кой	ПЗ	144,2	144,8	144,8	144,8	145,3	145,7	146	164,4	164,4	187,4	191,9
	ЗЗ	143,6	144,1	144,3	144,7	144,9	145,2	145,2	145,9	187,1	188,1	189,2
Форма		34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Без р-ки		206	206	215,6	215,6	217,8	217,8	218,6	218,6	218,9	218,9	219,1
С р-кой	ПЗ	203,8	204,7	209,2	209,2	209,9	210,2	210,8	211,5	212,4	212,4	213,8
	ЗЗ	203	203,3	208,9	209,9	210,1	211,3	211,5	211,9	213,3	213,4	213,7

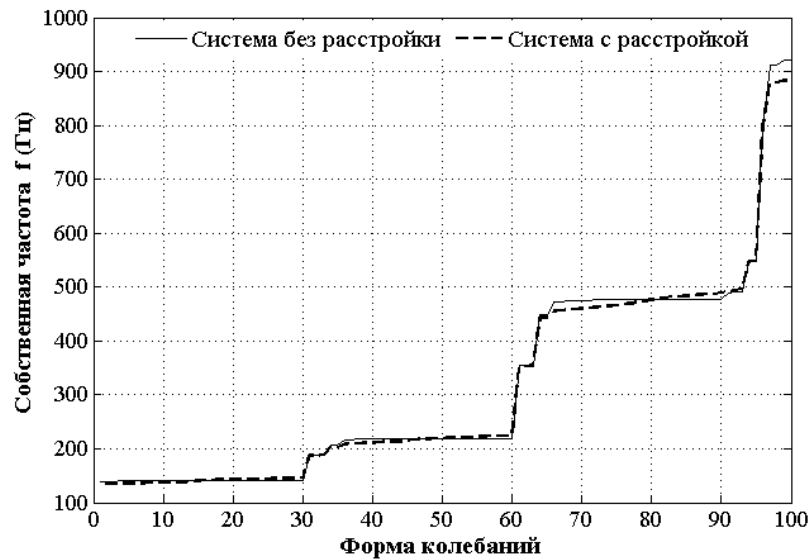
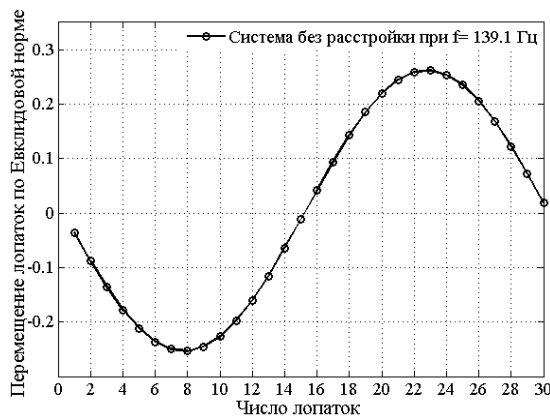
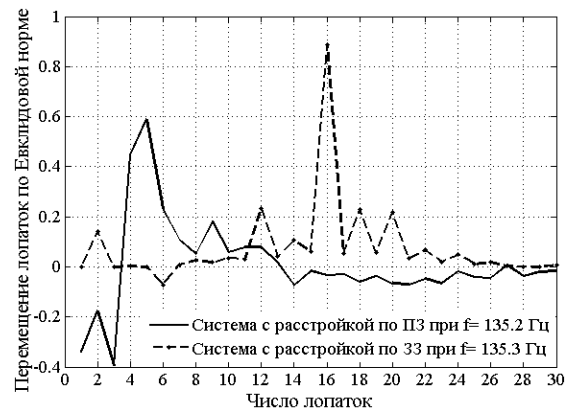


Рис. 5.11. График собственных частот рабочего колеса с расстройкой параметров по ЗЗ

Результаты исследования форм собственных колебаний рабочего колеса без расстройки и с расстройкой параметров по Евклидовой норме перемещений лопаток приведены на рис. 5.12. Расчет проводится в поворотных зонах частот (рис. 5.3), соответствующих формам колебаний 3, 6 и 64.

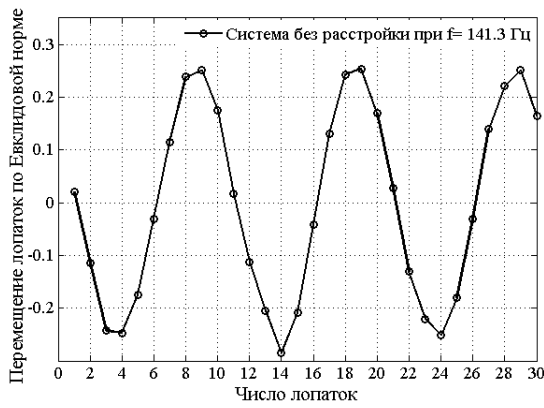


а) форма 3

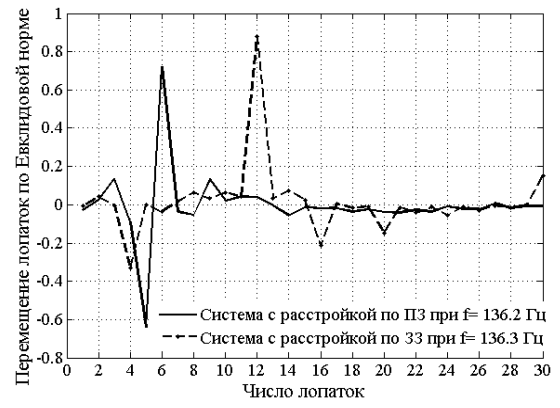


б) форма 3

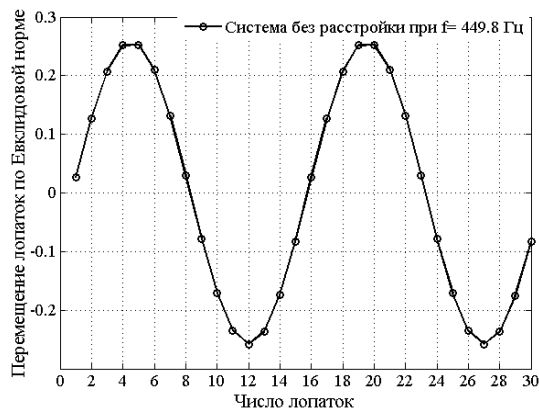




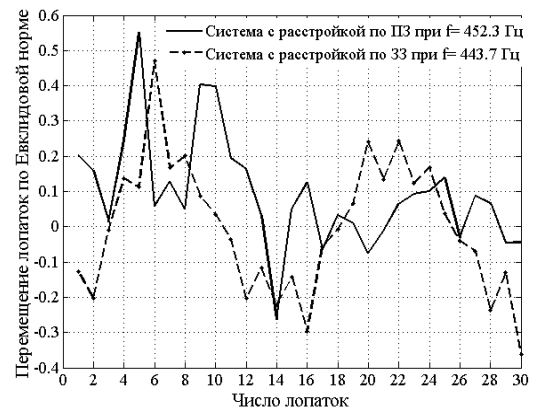
в) форма б



д) форма б



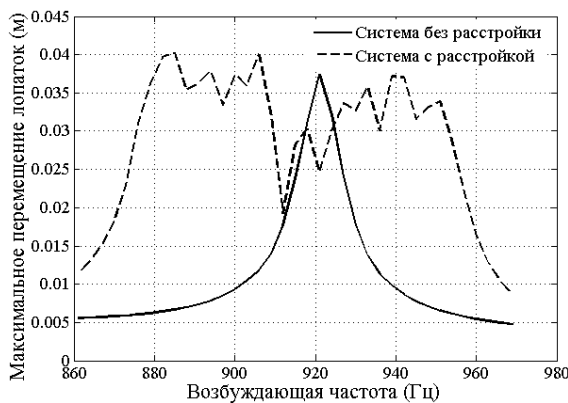
е) форма 64



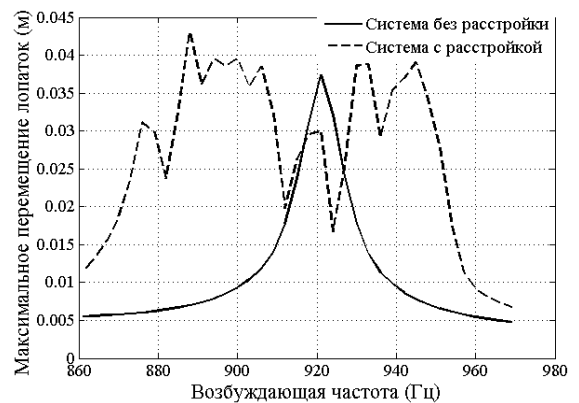
г) форма 64

Рис. 5.12. Графики перемещения лопаток по Евклидовой норме (а, в, е- для рабочего колеса без расстройки; б, д, г- для рабочего колеса с расстройкой параметров по ПЗ и ЗЗ)

Результаты исследования характеристик вынужденных колебаний рабочего колеса без расстройки и с расстройкой параметров по Евклидовой норме перемещений лопаток при порядке возмущения двигателя  $S=3$  приведены на рис. 5.13.



а) параметры расстройки по ПЗ



б) параметры расстройки по ЗЗ

Рис. 5.13. График максимальных значений амплитуды перемещений лопаток для вынужденных колебаний расстроенной системы по Евклидовой норме

Из таблицы 5.4 и рис. 5.12 и 5.13 видно влияние малой расстройки по закону нормального распределения Гаусса на характеристики колебаний рабочего колеса для двух случаев размещения лопаток (ПЗ и ЗЗ). Установлено, что при введении расстройки в расчет двукратные частоты колебаний системы заметно расщеплены, расстройка нарушает гармоническое свойство перемещения лопаток по Евклидовой норме, но частоты и формы собственных колебаний рабочего колеса при размещении параметров расстройки по ПЗ и по ЗЗ отличаются незначительно. В вынужденных колебаниях расстроенной системы возникает много критических значений амплитуды перемещения лопаток и значения максимальной амплитуды перемещений системы с расстройкой по ЗЗ больше (на 9%), чем значения максимальной амплитуды перемещений системы с расстройкой по ПЗ.

### **5.3. Выводы**

В этом разделе приведена схема исследования характеристик колебаний для реальных рабочих колес турбомашин без расстройки и с расстройкой на основе метода конечных элементов с использованием треугольных конечных элементов STI218. Этот элемент широко и эффективно применяется для расчета динамики реальных рабочих колес со сложной геометрией, полых лопаток с бандажными и антивибрационными полками. При этом снижается трудоемкость подготовки исходной информации.

Даны различные законы распределения расстройки лопаток, которые часто используются в анализе влияния расстройки параметров на колебания и долговечность рабочих колес турбомашин. Также приведены важные результаты влияния этих законов расстройки на характеристики колебаний рабочих колес. Из результатов видно, что расстройка жесткости одной лопатки мало влияет на характеристики колебаний рабочих колес, наибольшее влияние расстройки на характеристики колебаний наблюдается для варианта, когда параметры расстройки подчиняются закону нормального распределения Гаусса и составлены по зигзагообразному закону.

При исследовании влияния различных законов распределения расстройки на характеристики собственных колебаний рабочего колеса установ-

лено, что при введении расстройки в расчет двукратные частоты колебаний системы заметно расщепляются, расстройка нарушает гармоническое свойство перемещения лопаток по Евклидовой норме. В поворотных зонах частот (см. рис. 3.6) амплитуды собственных колебаний рабочих колес даже с маленькой расстройкой жесткости сильно изменяются. В вынужденных колебаниях расстроенной системы возникает много критических значений амплитуды перемещений лопаток и максимальные значения амплитуды перемещений лопаток рабочих колес с расстройкой выше, чем максимальные значения амплитуды перемещений лопаток рабочих колес без расстройки (на 19,5%), что существенно снижает их долговечность. Эти результаты позволяют решать задачи чувствительности колебаний, оптимизацию и повышения прочности рабочих колес с расстройкой при проектировании новых и эксплуатации старых конструкций турбомашин. Следующим этапом работы станет исследование влияния расстройки на долговечность рабочих колес турбомашин.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В промышленном изготовлении роторов турбомашин всегда существуют лопатки с расстройкой (маленькие неизбежные изменения свойств лопаток). Также возникают эффекты расстройки в динамике роторов при их эксплуатации. Потенциальную локализацию для энергии колебаний и резкие увеличения амплитуд и динамических напряжений из-за расстройки необходимо рассматривать для оптимизации проектирования роторов. Эффект расстройки рабочих колес при изучении их динамических характеристик включает в себя следующее:

- расстройка нарушает свойство циклической симметрии конструкции. Тогда моделирование только одного сектора является недостаточным и нужно моделировать полное рабочее колесо;
- значения расстройки рабочих колес являются случайными величинами, поэтому оценка усталостной прочности рабочих колес часто выполнена на основе их надежных статистических данных и динамических характеристик.

На практике результаты исследования показали, что использование моделей конечных элементов для исследования динамики и прочности рабочих колес дает высокую точность и позволяет учитывать сложную модель. В промышленности существует несколько программных комплексов (например, ANSYS, NASTRAN и др.), которые позволяют рассчитывать динамические характеристики деталей на основе МКЭ, но их полная конечноэлементная модель часто состоит из многих степеней свободы (миллионов степеней свободы). Таким образом, использование метода МУП на основе МКЭ, рассмотренное в диссертации, необходимо, чтобы увеличивать точность при расчете и снизить затраты времени на ЭВМ при прогнозировании влияния расстройки параметров на колебания и долговечность рабочих колес турбомашин. В диссертации рассмотрены следующие вопросы:

- Построение основных алгоритмов при реализации МКЭ и типов конечных элементов для расчета прочности пластинчато-оболочечных деталей турбомашин. Математическое моделирование консольной лопатки с расстройкой,

которая легко вносится в расчет при анализе динамики рабочих колес с расстройкой и определение значений расстройки лопаток рабочих колёс турбомашин МКЭ. Систематизация видов расстройки и анализ различных законов расстройки параметров, которые часто возникают при изготовлении и эксплуатации рабочих колёс турбомашин. Построение модели возбуждающих газодинамических сил, приближённых к реальным режимам работы двигателей турбомашин для увеличения точности при анализе динамики деталей турбомашин;

- Приведение отношений механических величин (например, перемещение, сила и т.д.) в физических координатах для полной системы и в циклических координатах для одного базового сектора (свойство циклической симметрии). Разработка эффективных и экономичных методик для исследования собственных колебаний циклически симметричных систем без учета и с учетом влияния вращения, таких как рабочие колеса турбомашин без расстройки, с использованием свойства циклической симметрии. Разработка и реализация программы для оценки влияния вращения на характеристики собственных колебаний рабочих колес турбомашин МКЭ;

- Исследование эффективных и экономичных методик и подходов к анализу влияния расстройки параметров на характеристики колебаний и долговечность рабочих колес турбомашин с учетом режимов работы. Создание программного комплекса для оценки влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин на основе МКЭ и МУП. Развитие метода для анализа влияния расстройки геометрии лопаток на характеристики собственных колебаний рабочих колес с использованием свойства циклической симметрии.

- Проведение расчета влияния различных вариантов расстройки и различных закономерностей распределения расстройки лопаток на диске на характеристики колебаний реальных рабочих колес турбомашин в опасных частотных зонах.

Кроме этого, результаты диссертации дают дополнительную информацию: при увеличении скорости вращения ротора все собственные частоты колебаний рабочего колеса увеличивается. Изменение жесткости конструкции рабочих колес турбомашин, обусловленное центробежными силами, оказывает значительное влияние на их динамические характеристики и прочность. Дополнительно расстройка параметров лопаток значительно влияет на характеристики колебаний и долговечность рабочих колес турбомашин. Двукратные частоты рабочих колес без расстройки расслаиваются при введении малой расстройки. Выявлены поворотные зоны частот на графике частот собственных колебаний рабочих колес в зависимости от числа узловых диаметров и окружностей. В этих зонах собственные колебания рабочих колес даже с небольшой расстройкой ограничивается до маленькой зоны (только несколько лопаток колеблется). Для вынужденных колебаний возникает большое количество критических значений амплитуды перемещений лопаток и максимальные значения амплитуд перемещений лопаток расстроенной системы часто выше, чем настроенной системы (до 22%), что существенно снижает их долговечность. Использование результатов и комплексов программ, полученных в диссертации, позволяет повысить эффективность и надёжность проектирования рабочих колес турбомашин, обеспечить необходимую точность расчёта и провести вычислительные эксперименты для анализа влияния расстройки параметров на долговечность циклически симметричных систем, таких как рабочих колес турбомашин в соответствии с их условиями работы ещё на стадии проектирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И. М. Теория колебаний/ И. М. Бабаков. - Москва: Издательство «Наука», 2004. – 593 с.
2. Басов К. А. ANSYS в примерах и задачах/ К. А. Басов. – М.: Компьютер-Пресс, 2002. - 224 с.
3. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов/ К. Бате, Е. Вилсон. – Москва: Стройиздат, 1982. - 447 с.
4. Бауман Н. Я. Производства паровых и газовых турбин/ Н. Я. Бауман, М. И. Яковлев, И. Н. Свечков. - Москва «Машиностроение», 1973. - 464 с.
5. Бидерман В.Л. Теория механических колебания/ В.Л. Бидерман. -М.: Высш. школа, 1980. - 408с.
6. Биргер И. А. Колебания пластин и оболочек. Прочность и динамика авиационных двигателей/ И. А. Биргер. – М.: Машиностроение, 1969. – 327 с.
7. Богомоллов С. И. О применении суперпараметрического оболочечного конечного элемента к расчёту колебаний лопаток турбомашин/ С. И. Богомоллов, С. С. Луценко, С. А. Назаренко// Проблемы прочности. – 1982. – № 6. – С. 71 – 74.
8. Борискин О. Ф. Автоматизированные системы расчета колебаний методом конечных элементов/ О.Ф. Борискин. - Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1984. -188 с.
9. Борискин О. Ф. Конечноэлементный анализ колебаний машин/ О. Ф. Борискин, В. В. Кулибаба, О. В. Репецкий. - Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 1989. - 144 с.
10. Борискин О. Ф. Суперэлементный расчет циклически симметричных систем/ О. Ф. Борискин. - Калуга: Эйдос, 1999. - 230с.
11. Буй Мань Кьонг. Разработка численных методов и программного обеспечения для прогнозирования усталостной прочности деталей турбомашин. - Дис. канд. техн. наук. - Иркутск. - 2011. - 220 с.
12. Вибрационные процессы и машины - том 4/ Г. Г. Азбель [и др.]. - Москва «Машиностроение», 1981. - 510 с.

13. Галеркин Ю. Б. Технология компрессоростроения: теория, расчет и конструирования компрессорных машин динамического действия/ Ю. Б. Галеркин, К. В. Солдатова. Санкт-Петербург «Издательство Политехнического университета», 2008. - 120 с.
14. Гецов Л. Б. Детали газовых турбин/ Л. Б. Гецов. – Л.: Машиностроение, 1982. - 285 с.
15. До Мань Тунг. Исследование влияния законов расстройки параметров на собственные колебания рабочих колес для повышения ресурса газотурбинных двигателей/ До Мань Тунг, О. В. Репецкий// Материалы конференции «Современные проблемы и перспективы развития АПК». - февраля 2014. – С. 96-101.
16. До Мань Тунг. Применение метода моделирования уменьшенного порядка для анализа колебаний рабочих колес турбомашин с расстройкой параметров на основе метода конечных элементов/ До Мань Тунг, О.В. Репецкий// Сборник докладов VII Всероссийской научно-практической конференция «Научная инициатива иностранных студентов и аспирантов российских вузов». – 2014. – С. 173-181.
17. Еременко С. Ю. Методы конечных элементов в динамике деформируемых тел/ С. Ю. Еременко. - Харьков: Изд-ство «Основа», 1991. - 271 с.
18. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике/ Зенкевич О. -М.: Мир, 1975. 541с.
19. Иванов В.П. Колебания рабочих колес турбомашин/ В.П. Иванов. - М.: Машиностроение, 1983. - 224 с.
20. Иванов В.П. Некоторые вопросы колебаний лопаточных венцов и других тел, обладающих циклической симметрией.
21. Ильина В. А. Численные методы для физиков-теоретиков/ В. А. Ильина, П. К. Силаев. - Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. - 132 с.
22. Измерения и испытание - том 5/ В. В. Алесенко [и др.]. - Москва «Машиностроение», 1981. – 496 с.



23. Каплун А.Б. ANSYS в руках инженера: практ. руководство/ А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева. – М.: Едиториал УРСС, 2003. -272 с.
24. Квитка А. Л. К расчёту лопаток ГТД методом конечных элементов/ А. Л. Квитка, П. П. Ворошко, Л. А. Заслоцкая// Проблемы прочности. – 1976. – №6. – С. 60 – 64.
25. Киреев В. И. Численные методы в примерах и задачах/ В. И. Киреев, Ф. В. Пантелеев. - Москва «Высшая школа», 2008. – 477 с.
26. Когаев В. П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность/ В. П. Когаев, Н. А. Махутов, А. П. Гусенков. – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.
27. Колебания линейных систем - том 1/ И. И. Артоболевский [и др.]. - Москва «Машиностроение», 1978. – 352 с.
28. Колебания нелинейных механических систем - том 2/ И. И. Блехман [и др.]. - Москва «Машиностроение», 1979. – 351 с.
29. Колебания машин, конструкций и их элементов - том 3/ Э. Л. Айрапетров [и др.]. - Москва «Машиностроение», 1980. – 544 с.
30. Колкунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек/ Н. В. Колкунов. - Москва: Издательство высшая школа, 1972. - 297 с.
31. Костюк А. Г. Динамика и прочность турбомашин/ А. Г. Костюк. - Москва: Издательский дом МЭИ, 2007. – 472 с.
32. Костюк А. Г. Колебания в турбомашинах/ А. Г. Костюк. – Москва: Издательский дом МЭИ, 1961. – 201 с.
33. Кузнецов Ю.А. Численные методы и математическое моделирование/ Ю. А. Кузнецов. Академия наук ССР: Сбор, 1986. – 174 с.
34. Лозицкий Л. П. Конструкция и прочность авиационных двигателей/ Л. П. Лозицкий [и др.]. Москва «Воздушный транспорт», 1992. – 535 с.
35. Мироновский С. Н. Эффект расстройки лопаток рабочих колес турбомашин/ С. Н. Мироновский, О. В. Репецкий, И. Н. Рыжиков// Вестник стипендиатов ДААД. - 2002, - № 2. - С. 75-82.
36. Мышенков В. И. Численные методы/ В. И. Мышенков, Е. В. Мышенков. - М.: МГУЛ, 2001. – 120 с.

37. Мяченков В. И. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. Справочник/ В. И. Мяченков, В. П. Мальцев, и др. – Москва «Машиностроение», 1989. – 520 с.
38. Насонов Д.А. Моделирование собственных колебаний циклически симметричных систем на базе конечных элементов со смешанной аппроксимацией перемещений полиномами высших порядков. - Дис. канд. техн. наук. - Калуга. - 2001. - 198 с.
39. Образцов И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов/ И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – М.: Высш. шк, 1985. – 392 с.
40. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений/ Б. Парлетт. – Москва «Мир», 1983. - 382 с.
41. Репецкий О. В. Автоматизация прочностных расчетов турбомашин/ под ред. О. В. Репецкого. - Иркутск: Изд - во Иркут. союза НИО, 1990. - 100 с.
42. Репецкий О. В. Анализ собственных колебаний круглых пластин с использованием кольцевых элементов/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Известия ИГЭА. Электронный журнал. - 2012. - №3. <http://eizvestia.isea.ru>.
43. Репецкий О. В. Анализ влияния расстройки параметров на колебания рабочих колес турбомашин на основе пружино-массовой модели/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Вестник ИрГТУ. - 2013. - №10. - С. 56 - 62.
44. Репецкий О. В. Анализ собственных колебаний кольцевых пластин при различных условиях закрепления и геометрии контура с использованием кольцевых элементов/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Вестник стипендиатов ДААД. – 2012. – №1 (9). - С. 34 - 38.
45. Репецкий О. В. Исследования влияния различных видов расстройки параметров на колебания и долговечность рабочих колес турбомашин/ О. В. Репецкий, И. Н. Рыжиков, Р. Шчмидт// Вестник стипендиатов ДААД. - 2010, - № 10. - С. 20-31.
46. Репецкий О. В. Исследование влияния геометрической нелинейности на собственные колебания систем «диск-лопатки» турбомашин с использо-

- ванием свойств циклической симметрии/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Научный журнал «Современные технологии. Системный анализ. Моделирование». - Иркутск: ИрГУПС. - 2013. - №3(39). - С. 51 - 55.
47. Репецкий О. В. Исследование влияния расстройки на собственные колебания рабочих колес турбомашин с использованием свойств циклической симметрии/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Вестник стипендиатов ДААД. – 2013. – №1 (10). - С. 12 - 17.
48. Репецкий О. В. Исследование свободных колебаний лопаточных венцов с расстройкой геометрических и массовых параметров/ О. В. Репецкий, И. Н. Рыжиков, А. В. Латин, Н. М. Лутаенко// Современные технологии, системный анализ, Моделирование. - 2009, - № 1(21). - С. 41-44.
49. Репецкий О.В. Исследование свободных колебаний лопаточных венцов с расстройкой геометрических и массовых параметров/ О. В. Репецкий, К. Попп// Вестник стипендиатов DAAD - Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2002. - № 2. - С. 39-45.
50. Репецкий О. В. Исследование характеристик колебаний рабочих колес турбомашин с расстройкой параметров на основе моделирования уменьшенного порядка методом конечных элементов/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Вестник СибГАУ. - 2014. - №1 (53). - С. 60 - 66.
51. Репецкий О. В. Компьютерный анализ динамики и прочности турбомашин/ О. В. Репецкий. - Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 1999. - 301 с.
52. Репецкий О. В. Математическое моделирование и численный анализ колебаний идеальных циклически-симметричных систем методом конечных элементов/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Известия ИГЭА. - 2012. - №3(83). - С.149 - 153.
53. Репецкий О. В. Численный анализ влияния расстройки параметров на вынужденные колебания системы диск-лопатки турбомашин на основе модели уменьшенного порядка/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Вестник ВСГТУ. Улан-Удэ: ВСГТУ. - 2013. - №5. - С. 32 - 39.

54. Репецкий О. В. Численный анализ влияния расстройки на собственные колебания циклически-симметричных систем на основе теории возмущений/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Вестник ИрГСХА. – 2013. – №2 (55). – С.120 – 125.
55. Репецкий О. В. Численный анализ свободных колебаний системы «диск-лопатка» турбомашин с расстройкой на основе модели уменьшенного порядка методом конечных элементов/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Научный журнал «Современные технологии. Системный анализ. Моделирование». - Иркутск: ИрГУПС. - 2013. – №3(39). - С. 106 - 112.
56. Репецкий О. В. Численный анализ собственных колебаний упругих деталей турбомашин методом конечных элементов/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Материалы международной научно-практической конференции молодых ученых «Научные исследования и разработки к внедрению в АПК». – 2013. – С. 96-101.
57. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин/ Р. Б. Рикардс. – Рига: Зинатне, 1988. - 284 с.
58. Рыжиков И. Н. Экспериментальное и численное исследование влияния расстройки параметров на колебания рабочих колес турбомашин/ И. Н. Рыжиков, В. И. Рыжиков, О. В. Репецкий// Вестник стипендиатов ДААД. - 2011, - №1(8). - С. 56-61.
59. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. № 2014617790. Программа для исследования собственных колебаний рабочих колес турбомашин с учетом вращения/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг, Буй Хай Данг// Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. - 2014.
60. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. № 2014617789. Программа для анализа влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин/ О. В. Репецкий, До Мань Тунг// Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. – 2014.

61. Хайманн Б. Мехатроника/ Б. Хайманн, В. Герт, К. Попп, О.В. Репецкий. - Новосибирск: Изд-во сибирского отделения Р-ой академии, 2010. -601 с.
62. Чижевский К.Г. Расчет круглых и кольцевых пластин. Справочное пособие/ К. Г. Чижевский. - Л.: «Машиностроение», 1977. - 184 с.
63. Шляхин П. Н. Паровые и газовые турбины/ П. Н. Шляхин. - М.: Энергия, 1974. – 222 с.
64. Afolabi D.H. Vibration of mistuning bladed disc assemblies. Ph.D. Thesis, University of London, 1982. 267 p.
65. Alejandro J. Maximum amplification of blade response due to Mistuning: Localization and Mode shape aspects of the worst disks/ J. Alejandro, R. Guerra, M. P. Mignolet// Journal of Turbomachinery. - 2003. -Vol. 125. -P. 442-454.
66. Bah M. T. Forced response statistics of mistuned bladed disks: a stochastic reduced basis approach/ M. T. Bah, P. B. Nair, A. Bhaskar, A. J. Keane// Journal of sound and Vibration. -2003. – Vol. 263. -P. 377-397.
67. Baik S. Assessment of blade mistuning effects via Power flow analysis of tuned bladed disks/ A. Baik, M. P. Castanier, C. Pierre. - 46th AIAA/ ASCE/ AHS/ ASC Structures, Structural dynamics & materials conference, Austin, Texas, 2005. - 20 p.
68. Bayoumy L. E. Influence of Mistuning on Rotor-Blade Vibrations/ L. E. Bayoumy, A. V. Srinivasan// Journal AIAA. - 1975. - Vol 13. - № 3. - P. 460-464.
69. Bendiksen O.O. Flutter of Mistuned Turbomachinery rotors/ O. O. Bendiksen // Trans. ASME, journal of vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. - April 1986. – Vol 108. – P. 132-139.
70. Bladh J. R. Component-Mode-Based Reduced order modeling techniques for Mistuned bladed Disks - Part I: Theoretical Models/ J. R. Bladh, M. P. Castanier, C. Pierre// Journal of Engineering for Gas turbines and Power. - January 2001. - Vol. 123. - № 8. - P. 89-99.
71. Bladh J. R. Component-Mode-Based Reduced order modeling techniques for Mistuned bladed Disks - Part II: Application/ J. R. Bladh, M. P. Castanier, C. Pierre// Journal of Engineering for Gas turbines and Power. - January 2001. - Vol. 123. - № 8. - P. 100-108.

72. Bladh J. R. Efficient predictions of the vibratory response of mistuned bladed disks by reduced order modeling. Dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, the University of Michigan. - 2001. – 262 p.
73. Bladh J. R. Reduced order modeling and vibration analysis of mistuned bladed disk assemblies with shrouds/ J. R. Bladh, M. P. Castanier, C. Pierre// Journal of Engineering for Gas turbines and Power. - July 1999. - Vol. 121. - № 7. - P. 515-522.
74. Boulton L. A. Reduced order model formulation for the study of the free and forced response of a mistuned impeller with two blade geometries/ L. A. Boulton, E. Casanova// Mecanica computacional. - 2011. - Vol. XXX. - P. 3107-3124.
75. Brown J. M. Reduced Order Modeling methods for Turbomachinery design. - A dissertation submitted in the partial fulfillment of the requirements for degree of Doctor of Philosophy, Wright State University, 2008. - 240 p.
76. Bruno Varin. Reduced Order modeling of bladed disks featuring large mistuning. Structural Dynamics and Vibration Laboratory, McGill University. - 2007. - 63 p.
77. Capiez-Lernout E. Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of Mistuned Bladed disks/ E. Capiez-Lernout, C. Soize// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 2004. - Vol 126.- P. 610-618.
78. Castanier M. P. Next-Generation modeling, analysis, and testing of the vibration of mistuned bladed disks/ M. P. Castanier, S. L. Ceccio, B. I. Epureanu, C. Pierre. Department of Mechanical engineering The University of Michigan. – 2007. - 26 p.
79. Castanier M. P. Modeling and analysis of Mistuned bladed disk vibration: Status and Emerging direction/ M. P. Castanier, C. Pierre// Journal of Propulsion and power. - 2006. - Vol 22. - № 2. - P. 384-396.
80. Cha D. Effects of the nature of Excitation on the response of a Mistuned bladed disk assembly/ D. Cha, A. Sinha// Journal of Turbomachinery. - 2002. -Vol 124. -P. 588-596.

81. Cha D. Statistics of Response of a Mistuned bladed disk assembly subjected to white noise and narrow band excitation/ D. Cha, A. Sinha// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 1999. -Vol 121. -№4. -P. 710-717.
82. Chan Y. J. Variability of blade vibration in mistuned bladed discs. – A Dissertation submitted to University of London for the degree of Doctor of Philosophy. - 2000. – 194 p.
83. Chen J. C. Matrix Perturbation for Structural dynamic analysis/ J. C. Chen, B. K. Wada// Journal AIAA. - 1977. - Vol. 15. - № 8. - P 1095 - 1100.
84. Choi Y. S. Analysis of Structural Mistuning effects on bladed disc vibrations including aerodynamic damping/ Y. S. Choi, D. A. Gottfried, S. Fleeter// International compressor engineering Conference at Purdue, July 12-15, 2004. - 8 p.
85. Courant R. Methods of Mathematical Physics/ R. Courant, D. Hilbert. - New York: Interscience Publishers. - 1989. - Vol I. - 560 p.
86. Craig R. R. Coupling of substructures for dynamic analyses/ R. R. Craig, C. C. Mervyn, Bampton// American Institute of Aeronautics and Astronautics. - 1968. - № 7. - P. 1313-1319.
87. Dye R.C.F. Vibration amplitudes of compressor blades resulting from scatter in blade natural frequencies/ R.C.F. Dye, T.A. Henry// Trans. ASME, Journal of Engineering for Power. – July, 1969. - P. 182-188.
88. D'Souza K. Reduced order modeling for Nonlinear Vibration analysis of mistuned Multi-Stage Bladed disks with a cracked blade/ K. D'Souza, A. Saito, B.I. Epureanu//52<sup>nd</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and materials Conference 19<sup>th</sup>, 4-7 April 2011, Denver, Colorado.-14 p.
89. Ewins D.J. The Effects of Blade Mistuning on Vibration response – A survey IFToMM Conference, Prague, Czechoslovakia, August 1991.
90. Ewins, D. J. Effects of detuning upon forced vibrations of bladed disks. Journal of Sound and Vibration 9, 1 (1969). - P. 65-79.
91. Ewins D. J. Vibration characteristics of Bladed disc assemblies/ D.J. Ewins// Journal of Mechanical Engineering Science, 1973. -Vol.12. -№5. - P. 165-186.
92. Ewin D. J. Vibration modes of Mistuned bladed disks/ D. J. Ewin// ASME Journal of Engineering for Power. - 1976. - № 7. Pp 349-355.

93. Ewins D. J. Resonant vibration levels of a mistuned bladed disk/ D. J. Ewins, Z. S. Han// Trans. ASME, Journal of vibration, acoustics, stress and reliability in design. – 1984. – Vol 106. – P. 211 - 217.
94. Feiner D. M. A fundamental model of Mistuning for a singer family of modes / D. M. Feiner, J. H. Griffin// Journal of Turbomachinery. - 2002. -Vol 124. -P. 597 - 605.
95. Feiner D. M. Mistuning identification of bladed disks using a Fundamental mistuning model - Part I, II: Theory, Application/ D. M. Feiner, J. H. Griffin// Journal of Turbomachinery. - 2004. -Vol 126. -P. 150 - 165.
96. Rossi M. R. Experimental Study of the Fundamental Mistuning Model (FMM) for Probabilistic Analysis/ M. R. Rossi, D. M. Feiner, and J. H. Griffin// In Proceedings of the 9th National Turbine Engine High Cycle Fatigue Conference, Pinehurst, NC, 2004.
97. Griffin J.H. Model development and statistical investigation of Turbine blade mistuning/ J.H. Griffin, T.M. Hoosac// Trans. ASME, Journal of vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. – 1984. – Vol 106. – P. 204-210.
98. Griffin J.H. The interaction between mistuning and friction in the forced Response of Bladed Disk Assemblies/ J.H. Griffin, A. Sinha// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 1985. - Vol 107.- P. 205-211.
99. Happawana G.S. Free and forced response of mistuned linear cyclic systems: a singular perturbation approach/ G.S. Happawana, O.D.I. Nwokah, A.R. Bajaj, M. Azene// Journal of Sound and Vibration. -1998. - №211.- P. 761-789.
100. Hassan M. Vibration analysis of Turbomachinery Blades. A Project submitted to the Graduate Faculty of Rensselaer Polytechnic Institute in partial fulfillment of the requirements for the degree of master of engineering-mechanical engineering, Rensselaer Polytechnic Institute Hartford, Connecticut, 2008. - 30 p.
101. He Zh. Fluid-Structural coupling effects on the dynamics of Mistuned bladed disks/ Zh. He, B. I. Epureanu, C. Pierre// Journal AIAA. - 2007. - Vol 45. - № 3. - P.552-561.
102. Hoi Yiu. Forced vibration characteristics of mistuned bladed disc assemblies. Ph.D. Thesis, University of London, 1995. 241 p.



103. Hohlrieder M. Zur statischen und dynamischen Analyse rotierender elastischen (Turbinenschaufeln, Verdichter) bei transienten Betriebsbedingungen: Dis. Kassel. - 1994. -202 p.
104. Huang W. Vibration of some structures with periodic random parameters/ W. Huang// Journal AIAA. - 1982. - Vol. 20. - № 7. - P 1001-1008.
105. Hurty W. C. Dynamic analysis of structural systems using component modes/ W. C. Hurty// American Institute of Aeronautics and Astronautics. - 1965. - № 4. – P. 678-685.
106. Hussein M. I. Correlation of tuned free vibration characteristics with Mistuning sensitivity for a bladed disk/ M. I. Hussein, C. Pierre, M. P. Castanier// 44<sup>th</sup> AIAA/ ASME/ ASCE/ AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Confere 7-10 April 2003, Norfolk, Virginia. - 18 p.
107. Irretier, H., “Spectral Analysis of Mistuned Bladed Disk Assemblies by Component Mode Synthesis,” *Vibrations of Bladed Disk Assemblies*, edited by D. J. Ewins and A. V. Srinivasan, American Society of Mechanical Engineers, New York. – 1983. - P. 115-125.
108. Jia Li. Experimental Monte Carlo Mistuning assessment of Bladed disk vibration using forcing variations/ Jia Li, M.P. Castanier, C. Pierre, S. L. Ceccio// 47<sup>th</sup> AIAA/ ASME/ ASCE/ AHS/ ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials confere, 1-4 May 2006, Newport, Rhode Island. - 9 p.
109. Jia Li. Experimentl investigation of mistuned bladed disks system vibration. Dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, the University of Michigan, 2007. - 180 p.
110. Judge J. Experimental investigation of mode localization and forced response amplitude magnification for a Mistuned bladed disk/ J. Judge, C. Pierre, O. Mehmed// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 2001. - Vol 123.- P. 940-950.
111. Kaneko Y. Study on vibration response reduction of bladed disk by use of asymmetric Vane spacing (Study on response reduction of mistuned bladed disk)/ Y. Kaneko, M. Ohta, K. Mori, H. Ohyama// International journal of Gas turbine, propulsion and power systems. - 2012. - Vol 4. - P. 35-42.

112. Kaza K. R. V. Vibration and flutter of mistuned bladed-disk assemblies/ K. R. V. Kaza, R. E. Kielb// Journal of Propulsion and Power. - 1985. - Vol 1. - № 5. - P. 336 – 344.
113. Kenyon J. A. Engine Bladed Disks and sensitivity to harmonic Mistuning/ J. A. Kenyon, J. H. Griffin// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 2003. -Vol 125. -P. 113-120.
114. Kenyon J. A. Experimental demonstration of maximum Mistuned bladed disk forced response/ J. A. Kenyon, J. H. Griffin// Journal of Turbomachinery. - 2003. -Vol. 125. -P. 673-681.
115. Kenyon J. A. Maximum bladed disk forced response from distortion of a structural mode/ J. A. Kenyon, J. H. Griffin// Journal of Turbomachinery. - 2003. -Vol. 125. -P. 352-363.
116. Kenyon, J. A., Griffin, J. H., and Kim, N. E. Sensitivity of tuned bladed disk response to frequency veering. Transactions of the ASME. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power 127, 4 (2005), 35-42.
117. Kim K. Nonlinear inverse perturbation method in Dynamic analysis/ K. Kim, W. J. Anderson, R. E. Sandstrom// Journal AIAA. - 1982. - Vol. 21. - № 9. - P 1310-1316.
118. Klauke T. Numerical investigations of localized vibration of Mistuned bladed integrated disks/ T. Klauke, A. Kuhhorn, B. Beirow, M. Golze// Journal of Turbomachinery. - 2009. -Vol. 131. -P. 031002-1-13.
119. Kruse M. Dynamic response of an industrial turbomachinery rotor/ M. Kruse, C. Pierre// American Institute of Aeronautics and Astronautics. - 1996. - № 32. -P. 96-2820.
120. Kruse M. Forced response of mistuned bladed disks using reduced-order modeling/ M. Kruse, C. Pierre// American Institute of Aeronautics and Astronautics. - 1968. - № . 37. – P.1938-1950.
121. Laxalde D. Mistuning identification and model updating of an industrial blisk / D. Laxalde, F. Thouverez, J. J. Sinou, J. P. Lombard, A. Baumhauer// International journal of rotating machinery. - 2007. - 10 p.

122. Lee S. Y. Assessment of Probabilistic Methods for Mistuned Bladed Disk Vibration/ S.Y. Lee, M.P. Castanier, C. Pierre// 46th AIAA/ ASME/ ASCE/ AHS/ ASC Structures, Structural dynamics & material conference, 18-21 April 2005, Austin, Texas. - P. 1-15.
123. Lim S. Compact, Generalized component mode mistuning representation for modeling bladed disk vibration/ S. Lim, R. Bladh, M. P. Castanier, C. Pierre// Journal AIAA. - 2007. - Vol 45. - № 9. - P. 2285-2298.
124. Lim S.-H. Predicting blade stress levels directly from reduced-order vibration models of Mistuned bladed disks/ S.-H. Lim, C. Pierre, M. P. Castanier// Journal of Turbomachinery. - 2006. -Vol. 118. -P. 205-210.
125. Lin C. -C. An adaptive perturbation scheme for the analysis of Mistuned bladed disks/ C. -C. Lin, M. P. Mignolet// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 1997. -Vol 119. -P. 153-160.
126. Macbain J.C. Maximum resonant response of mistuned bladed disks/ J.C. Macbain, P.W. Whaley// Journal of vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. - 1984. - Vol 106. -P. 218-223.
127. Madden A. Reduced-Order modeling approach for blisks with large mass, stiffness, and geometric mistuning/ A. Madden, B.I. Epureanu, S. Filippi// Journal AIAA. - 2012. - Vol 50. - № 2. - P. 366-374.
128. Madden A. C. Reduced-Order model construction procedure for Robust Mistuning Identification of Blisks/ A. C. Madden, M. P. Castanier, B. I. Epureanu// Journal AIAA. - 2008. - Vol 46. - № 11. - P. 2890 - 2898.
129. Madden A. C. Mistuning Identification of Blisks at higher frequencies/ A. C. Madden, M. P. Castanier, B. I. Epureanu// 51<sup>st</sup> AIAA/ ASME/ ASCE/ AHS/ ASC Structures, Structural Dynamics, and materials Conference 18<sup>th</sup>, 12-15 April 2010, Orlando, Florida. - 10 p.
130. Madden A. C. Reduced Order Models for robust identification and damage modeling of blisks. - A dissertation submitted in the partial fulfillment of the requirements for degree of Doctor of Philosophy, The University of Michigan, 2011. - 125 p.

131. Martel C. Asymptotic description of maximum Mistuning amplification of Bladed disk forced response/ C. Martel, R. Corral// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 2009. - Vol 131.- P. 022506 1-10.
132. Mayorca M. A. Numerical methods for Turbomachinery Aeromechanical predictions. Doctoral Thesis, Royal institute of Technology Stockholm, Sweden, 2011. – 127 p.
133. Mbaye M. A Reduced-order model of mistuned cyclic dynamical systems with finite geometric perturbations using a basis of cyclic modes/ M. Mbaye, C. Soize, I. P. Ousty// Proceedings of the XIII international symposium on dynamic problems of Mechanics, 2009. -9 p.
134. Mignolet M. P. The combined closed form-perturbation approach to the analysis of mistuned bladed disks/ M. P. Mignolet, C. –C. Lin// Journal of Turbomachinery. - 1993. -Vol. 115. -P. 771-780.
135. Mignolet M. P. Direct prediction of the effects of Mistuning on the forced response of bladed disks/ M. P. Mignolet, W. Hu// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 1998. -Vol 120. -P. 626-634.
136. Mignolet M. P. Identification of Mistuning characteristics of Bladed disks from free response Data - part I, II/ M. P. Mignolet, A. J. Rivas-Guerra// Journal of Engineering for gas turbine and power. - 2001. - Vol. 123. - P. 395-411.
137. Mikkel Myhre. Numerical investigation of the sensitivity of forced response characteristics of bladed disks to mistuning. Licentiate thesis, KTH, Superseded Departments, Energy Technology, Stockholm. - 2003. - 123 p.
138. Moyroud F. A comparison of two finite element reduction techniques for Mistuned bladed disks/ F. Moyroud, T. Franssø// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 2002. - Vol 124.- P. 942-952.
139. Nikolic M. Coriolis forces in forced response analysis of Mistuned bladed disks/ M. Nikolic, E. P. Petrov, D. J. Ewin// Journal of Turbomachinery. - 2007. -Vol. 129. -P. 730-739.

140. Nikolic M. New insights into the blade mistuning problem. A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy, the University of Cambridge. - 2002. – 206 p.
141. Nissim E. Optimization of cascade Blade mistuning, Part I: Equations of motion and basis igerent properties/ E. Nissim// Journal AIAA. - 1985. - Vol 23. - № 8. - P. 1213-1222.
142. Ottarsson G. S. A transfer matrix approach to vibration localization in mistuned bladed assemblies/ G. S. Ottarsson, C. Pierre// The Proceedings of the international Gas turbine and Aeroengine congress. - May 1993. - № 3.
143. Ottarsson G. S. Dynamic modeling and vibration analysis of mistuned bladed disks. - A dissertation submitted in the partial fulfillment of the requirements for degree of Doctor of Philosophy, The University of Michigan, 1994. - 198 p.
144. Pettianto B. C. Experimentally based statistical forced response analysis for purpose of impeller mistuning identification/ B. C. Penttinato, J. H. Griffin, Y. Wang, D. M. Feiner// Proceeding of the Second middle East turbomachinery symposium 17-20 March 2012, Doha, Qatar.
145. Petrov E. P. Analysis of the Worst Mistuning patterns in Bladed disk Assemblies/ E. P. Petrov, D. J. Ewins// Journal of Turbomachinery. - 2003. -Vol. 125. -P. 623-631.
146. Petrov E. P. A new method for dynamic analysis of Mistuned bladed disks based on the exact relationship between tuned and Mistuned systems/ E. P. Petrov, K. Y. Sanliturk, D. J. Ewins// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 2002. - Vol 124.- P. 586-597.
147. Petrov E. P. Method for analysis of Nonlinear multiharmonic vibrations of mistuned bladed disks with scatter of contact interface characteristics/ E. P. Petrov, D. J. Ewins// Journal of Turbomachinery. - 2005. -Vol. 127. - P. 128-136.
148. Petrov, E. P., and Iglin, S. P. Search of the worst and best mistuning patterns for vibration amplitudes of bladed disks by the optimization methods using sensitivity coe\_cients. In Proceedings of the 1st ASSMO UK Conference. Engineering Design Optimization (Ilkley, UK, 1999). - P. 303-310.

149. Petyt M. Introduction to finite element vibration analysis/ M. Petyt. - Cambridge, New York. - 2010. - 500 p.
150. Pierre C. Aeroelastic modal characteristics of Mistuned bladed assemblies: Mode localization and loss of eigenstructure/ C. Pierre, D. V. Murthy// Journal AIAA. -1989. – 91-1218-CP. - P. 2036-2050.
151. Polach P. Calculation of natural vibration of a stream turbine bladed disk using rotational periodicity and comparison with experimental measurement/ P. Polach// 7<sup>th</sup> Euromech Solid mechanics conference. - Lisbon, Portugal, 2009. - 17 p
152. Polach P. Verification of the calculation of natural vibration characteristics of linear undamped rotationally periodic structures/ P. Polach// Engineering mechanics. – 2009. - Vol. 16. - P. 161-172.
153. Rivas-Guerra A. J. Local/Global effects of Mistuning on the Forced response of Bladed disks/ A. J. Rivas-Guerra, M. P. Mignolet// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 2004. - Vol 126.- P. 131-141.
154. Rivas-Guerra, A. J., and Mignolet, M. P. Maximum amplification of blade response due to mistuning: localization and mode shape aspects of the worst disks. Transactions of the ASME. Journal of Turbomachinery 125, 3 (2003), 442-54.
155. Sanliturk K.Y. Vibration analysis of mistuned bladed systems. Ph.D. Thesis, University of London. - 1992. 187 p.
156. Sanliturk K. Y. Vibration analysis of Mistuned Bladed-Disk assemblies - Inverse approach/ K. Y. Sanliturk, M. Imregun// Journal AIAA. - 1994. - Vol 32. - № 4. - P. 857-865.
157. Scarselli, G., and Leece, L. Non deterministic approaches for the evaluation of the mistune on the rotor dynamics. In AIAA 2004 Conference (Palm Springs, California, 19 - 22 April 2005).
158. Shapiro B. Analyzing mistuning of bladed disks by symmetry and Reduced-Order Aerodynamic modeling/ B. Shapiro, K. E. Willcox// Journal of Propulsion and power. - 2003. - Vol. 19. - № 2. - P 307-311.
159. Sinha A. Calculating the statistics of forced response of a Mistunde bladed disk assembly/ A. Sinha// Journal AIAA. - 1986. - Vol 24. - P. 1797-1801.

160. Sinha A. Reduced-Order Model of a Bladed Rotor with Geometric Mistuning/ A. Sinha// Journal of Turbomachinery. - 2009. -Vol. 131. -P. 031007 1-7.
161. Smith I. M. Programming the Finite Element Method/ I. M. Smith, D. V. Griffiths. – JOHN WILEY & SONS. - 2004. - 478 p.
162. Soe M. Vibration characteristics of Mistuned bladed disks/ M. Soe, W. Yan-rong// ADDM. - 2010. - Vol. 20. - P. 25-30.
163. Sogliero G. Fatigue life estimates of Mistuning blades via a stochastic approach/ G. Sogliero, A.V. Srinivanan// AIAA Journal. -1090. – Vol 18. – P. 318-323.
164. Souza K. D. Reduced-Order modeling for Nonlinear analysis of cracked Mistuned multistage Bladed-Disk systems/ K. D. Souza, A. Saito, B. I. Epure-anu// Journal AIAA. - 2012. - Vol 50. - № 2. - P. 304-312.
165. Valero N.A. Vibration characteristics of Mistuned shrouded blade assemblies/ N.A. Valero, O.O. Bendiken// Trans. ASME, journal of Engineering for Gas Turbines and Power. – 1986. – Vol 108. - P 293-299.
166. Vargiu P. A reduced order model based on sector mistuning for the dynamic analysis of mistuned bladed disks/ P. Vargiu, C. M. Firrone, S. Zucca, M. M. Gola// Dynamics of rotating machinery. - 2010. - P. 1647-1661.
167. Xiao, B. Blade model identification and maximum amplification of forced response due to mistuning. PhD thesis, Arizona State University, 2005.
168. Wagner J. T. Coupling of turbomachine blade vibrations through the rotor/ J. T. Wagner// Trans. ASME, Journal of Engineering for Power. – 1967. - Vol. 89. - P. 502-513.
169. Wagner M. B. Model reduction methods for rotor dynamic analysis: A survey and review/ M. B. Wagner, A. Younan, P. Allaire, R. Cogill// International journal of rotating machinery. - 2010. - 17 p.
170. Wei S.T. Localization phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry Part I: Free Vibration/ S. T. Wei, C. Pierre// Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. -1988. -Vol 110. -№4. P. 429-438.

171. Wei S.T. Localization phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry Part II: Forced Vibration/ S. T. Wei, C. Pierre// Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. -1988. -Vol 110. -№4. P. 439-449.
172. Wei S. T. A Statistical analysis of the effects of Mistuning on the forced response of Ciclic assemblies/ S. T. Wei, C. Pierre// Journal AIAA. -1989. - P. 1734-1748.
173. Whitehead D.S. Effect of mistuning on forced vibration of blades with Mechanical coupling// Journal of mechanical science. - 1976. - № 6. -P. 306-307.
174. Whitehead D.S. Effect of mistuning on the vibration of turbomachine blades induced by wakes// Journal of mechanical engineering science. - 1966. - № 1. - P. 15 -21.
175. Whitehead D. S. The maximum factor by which forced vibration of blades can increase due to mistuning. Transactions of the ASME. Journal of Engineering for Gas turbines and Power. – 1998. P. 115-119.
176. Yang M.T. A Reduced-Order model of Mistuning Using a subset of nominal system modes/ M.T. Yang, J.H. Griffin// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 2001. - Vol 123. - P. 893-900.
177. Yang M.T. A Reduced order approach for vibration of Mistuned bladed disk assemblies/ M.T. Yang, J.H. Griffin// Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. - 1997. - Vol 119. - № 1. - P. 161-167.
178. Yan Y. J. Vibration mechanism of a mistuned bladed-disk/ Y. J. Yan, P. L. Cui, H. N. Hao// Journal of Sound and Vibration. - 2008. - Vol 317. - P. 294 - 307.
179. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals/ O. C. Zienkiewicz. – Butterworth – Heinemann, 2005. – 752 p.
180. Zheng, Z.-C., and Wang, F.-R., “Dynamic Analysis of Blade Groups Using Component Mode Synthesis,” *Vibrations of Blades and Bladed Disk Assemblies*, edited by R. E. Kielb and N. F. Rieger, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1985, pp. 97–103.



## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Приложение А. Оператор Кронекера

Оператор Кронекера двух матриц определен в виде

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1N}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2N}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}B & a_{N2}B & \cdots & a_{NN}B \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Свойства оператора Кронекера

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD), \quad (6.2)$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}, \quad (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T, \quad (6.3)$$

### Приложение Б. Матрица Фурье.

Матрица Фурье в размере  $N \times N$  имеет вид

$$E = [e_{kj}] \quad e_{kj} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\alpha(j-1)(k-1)}, \quad (k, j = 1, \dots, N), \quad (6.4)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  и  $\alpha = 2\pi/N$ .

Тогда реальные значения матрицы определены в виде

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_1^c & \bar{f}_1^s & \cdots & \bar{f}_n^c & \bar{f}_n^s & \cdots & \bar{f}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}} & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \alpha & \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \alpha & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos 2\alpha & \sqrt{\frac{2}{N}} \sin 2\alpha & \cdots & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos(N-1)\alpha & \sqrt{\frac{2}{N}} \sin(N-1)\alpha & \cdots & \frac{(-1)^{N-1}}{\sqrt{N}} \end{bmatrix},$$

где последний столбец существует только для четных  $N$ .

Отметим, что матрица  $E$  и  $F$  являются ортогональными, поэтому  $E \cdot E^T = F \cdot F^T = I$ , где  $I$  - единичная матрица в размере  $N$ .



# СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014617789

**Программа для анализа влияния расстройки параметров на характеристики колебаний рабочих колес турбомашин**

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Иркутская государственная сельскохозяйственная академия» (RU)**

Авторы: **Репецкий Олег Владимирович (RU),  
До Мань Тунг (RU)**

Заявка № **2014613456**

Дата поступления **17 апреля 2014 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **04 августа 2014 г.**

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов





# СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2014617790

**Программа для исследования собственных колебаний  
рабочих колес турбомашин с учетом вращения**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Иркутская государственная сельскохозяйственная академия» (RU)*

Авторы: *Репецкий Олег Владимирович (RU), До Мань Тунг (RU), Буй Хай Данг (VN)*

Заявка № 2014613457

Дата поступления 17 апреля 2014 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 04 августа 2014 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**"НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"**



# ДИПЛОМ

**I СТЕПЕНИ**

**НАГРАЖДАЕТСЯ**

**До Мань Тунг**

**студент**

**Иркутской государственной  
сельскохозяйственной академии**

**за доклад**

*«Применение метода моделирования уменьшенного порядка для  
анализа колебаний рабочих колес турбомашин с расстройкой  
параметров на основе метода конечных элементов »*

**представленный**

**на VII Всероссийской научно-практической конференции  
«Научная инициатива иностранных студентов и аспирантов  
российских вузов»**

**г. Томск, 23 – 25 апреля 2014 г.**

**РЕКТОР ТПУ**

**П.С. ЧУБИК**

**УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ  
КОНФЕРЕНЦИИ**

**Е.Ю. КОШЕЛЕВА**

